Київський національний університет імені Тараса Шевченка

X Київська міська олімпіада з математики для учнів 4–6 класів

«Математична вишиванка»

«Часом ми бачимо багато, але не помічаємо головного.»
Конфуцій

Умови та розв'язання завдань

4 клас

1. Знайдіть найменше натуральне число n таке, що в записі числа n та в записі числа $2n$ зустрічаються усі десять цифр від 0 до 9.

Відповідь: 1023456789.
Розв'язання. Найменше число 1023456789, що містить усі цифри від 0 до 9 задовольняє умову, оскільки найменше число, що містить усі цифри від 0 до 9 задовольняє умову:

$$2 \cdot 1023456789 = 2046913578,$$

а тому є шуканим.

2. Клітинки дошки 5×5 розфарбовані у шаховому порядку, при цьому кутові клітинки – чорні. Чи можна цю дошку розрізати на 5 фігурок, кожна з яких складається з 5 клітинок, так, щоб фігурок, в яких білих клітинок більше ніж чорних, було більше ніж фігурок, в яких білих клітинок менше ніж чорних? Фігурка не може складатися з окремих клітинок внаслідок розрізання, а має бути одним компонентом, а саме з кожної клітинки фігури у кожну іншу можна дістатися ходами шахової тури.

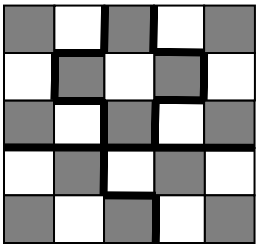

Рис. 1

Відповідь: так.
Розв'язання. Можливий приклад показано на рис. 1.

3. Чи можна заповнити таблицю 6×6 числами $1, 2, 3$ так, щоб при діленні на 3 кожна з сум чисел по рядках давала остачу 1, а кожна з сум по стовпчиках давала остачу 2?

1			1	1	1
1			1	1	1
	1				
	1				
		1			
		1			

Рис. 2

Відповідь: так.
Розв'язання. Можна, приклад заповнення показано на рис. 2. У кожній порожній клітинці стоїть число 3.

4. Петрик зафарбував деякі клітинки квадрату 100×100. Далі, якщо у деякого квадрата 2×2 вже зафарбовані 3 з 4-х клітин, то він має право зафарбувати і останню клітинку цього квадрату. Яку найменшу кількість клітин з самого початку має зафарбувати Петрик, щоб після того він зміг зафарбувати і усю дошку?

Відповідь: 199.
Розв'язання. Дошка 100×100 містить $99 \cdot 99$ квадратиків 2×2. На кожному кроці кількість квадратиків 2×2, що є повністю зафарбованими збільшується на 1. Таким чином у процесі

зафарбовування не можна зробити більше $99 \cdot 99$ ходів. Тому з самого початку мали бути зафарбованими не менше ніж $100 \cdot 100 - 99 \cdot 99 = 199$ клітин.
Як приклад, можна зафарбувати верхній рядок та лівий стовпчик, які разом містять рівно 199 клітинок. Процес фарбування – очевидний, легко фарбується другий рядок зверху і так далі.

5 клас

1. Задача № 2 для 4 класу.

2. Петрик записав на дошці числа від 1 до 13. Даринка п'ять з них помножила на 3, а решту чисел – на 7. Отримані добутки вона додала. Чи могла Даринка отримати в сумі число 433?

Відповідь: так.
***Розв'язання*.** Достатньо вибрати такі числа для множення:

$$(5 + 10 + 11 + 12 + 13) \cdot 3 + (1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 7 = 433.$$

3. Чи можна заповнити таблицю 7×7 числами $1, 2, 3$ так, щоб при діленні на 3 кожна з сум чисел по рядках давала остачу 1, а кожна з сум по стовпчиках давала остачу 2?

Відповідь: ні.
***Розв'язання*.** Суми усіх чисел, доданих по рядках та по стовпчиках мають бути однаковими. Якби то було можливо, то по рядках остача при діленні на 3 дорівнювала б остачі числа $7 \cdot 1$, тобто 1, а по стовпчиках – остачі числа $7 \cdot 2$, тобто 2. Одержана суперечність завершує доведення.

4. Задача № 4 для 4 класу.

5. У компанії Рошен в усіх коробках для свят однакова кількість цукерок. Кожний з 18 працівників цієї компанії святкує день народження на роботі і запрошує своїх друзів з компанії Рошен. За такої умови він купляє рівно 1 таку святкову коробку і ділить усі цукерки з коробки порівну між усіма присутніми включно з собою. Зауважимо, що на кожному святкуванні це вдалося зробити. Відомо, що рівно за рік Андрій на усіх святкуваннях, куди його запросили, з'їв 39 цукерок, два Богдана – по 25, чотири Василя – по 84, чотири Грицька – по 95, семеро Дмитрів – по 65 цукерок. Яка максимальна кількість працівників була на дні народженні в одного з них разом з ним?

Відповідь: 14
***Розв'язання*.** За рік працівники мали з'їсти 18 коробок цукерок, сумарно було з'їдено

$$39 + 25 \cdot 2 + 84 \cdot 4 + 95 \cdot 4 + 65 \cdot 7 = 1260 \text{ цукерок.}$$

Таким чином у кожній коробці – по $1260 : 18 = 70$ цукерок. Таким чином на ці свята могли приходити разом з іменинником 14,10,7,5,2 людини, які відповідно б з'їли по 5,7,10,14,35 цукерок. Якщо Богдан колись з'їв 25 цукерок, то це було можна лише за умови, що колись він з'їв 5 цукерок. Інакше отримати число 25 неможливо. Але 5 цукерок – це означає, що на дні народження була максимально можлива кількість людей – 14.

6 клас

1. Петрик вибрав натуральне число n, яке ділиться націло на натуральне число d. Доведіть, що серед таких n дробів $\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \ldots, \frac{k}{n-k}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}$ є число, що дорівнює

$d-1$.

Розв'язання. Якщо $n=kd$, то там є шуканий дріб $\frac{n-k}{k}=\frac{kd-k}{k}=d-1$.

2. Задача № 3 для 5 класу.

3. Є 2020 гир вагою 1 г, 2 г, …, 2020 г. Петрик розклав їх на дві шальки терезів і вони стали в рівновазі. Скільки щонайменше гир (не менше однієї) Петрик може зняти з обох шальок, щоб вони лишилися в рівновазі при будь-якому розташуванні гир?

Відповідь: 3.
Розв'язання. Очевидно, що менше 3 гир прибрати неможливо. Розглянемо шальку (вважатимемо її лівою), на якій лежить гиря 1 г. Нехай наступна за вагою на лівій шальці лежить гиря вагою $k>1$. Зауважимо, що якщо гиря $k+1$ лежить на правій шальці, то відповідь досягається. Ми просто прибираємо з лівої шальки гирі 1 та k, а з правої – $k+1$. Таким чином на лівій шальці лежить набір гир $1, k, k+1, \ldots, 2020$. Зрозуміло, що тоді $k\geq 5$, бо інакше рівність вагів неможлива. Тоді бачимо, що гирі 2 та $k-2$ лежать на правій шальці та вони різні. Тому достатньо прибрати з правої шальки 2 та $k-2$, а з лівої – k.
Зауважу, що розкласти гирі належним чином, щоб ваги були в рівновазі – можливо.

4. Задача № 5 для 5 класу.

5. Шестикутник, не обов'язково опуклий, усі сторони якого різної довжини, розрізали на рівносторонні трикутники. Яка найменша кількість трикутників могла при цьому утворитися?

Відповідь: 3.
Розв'язання. Два трикутники не можуть утворитися, бо сторони, якими ці трикутники не дотикаються, лишаться рівними сторонами шестикутника. Для 3трикутників наводимо відповідний приклад (рис. 1).

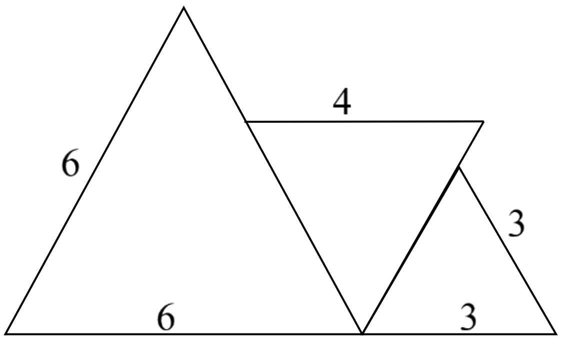

Рис. 1