Критерії

Тур I

Задача 1
Основні:
- 0 балів: знайдено суму та\або різницю коефіцієнтів, підставлено конкретні прості числа чи конкретні пари (u, v), підставлено явну формулу многочлена P, згадано, що $P(u^k)P(v^k) - 1$ теж кратне простим дільникам $uv - 1$.
- +2 бали: зведено задачу до випадку $P(0) \neq 0$

Серед наступних трьох критеріїв може бути застосований максимум один
- +2 бали: показано, що $P(x) \vdots p \Rightarrow x \vdots p$ для простих p (*)
- +1 бал: твердження, рівносильне твердженню (*);
- +1 бал: просування в напрямку доведення твердження (*);

- +1 бал: показано, що $P(x) \vdots p \Rightarrow a_0 \vdots p$
- 1 бал: міркування про те, що кількість коренів ненульового многочлена над $\mathbb{Z}_p$ занадто маленька

у порівнянні з кількістю елементів $\mathbb{Z}_p$

За що знімалися:
- -1 бал: НЕ розібрано випадок, коли вільний член P від'ємний;
- -1 бал: аргументи підставляються не у ті многочлени (у P замість $\frac{P(a_k^2 x)}{x^k a_k^{2k+1}}$)
- -2 бали: не доведено задачу для випадку $a_0 = 0$

Задача 2
Основні:
- 0 балів: нічого або наявний тільки малюнок або відсутні істотні просування.
- 1 бал: Отримано деякі геометричні умови для точки дотику ($MK = MP$ та $\angle MKP = 30^\circ$).
- 2 бали:На промені CA за точку A відмічено точку K так, що $AK^2 = AQ \cdot AM$ та доведено, що $AK = AB/2$.
- 5 балів: Зведено до тригонометричної тотожності, яку неважко довести.
- 7 балів: повний розв'язок

Задача 3
Основні:
- 0 балів: доведено, що в протилежному випадку знайдеться квадрат з хоча б 4 липкими вершинами, або відсутність куточків, пораховані кількості можливих маршрутів з S до F, розглянуті часткові випадки, результат яких не можна узагальнити, неправильні міркування за допомогою метода математичної індукції. нічого
- 1б - ідея розглянути області/граф досяжності та степені кожної вершини
- +2б - доведено пункт а.
- 7 балів: повний розв'язок

Тур II

Задача 4
Основні:
- 0 балів: нічого
- 1 бал: визначені точки M', N', D', B' на колі
- 5 балів: розв'язок спирається на те, що кола ω_1, ω_2 перетинаються, але цей випадок можна нескладно узагальнити
- 3 бали: зведено задачу до того, щоб, розглянути випадок, коли $KMNL$ - паралелограм, але не сформульований цей факт
- 3 бали: Доведено, що $KM'LN'$ трапеція та подальші просування, які можна привести до правильного розв'язку, довівши паралельність основ трапеції до AC
- 4 бали: Зведення до того, що нам достатньо довести, що $LM||KN$
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:
- -1 бал: ....

Задача 5
Основні:
- 0 балів: правильна відповідь, d1=1, n - непарне, є перебір якоїсь кількості дільників, наведена формула суми дільників, нічого
- +1 бал: доведено, що d2 = 3
- +1 бал: правильно сформульовано припущення індукції
- 4 бали: правильний розв'язок, якщо замінити неправильне припущення індукції на правильне.
- 4 бали: недостатньо пояснено крок індукції
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:
- -1 бал: ....

Задача 6
Основні:
- 0 балів: доведено, що нижня границя f в нулі дорівнює нулю; арифметичні помилки в перетвореннях; відповідь та перевірка; підстановки $y = x$, $x = 0$ та інші, які ні до чого не ведуть;

- 1 бал: сюр'єктивність $xf(x)$;
- 1 бал: умова задачі переписана через $f^{-1}(x)$;
- 3 бали: рівність $g(u) + g(v) = g(\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}})$ для функції $g(x) := xf^{-1}(x)$;
- 4 бали: рівність $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = 2f^{-1}(x + y)$;
- 5 балів: рівність $f^{-1}(2x) + f^{-1}(2y) = 2f^{-1}(x + y)$ ТА на відрізку (a, b) доведено лінійність для всюди щільної множини;
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:
- -2 бали: неправильно переписана умова через $f^{-1}(x)$ з подальшими міркуваннями, які на цьому ґрунтуються.

Тур III

Задача 7

Основні:

- 0 балів: приклад відсутній або неправильний. Або спроба довести, що приклада не існує.
- 1 бал: задачу спрощено до пошуку цілих $a,\ b,\ l$ таких, що $a(a\ -\ l)\ =-\ n(n\ -\ 1)$ та $b(b\ -\ l)\ = n^2(n\ -\ 1)$ (або до аналогічної системи).
- 7 балів: наведений і перевірений правильний приклад.

Задача 8

Основні:

- 0 балів: неправильні геометричні міркування, нічого
- +2б - побудовано приклад
- +1б - присутня нерівність S <= ¼((d1)^2 + (d2)^2), де d1 та d2 - діагоналі чотирикутника
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:

- ➔ -1 бал: сума площ для прикладу не дорахована

Задача 9

Основні:

- 0 балів: часткові випадки n, ідея перестановки двух чисел у наборі між собою, часткові просування на шляху до контрприклада (випадок $n\ =\ 4k\ +\ 2$ тощо);
- +1 бал: показано, що прості числа задовольняють умову;
- +1 бал: повністю сформульовано лему 1 з авторського розв’язку;
- +1 бал: наведено та обґрунтовано контрприклад для випадку парного числа, що не є степенем двійки;
- +1 бал: просування у доведенні лем 2,3;
- 7 балів: повний розв'язок.

За що знімалися:

- ➔ -1 бал: відсутній контрприклад;
- ➔ -2 бала: задача не доведена для степенів двійки.

Тур IV

Задача 10

Основні:

- 0 балів: нічого
- 1 бал: показано, що в графічній інтерпретації задачі у однієї з вершин є нескінченна кількість ребер одного кольору, які виходять з неї;
- 1 бал: показано, що для деякого $a \in S$ є нескінченна кількість інших $b \in S$ таких, що $(a, b) > 1$;
- +4 бали: доведення факту, що при сукупній взаємній простоті елементів S наявність нескінченної кількості чисел, кратних одному і тому самому простому p забезпечує наявність шуканої трійки;
- +1 бал: використання попереднього факту з деякими усувними помилками, яке веде до розв’язку
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:

- -1 бал: не доведено, що існує колір, який зустрічається нескінченну кількість разів
- -2 бали: без обґрунтування припускається сукупна взаємна простота усіх елементів S ТА пропущене пояснення скінченності кількості чисел, що не взаємно прості з заданим ТА неповністю пояснена наявність нескінченної підмножини S з попарно рівними НСД ТА деякі інші дрібні моменти.
- -1 бал: використано t - яке є остачею від ділення - як елемент множини S. Не пояснено, що для t справедлива умова, тобто, що t лежить в S
- -1 бал: не враховано випадок, коли $l \vdots d_1$
- -1 бал: недостатньо конкретизований вибір елементів, який призводить до того, що в розглянутих трійках деякі елементи можуть співпадати;
- -1 бал: за побудови множини чисел, що мають однакові попарні НСД до множини не включено елемент з якого починали розгляд усі НСД. (Це призводить до того, що коли обирається число не з даної множини та будується трійка потрібних чисел, то деякі числа в трійці можуть співпадати.)
- - 2 бали: використана необов’язково ціла величина $\frac{k}{d_1}$, яка впливає на подальші міркування.

Задача 11

Основні:

- 0 балів: нічого
- 0 балів: Отримано тривіальні властивості послідовності: монотонність, невід’ємність, тощо
- 0 балів: Отримано формулу $a_n - a_0 = \frac{1}{2022}(a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_{n-1}^2)$
- 0 балів: Отримано нерівність $a_n \geq (\frac{2021}{2022})^n$
- 2 бали: Сформульовано нерівність $1 + \frac{n}{2022} < \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{n}{2021}$ та є ідея її доведення за допомогою ММІ
- 7 балів: повний розв'язок

За що знімалися:

- -1 бал: ....

Задача 12

Основні:

- 0 балів: незавершені геометричні або комплексні обчислення, помічено очевидні речі, нічого.
- +1б - доведено, що T’ з авторського розв’язку належить описаному колу трикутника ABC (або еквівалентне твердження).
- +1б. - Показано, що точки R, I, T, J з авторського розв’язання лежать на одному колі.
- 7 балів: повний розв'язок.

За що знімалися:

- -1 бал: ....