Розв'язання тестових завдань II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у місті Києві (2021–2022 навчальний рік)

«Насправді життя просте,
але ми його наполегливо ускладнюємо».
Конфуцій.

6 клас

1. Петрик має 100 гральних кубиків, які промарковані таким чином: на чотирьох гранях кожного кубика написане число 1, на інших двох гранях – число 2. Він одночасно кидає усі ці 100 костей і рахує суму цифр на гранях, що випали на усіх костях. Скільком різним значенням може дорівнювати сума?

***Відповідь*:** 101.
Розв'язання. Зрозуміло, що сума залежить від кількості 1 та 2, які випали на костях. Зрозуміло, що можлива кількість випадання 1 рівно 101, а саме $0; 1; 2; \ldots; 100$.

2. Для шахівниці 8×8, що складається з квадратиків 1×1, порахуйте кількість квадратів зі сторонами, що проходять вздовж сторін квадратиків 1×1 та не виходять за межі заданого квадрату.

Відповідь: 204.
Розв'язання. Порахуємо кількість квадратів в залежності від його сторони. Квадратів зі стороною 1 маємо 64 варіант, зі стороною 2 маємо 49 варіантів, …, зі стороною 8 маємо 1 варіант. Разом $1 + 4 + 9 + \cdots + 64 = 204$.

3. Обчислюємо квадрат кожного з чисел від 1 до 2023. Беремо останню цифру з кожного з отриманих квадратів чисел, а потім додаємо ці 2023 цифри разом. Яке число ми отримаємо?

Відповідь: 9104.
Розв'язання. Випишемо останні цифри квадратів чисел від 0 до 9: $0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1$, що мають сумою число 45. Очевидно, що саме ці останні цифри будуть в кожному з десятків $(0, 9)$, $(10, 19)$, …, $(2010, 2019)$, а таких десятків усього – 202. Тобто отриману суму 45 достатньо помножити на 202, звідки матимемо 9090. Залишається до цього числа додати останні цифри квадратів чисел 2020, 2021, 2022 та 2023, тобто суму $0 + 1 + 4 + 9 = 14$. Таким чином шукане число $9090 + 14 = 9104$.

4. Натуральне число C на 22% менше натурального числа A та на 16% більше натурального числа T. Яке найменше можливе значення суми $C + A + T$?

Відповідь: 3556.
Розв'язання. З умов задачі випливає, що $C = 0,78A = \frac{39}{50}A$ та $C = 1,16T = \frac{29}{25}T \Rightarrow 39A = 58T$. Таким чином A має ділитися на 50 та 58, T має ділитися на 25 та 39. Таким чином найменше можливе значення для $A = 1450$, $T = 975$. Тоді для $C = 1131$, і відповідно найменше шукане можливе значення для суми $A + C + T = 3556$.

5. Є рівносторонній трикутник ABC, точки D, E, F – середини його сторін AB, AC та BC відповідно. Скільки усього існує трикутників з вершинами в точках A, B, C, D, E

та F (трикутники ABC та DEF також рахуються)?

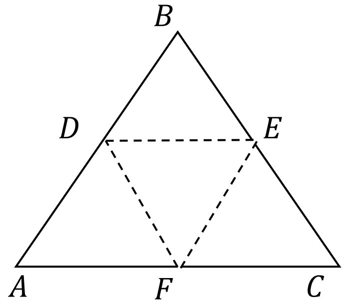


Рис. 1

Відповідь: 17.
Розв'язання. Спочатку не рахуємо трикутники ABC та DEF. Усі інші трикутники мають 3 вершини, за принципом Діріхле рівно 2 з них, або співпадають з вершинами ΔABC, або з вершинами ΔDEF (рис. 1).
Зі стороною AB таких трикутників 2 – ABE та ABF, тому разом аналогічних трикутників – 6.
Зі стороною DE таких трикутників 3 – BDE, ADE та CDE. Таким чином аналогічних трикутників буде 9.
Таким чином усього трикутників буде $2 + 6 + 9 = 17$.

6. Таблиця 2×2 заповнена натуральними числами таким чином, що числа у кожному стовпчику відрізняються на 10 (якщо від більшого з двох чисел відняти менше), а відношення більшого числа до меншого у кожному рядку дорівнює 3. Які числа можуть бути у першому стовпчику цієї таблиці? У відповіді запишіть суму усіх можливих відповідей.

Відповідь: 20.
Розв'язання. Без обмеження загальності вважатимемо, що числа у першому рядку – це x та $3x$. Тоді числа другого рядка дорівнюють відповідно $x \pm 10$ та $3x \pm 10$. Щоб справджувалися умови задачі має виконуватися одна з умов: $3(x \pm 10) = 3x \pm 10$ або $x \pm 10 = 3(3x \pm 10)$. Очевидно, що перші співвідношення призводять до суперечності, тобто не мають розв'язків. Розглянемо інші чотири рівності.
$x + 10 = 3(3x + 10) \Rightarrow 8x = -20 \Rightarrow x$ – не натуральне.
$x + 10 = 3(3x - 10) \Rightarrow 8x = 40 \Rightarrow x = 5$.
$x - 10 = 3(3x + 10) \Rightarrow 8x = -40 \Rightarrow x$ – не натуральне.
$x - 10 = 3(3x - 10) \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x$ – не натуральне.
Таким чином шуканими числами можуть бути числа 5 та 15. Тому їх сума – це $5 + 15 = 20$.

7. У величезному кошику на стадіоні лежало дуже багато м'ячів кожного з трьох кольорів – жовтого, синього та білого. Тренер футбольної команди дозволив виходити на поле гравцям, кожний з яких візьме собі набір з трьох м'ячів і у кожного з гравців цей набір має бути різним. Два набори з трьох м'ячів – різні тоді і тільки тоді, коли там різна кількість м'ячів принаймні одного кольору. Скільки гравців максимум могло вийти на поле?

Відповідь: 10.
Розв'язання. Порахуємо кількість попарно різних наборів з трьох м'ячів. Якщо усі 3 м'ячі одного кольору, то таких наборів очевидно 3, якщо усі – різного, то 1. Лишається порахувати кількість наборів, в яких є м'ячі двох кольорів. Там має бути 2 м'ячі одного кольору (3 варіанти) та 1 м'яч іншого (2 варіанти), разом тут маємо 6 варіантів. Загалом на поле можуть вийти $3 + 1 + 6 = 10$ гравців.

8. Петрик розвозить між трьома готелями свою продукцію. В понеділок він поїхав з готелю "Карпати" в готель "Дніпро", а далі в готель "Таврида", проїхавши загалом 1335 км. Наступного дня у вівторок він виїхав з готелю "Таврида" в готель "Карпати", а далі в готель "Дніпро", проїхавши загалом 1513 км. В середу він поїхав з готелю "Дніпро" в готель "Таврида", а далі в готель "Карпати", проїхавши загалом 1424 км. В четвер він здійснив кільцевий маршрут від готелю "Карпати" в готель "Дніпро", далі в готель "Таврида", і повернувся в готель "Карпати". Відомо, що усі свої переїзди він робив з однаковою швидкістю і дорога кожного дня займала цілу кількість годин.

За який час Петрик здійснив останній кільцевий маршрут?

Відповідь: 24.
Розв'язання. Розкладемо задані відстані на множники: $1335 = 3 \cdot 5 \cdot 89$, $1513 = 17 \cdot 89$ та $1424 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 89$. Таким чином, найбільша можлива швидкість Петрика складала 89 км/год. Інакше бути не може, бо тоді дорога б займала не цілу кількість годин. Таким чином його подорожі тривали 15, 17 та 16 годин. Тому кільцевий маршрут він мав зробити за $\frac{1}{2} \cdot (15 + 17 + 16) = 24$ год., бо сума трьох маршрутів як раз подвійне проходження кожного з трьох відстаней між готелями. Якщо швидкість була б 1 км/год, то він просто не встиг би за один день проїхати весь шлях.

7 клас

1. У компанію запросили 21 дитину, що народилися відповідно 1 січня 2000 року, 1 січня 2001 року, …, 1 січня 2020 року. Скільком з них 1 січня 2021 року виповнилося стільки років, яка сума цифр їх року народження?

Відповідь: 1.
Розв'язання. У того, хто народився у 2000 році – вік 21 рік, а сума цифр року народження – 2. До дитини, що народилася у 2009 вік спадає до 12 років, а сума цифр року народження зростає до 11, тобто серед них шуканих дітей немає. Аналогічно розглянемо тих, хто народився від 2010 до 2019 років. У них вік спадає від 11 до 2 років, а сума цифр року народження від 3 до 12. Таким чином там може бути не більше 1 такої дитини. Це той, хто народився у 2014 році – сума цифр року народження та його вік дорівнює 7 . Очевидно, що остання дитина, що народилася у 2020 році умові не задовольняє.

2. Градусні величини кутів α та β відносяться як $5:4$. А про суміжні до них кути відомо, що один з них удвічі більший за інший. Знайдіть градусні міри кутів α та β та у відповіді запишіть значення в градусах кута α.

***Відповідь*:** 150.
Розв'язання. Нехай $\alpha = 5x$, тоді $\beta = 4x$. Тоді зрозуміло, що $180° - \beta > 180° - \alpha$. Тому $180° - 4x = 2 \cdot (180° - 5x)$. Таким чином $6x = 180°$. Звідси $x = 30°$ і кути дорівнюють відповідно $150°$ та $120°$.

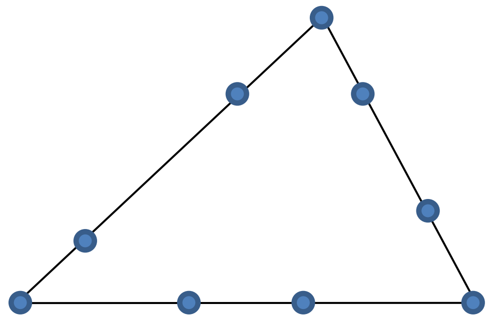
3. На потоці прикладної математики серед студентів відношення дівчат до хлопців було як $2:3$. Після того, як за неуспішність відрахували 4 двійочників, відношення дівчат до хлопців стало $3:4$. Скільки дівчат могло навчатися до відрахування, якщо відомо, що усіх студентів було на початку не менше 50? Вкажіть усі можливі варіанти.

Відповідь: 24.
Розв'язання. Нехай з самого початку навчалися $2x$ дівчат та $3x$ хлопців. Вигнали a дівчат та $4 - a$ хлопців і тоді стала справджуватися така рівність: $\frac{2x-a}{3x-4+a} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8x - 4a = 9x - 12 + 3a \Rightarrow x + 7a = 12$. Таким чином для a є дві можливості: $a = 0 \Rightarrow x = 12$, або $a = 1 \Rightarrow x = 5$. Тобто загалом було студентів $5x$, що може дорівнювати або 60, або 25. Оскільки друга можливість суперечить умові задачі, то залишається випадок $x = 12$ і дівчат було $2x = 24$.

4. Є 100 однакових шкатулок, що розташовані в ряд, у одній з яких знаходиться діамант. На кожній шкатулці зроблений надпис: «Діамант лежить у сусідній шкатулці». Відомо, що рівно один надпис зі 100 правдивий, а решта – неправдиві. Скільки щонайменше треба відкрити шкатулок, щоб гарантовано знайти шкатулку з діамантом?

<u>Відповідь:</u> 1.
<u>Розв'язання</u>. Якщо діамант лежить не в крайній шкатулці, то на 2-х з них є правдивий надпис. Як висновок, він може лежати в одній з крайніх шкатулок. Беремо будь-яку з них. Якщо діамант у ній, задача розв'язана, якщо не в ній, то він гарантовано знаходиться в іншій крайній шкатулці.

5. На рис. 2 задано 9 точок на сторонах трикутника. Ми хочемо вибрати 3 з 9 точок, які не знаходяться на одній прямій. Наприклад, ми можемо вибрати три вершини трикутника або ліву вершину і дві додаткові точки на протилежній стороні тощо. Скільки всього можливих варіантів вибору таких 3-х точок, включаючи два наведені приклади?



<u>Рис. 2</u>

<u>Відповідь:</u> 72.
<u>Розв'язання</u>. Усього варіантів вибрати 3 точки з 9 – це

$$C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84.$$

Порахуємо тепер випадки, коли усі обрані точки розташовані на одній прямій. оскільки ці точки мають лежати на одній із сторін трикутника, а вона рівноправні при таких підрахунках, то усього таких випадків: $3 \cdot 4 = 12$. Звідси шукана кількість варіантів $84 - 12 = 72$.

6. Нехай $s(n)$ – сума цифр натурального числа n. Знайдіть усі такі числа n, для яких справджується принаймні одна з двох рівностей: $n + s(n) = 27$ або $n - s(n) = 27$. У відповіді запишіть суму усіх можливих значень n.

<u>Відповідь:</u> 363.
<u>Розв'язання</u>. Нехай $n + s(n) = 27$. Тоді $n < 27 \Rightarrow s(n) \leq 10 \Rightarrow n \geq 17$. Далі просто розуміємо, що для таких груп чисел $n = 17,18,19$ та $n = 20,21,\ldots,26$ вираз $n + s(n)$ зростає, тому там може бути максимум по одному розв'язку. Число $n = 18$ – задовольняє умову, а для чисел іншої групи - сума парна.

Нехай тепер $n - s(n) = 27$, то $n > 27$. Зрозуміло, що при $n = \overline{k0}, \overline{k1}, \ldots, \overline{k9}$ вираз $n - s(n)$ не змінюється, бо $n - s(n) = 10k + l - k - l = 9k$. Таким чином $n - s(n) = 9k = 27$ при $k = 3$, тобто розв'язками будуть числа $30,31,\ldots,39$.

Залишається знайти значення суми: $30 + 31 + \ldots + 39 + 18 = 363$.

7. У чемпіонаті Трипілля з тріанону зібралося n учасників, з яких було рівно 3 дівчини. У кожній грі в тріанон грають рівно 3 учасники. У першій грі грали 3 дівчини. В кожній наступній грі обов'язково брала участь принаймні одна з них. Виявилося, що були зіграні усі заплановані розкладом ігри, при цьому кожні два учасники (хлопці чи дівчата) один з одним грали рівно у одній грі. Для якого найбільшого значення n це було можливо?

<u>Відповідь:</u> 7.
<u>Розв'язання</u>. Нехай хлопців було не менше 5. Тоді обов'язково були б ігри, в яких грали такі пари $1 - 2$, $1 - 3$, $1 - 4$ та $1 - 5$. Третім гравцем в кожній грі мала бути одна з 3-х дівчат, але тоді одна з них мала брати участь принаймні у двох з цих 4-х ігор, а тому мала двічі зіграти з гравцем 1, що суперечить умові.
Для 4 учасників хлопців такий турнір міг відбутися. Наведемо розклад ігор.

$$1 - 2 - d1, 1 - 3 - d2, 1 - 4 - d3, 2 - 3 - d3, 2 - 4 - d2, 3 - 4 - d1.$$

8. Після сніданку сестри Анна та Біргіт відправляються кожна до своєї школи. Їхній будинок розташований поруч із велосипедною доріжкою, що проходить між двома школами. Анна їде на велосипеді з постійною швидкістю 12 км на годину, а Біргіт йде у протилежному напрямку з постійною швидкістю 4 км на годину. Вони починають рух одночасно. Незабаром після їхнього виходу мама бачить, що дівчата забули обід і вирішує піти за ними. Рівно через 10 хвилин після від'їзду Анни та Біргіт мама від'їжджає на своєму електрокарі. Спочатку вона наздоганяє Анну. Вона дає їй ланч-бокс, миттєво повертається і їде за Біргіт. Коли вона наздоганяє Біргіт, вона дає їй коробку з обідом і негайно повертається додому. Мама завжди їде з постійною швидкістю 24 км на годину. Через скільки хвилин після відходу Анни і Біргіт мама повертається додому?

<u>Відповідь:</u> 42.

<u>Розв'язання</u>. Поки мама вирішила їхати пройшло $t_0 = 10$ хв, або $\frac{1}{6}$ год. Анна пройшла $S_0 = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$ км.

Час t_1, коли мама наздожене Анну, задовольняє рівняння:

$$12t_1 + 2 = 24t_1 \;\Rightarrow\; t_1 = \frac{1}{6}.$$

За цей час $t_0 + t_1 = \frac{1}{3}$ мама віддалилася від будинку на відстань $S_1 = S_0 + 12 \cdot t_1 = 4$, а Брігіт – на відстань $S_2 = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

Час t_2, коли мама наздожене Брігіт, задовольняє рівняння:

$$4t_2 + 4 + \frac{4}{3} = 24t_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{4}{15}.$$

За цей Брігіт віддалилася від будинку на відстань $S_3 = \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{4}{15} = \frac{12}{5}$.

Час t_3, коли мама повернеться додому після зустрічі з Брігіт, знаходиться як

$$t_3 = \frac{12}{5} : 24 = \frac{1}{10}.$$

Весь час, що минув після виходу дівчат до школи до повернення мами додому, дорівнює:

Час t_2, коли мама наздожене Брігіт, задовольняє рівняння:

$$t_4 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10} \text{ год} = 42 \text{ хв}.$$

<u>8 клас</u>

1. Пес Шарік та Кіт Матроскін надоїли 10 літрів молока, розлили його по двох відрах та понесли додому. Шарік втомився і перелив частину молока зі свого відра у відро Матроскіна. Від такого переливання у Шаріка молока стало у 3 рази менше, ніж було, а у Матроскіна – у 3 рази більше, ніж було. Скільки мілілітрів молока стало у Матроскіна?

<u>Відповідь:</u> 7500.

<u>Розв'язання</u>. Нехай Шарік, перед тим, як перелити молоко Матроскіну, переллє його в окремий бідон. За умовою, якщо додати це молоко або Шаріку, або Матроскіну, то в кожного молока стане у 3 рази більше. Тому на зараз у Шаріка та Матроскіна молока порівну, а в бідоні молока у 2 рази більше, ніж у кожного з них. Таким чином, в бідоні зараз половина усього молока, тобто 5 літрів, а у Шаріка та Матроскіна – по $2,5$ літрів. Тому наприкінці у Матроскіна стане $2,5 + 5 = 7,5$ літрів, або 7500 мілілітрів.

2. За весь чемпіонат з футболу 10 польових гравців «Динамо» забили разом 60 голів, при цьому кожний з них забив принаймні 1 гол і жодні два гравці не забили однакову кількість голів. Відомо, що Родригес забив 5 голів, а Беседин – 10. За таких умов яку максимальну кількість голів міг забити Сидорчук?

Відповідь: 14.

Розв'язання. Усі інші гравці мали забити найменшу кількість голів з 60 командних. Таким чином гравці мали забивати таку кількість голів: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 31$ гол. Родригес та Беседин забили разом 15 голів. Тобто максимум Сидорчук міг забити $60 - 46 = 14$ голів.

3. Скільки існує трикутників, у яких довжини усіх трьох сторін є цілими числами і дві із сторін яких мають довжини 3 та 2023?

Відповідь: 5.

Розв'язання. Позначимо сторони можливих трикутників $a = 3$, $b =$2023 та c. Тоді $a + c > b$ та $a + b > c$. Звідси $2020 < c < 2026$. Таким чином можливих значень для натурального числа c усього п'ять: 2021; 2022; 2023; 2024; 2025.

4. Скільки існує трійок натуральних чисел (a, b, c), що задовольняють умови:

$$2 \le a \le b \le c \text{ та } abc = 2021 \cdot 2022?$$

Відповідь: 25.

Розв'язання. Розкладемо на множники числа $2021 = 43 \cdot 47$ та $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Таким чином нам треба ці 5 множників поділити на 3 групи, та порахувати кількість таких поділів, що відрізняються. Для кожного такого поділу числа однозначно упорядковуються і відповідають одній шуканій трійці чисел. Таким чином рахуємо варіанти.

Якщо поділ на числа буде $3 - 1 - 1$, то таких варіантів 10.

Якщо поділ $2 - 2 - 1$, то таких варіантів $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15$.

Разом маємо $10 + 15 = 25$.

5. Точки A, B, C, D лежать на прямій у вказаному порядку. Поза цією прямою існує така точка T, для якої $AB = BT$ та $CD = CT$. Крім того $\angle BTC = 54°$ (рис. 3). Знайдіть у градусах $\angle ATD$.

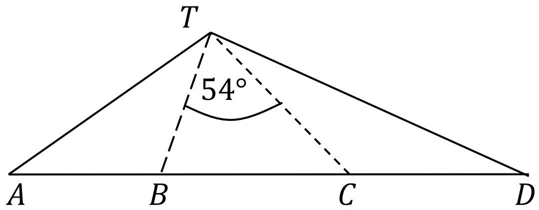


Рис. 3

Відповідь: 117°.

Розв'язання. Позначимо $\angle ATB = \angle BAT = \alpha$, $\angle CTD = \angle CDT = \beta$, тоді з суми кутів ΔATD маємо, що

$$2\alpha + 2\beta + 54° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 63°$$

$$\angle ATD = \alpha + \beta + 54° = 117°.$$

6. Маємо прямокутник 5×8, кожна комірка 1×1 якого пофарбована у білий колір. На кожному кроці можна вибрати довільний прямокутник з трьох клітин та перефарбувати усі його комірки в протилежний колір: білі – у чорний, чорні – у білий. Яка найбільша кількість чорних клітин може бути у прямокутника у деякий момент і за яку найменшу кількість ходів можна досягнути такої позиції? У відповіді запишіть суму цих двох чисел.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Рис. 4

Відповідь: 52.

Розв'язання. Помітимо усі клітини таблиці, як це показано на рис. 4 у три позначки. Виявилося, що клітинок з позначкою 2 тут 14. А з іншими двома позначками – по 13. Очевидно, що при вказаному перефарбуванні зміниться колір по одній комірці кожної з трьох позначок. Таким чином парність кількості чорних клітин з кожною позначкою однакова після кожного ходу. Отже зробити усі поля чорними не вдасться. Покажемо, що чорними можуть стати усі, окрім однієї, тобто шуканий максимум 39. Зрозуміло, що того можна досягнути

найменше за 13 ходів, які показані на рис. 5.
Таким чином у відповідь слід записати число $39 + 13 = 52$.

1	1	1	7	13	8	8	8
2	2	2	7	13	9	9	9
3	4		7	13	10	10	10
3	4	6	6	6	11	11	11
3	4	5	5	5	12	12	12

Рис. 5

7. Відомо, що $x - y = 12$. Знайдіть значення виразу $x^3 - y^3 - 36xy$.

Відповідь: 1728.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення:
$$x^3 - y^3 - 36xy = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 36xy = 12(x^2+xy+y^2) - 36xy =$$
$$= 12x^2 - 24xy + 12y^2 = 12(x-y)^2 = 12^3 = 1728.$$

8. Натуральне число називається *повним*, якщо воно є дев'ятицифровим та містить кожну з цифр від 1 до 9. *Різницевим числом* для числа N є число, яке ви отримаєте таким чином: перша його цифра це різниця між 1-ю та 2-ю цифрами числа N, друга його цифра це різниця між 2-ю та 3-ю цифрами числа N, і так далі (завжди від більшої цифри віднімається менша). Наприклад, різницевим числом для числа 25143 є 3431. Повне число 124356879 має різницеве число 12121212, що складається з двох цифр 1 та 2, які йдуть по черзі. Знайдіть усі такі цифри a, $3 \le a \le 9$, для яких існує повне число N з тією властивістю, що його різницеве число має вигляд $\overline{1a1a1a1a}$. У відповіді запишіть суму усіх можливих значень цифри a.

Відповідь: 9.
Розв'язання. Для $a = 4$ прикладом такого числа є 126734895.
Для $a = 5$ прикладом такого числа є 549832761.
Покажемо, що для інших значень a повних чисел не існує. Для $a \ge 6$ це випливає з таких міркувань. Для цифр $4, 5, 6$ немає цифри, яка б відрізнялася від цієї цифри на a. Оскільки різницеве число повного числа N дорівнює $1a1a1a1a$, кожна цифра N, крім першої, повинна стояти поруч з цифрою, яка відрізняється від неї на a. Отже, цифри $4, 5, 6$ можуть зустрічатися тільки в першій позиції N, що неможливо.
Для $a = 3$ аргумент інший. Якщо ми розглянемо цифри, що відрізняються на 3, то ми маємо три трійки $1 - 4 - 7$, $2 - 5 - 8$ та $3 - 6 - 9$. Якщо поруч стоять, наприклад, 1 та 4, то 7 може бути першою цифрою N. Так само для інших пар сусідніх цифр з цієї трійки. Але аналогічно має справджуватися і для двох інших трійок чисел, тобто на першій позиції має бути одночасно три числа. Одержана суперечність завершує доведення.

9 клас

1. У рівності $\text{ФОП} + \text{ТОП} = 8 \cdot \text{КОП}$ різним буквам відповідають різні цифри, однаковим – однакові. Чому може дорівнювати сума *ФОП + ТОП*?

Відповідь: 1200.
Розв'язання. З умов задачі можемо записати, що $100f + 100t + 2\overline{op} = 800k + 8\overline{op} \Rightarrow 100(f + t - 8k) = 6\overline{op}$. Звідси $\overline{op} \vdots 50$, крім того $\overline{op} \le 50$, бо $6\overline{op} < 600$, тому $\overline{op} = 50$ та $f + t - 8k = 3$. Звідси $k < 2$, бо інакше $f + t \ge 19$ – суперечність, тому $k = 1$. Таким чином $800k + 8\overline{op} = 800 + 400 = 1200$.

2. З міста A у місто D, відстань між якими 100 км, виїхав автомобіль. Дорога від A до D проходить через міста B та C. До міста B автомобіль їхав зі сталою швидкістю і у місті B навігатор показав, що їхати до міста D лишилося 30 хв. Автомобіль зменшив швидкість на 10 км/год. У місті C навігатор показав, що їхати лишилося 20 км, автомобіль одразу вдруге знизив швидкість ще на 10 км/год. Знайдіть початкову швидкість автомобіля у км/год, якщо відомо, що на шлях від B до C він витратив на 5 хв більше часу, ніж на шлях від C до D.

Відповідь: 100 км/год.

Розв'язання. Позначимо $AB = x$, $BC = 80 - x$, $CD = 20$. Швидкості на кожному з цих проміжків дорівнюють відповідно v, $v - 10$, $v - 20$. Запишемо умови у вигляді рівнянь.

$100 - x = \frac{1}{2}v$, співвідношення з показань навігатора на ділянці BD.

$\frac{80-x}{v-10} - \frac{20}{v-20} = \frac{1}{12}$, час на ділянці BC на 5 хв довший ніж на ділянці CD.

Звідси маємо, що $\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10} - \frac{20}{v-20} = \frac{1}{12} \Rightarrow v_1 = 14$, $v_2 = 100$. Очевидно, що перший корінь сторонній, а другий дає шукану відповідь.

3. В турнірі з шахів брали участь 5 гравців. Кожні два гравці зіграли між собою рівно 1 раз. За перемогу нараховувалося 1 очко, за поразку – 0 очок, в разі нічиєї обом гравцям давали по $\frac{1}{2}$ очка. Відомо, що рівно половина партій завершилася внічию, а шахіст, що посів останнє місце, програв усі партії. Скільки очок набрав гравець, що посів 4 місце? У відповіді запишіть шукане значення помножене на 10.

Відповідь: 20.

Розв'язання. Усього партій було $\frac{5\cdot4}{2} = 10$, з них 5 завершилися внічию. Оскільки останній програв усі 4 партії, то між собою перші четверо зіграли внічию усі партії, окрім однієї. Переможець цієї партії виграв змагання, а той, хто програв ставав у підсумку 4-м. Тому він і набрав 2 очки – перемога над останнім та дві нічиї.

4. Для шахівниці 8×8, що складається з квадратиків 1×1, порахуйте кількість прямокутників зі сторонами, що проходять вздовж сторін квадратиків 1×1 та не виходять за межі заданого квадрату.

Відповідь: 1296.

Розв'язання. Порахуємо прямокутники таким чином. Спочатку розглянемо прямокутник $a \times b$, де a – кількість клітин по горизонталі (ширина), а b – кількість клітин по вертикалі (висота). Порахуємо кількість прямокутників з шириною k, $1 \le k \le 8$. Такі прямокутники можуть займати одне з $9 - k$ можливих положень, наприклад, для ширини 3 (рис. 6) існує 6 різних варіантів.

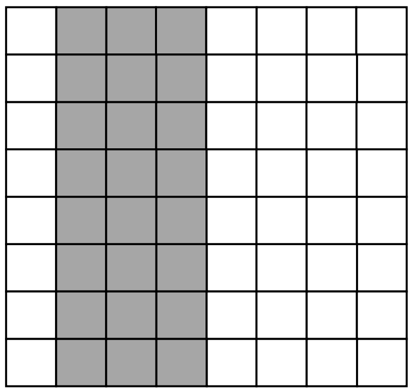


Рис. 6

Для кожного з таких варіантів, тобто ширина k, розглядаємо прямокутники висоти m, $1 \le m \le 8$. Таких варіантів усього $9 - m$. Остаточно маємо, для прямокутників висоти 1 маємо 8 варіантів, для висоти 2 маємо 7 варіантів, …, для висоти 8 маємо 1 варіант. Разом $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$.

При цьому, для ширини 1 маємо 8 варіантів, для ширини 2 маємо 7 варіантів, …, для ширини 8 маємо 1 варіант. Разом $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$.

Якщо поєднати – разом матимемо усього $36 \cdot 36 = 1296$ прямокутників.

5. Натуральне число $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $n \ge 2$ називається *яскравим*, якщо для нього справджується така умова:

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = a_1 a_2 \ldots a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Знайдіть усі яскраві числа. У відповіді запишіть суму усіх яскравих чисел.

Відповідь: 531.

Розв'язання. Для $n = 2$ маємо, що $\overline{a_1 a_2} = 10a_1 + a_2 = a_1 a_2 + a_1 + a_2 \Rightarrow 9a_1 = a_1 a_2$ і яскравими є усі двоцифрові числа, що закінчуються на 9.

Для $n \geq 3$ покажемо, що $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} > a_1 a_2 \ldots a_n + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, що рівносильне такому:

$$a_1 a_2 \ldots a_n < a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 9.$$

Зробимо такі оцінки

$$a_1 a_2 \ldots a_n < a_1 \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}_{n-1} < a_1 \cdot 9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n-2} = a_1 \cdot 9\underbrace{00\ldots0}_{n-2} < a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} <$$
$$< a_1 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-1} + a_2 \cdot \underbrace{99\ldots9}_{n-2} + \ldots + a_{n-1} \cdot 9,$$

що й треба було довести.

Залишається обчислити суму:

$$19 + 29 + \cdots + 99 = 531$$

6. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з вершиною у точці A вибрана точка P, для якої справджуються умови: $\angle BCP = 30°$, $\angle APB = 150°$ та $\angle CAP = 39°$. Знайдіть у градусах величину $\angle BAP$.

Відповідь: 13°.

Розв'язання. Нехай точка D – центр описаного кола ΔBCP (рис. 7). Тоді $\angle BDP = 2\angle PCB = 60°$ та $BD = DP$, звідки ΔBDP – рівносторонній. Тоді

$$\angle APD = 360° - 150° - 60° = 150° = \angle APB.$$

Але тоді за стороною та двома прилеглими кутами $\Delta APD = \Delta APB$. Таким чином $AD = AB = AC$ та оскільки $DB = DC$, то $\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow \angle BAP = \frac{1}{3}\angle PAC = 13°$.

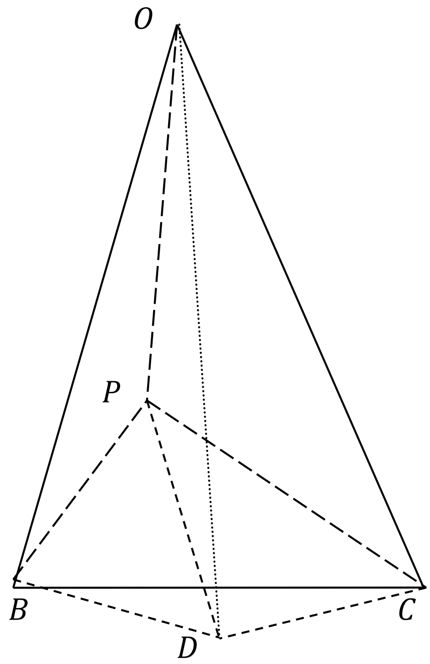


Рис. 7

7. Числа 1, 2, 3, …, 3000 рівномірно записані по колу у деякому порядку так, що вони парами стоять одне напроти іншого. Відомо, що для кожного числа n серед 1499 чисел, які йдуть одразу за ним за рухом годинникової стрілки та серед 1499 чисел, які йдуть одразу за ним проти руху годинникової стрілки однакова кількість чисел, що менші за n. Яке число стоїть напроти числа 2023?

Відповідь: 2024.

Розв'язання. Розглянемо парне число $2k$. Тоді чисел, що його менші, непарна кількість, а саме $2k - 1$, тому напроти нього обов'язково стоїть число, яке його менше. Далі зрозуміло, що напроти числа 2 за таких умов може бути лише число 1, за цих обставин напроти числа 4 має бути число 3 і т.д., числа розбиваються на пари $2k - 1$ та $2k$, що стоять напроти одне одного.

8. Для цілого числа $n \geq 3$ розглянемо n точок на колі. Біля кожної точки записується натуральне число, і ці числа не обов'язково мають бути різними. Розстановка чисел називається *стабільною*, якщо добуток будь-яких трьох сусідніх цілих чисел дорівнює n. Для скількох значень n таких, що $3 \leq n \leq 2023$ існує стабільна розстановка чисел по колу?

Відповідь: 681.

Розв'язання. Припустимо, що n не кратне 3, і що ми маємо стабільне розташування чисел a_1, a_2, …, a_n у такому порядку на колі. Тоді маємо $a_i a_{i+1} a_{i+2} = n$ для всіх i, де індекси розглядаються за модулем n. Тоді $a_i a_{i+1} a_{i+2} = n = a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} \Rightarrow a_i = a_{i+3}$. Якщо з цієї рівності виписати усі рівні значення, то вийде, що усі числа на колі рівні. А тому $n = k^3$.

Якщо n не кратне 3, то розглянемо таку розстановку чисел: $1, 1, n, 1, 1, n, \ldots$, очевидно, що вона стабільна У цьому випадку добуток трьох сусідніх чисел завжди дорівнює n.

Тепер маємо підрахувати кількість таких n. Чисел, що кратні 3, тобто чисел $3, 6, 9, \ldots$, усього $\left[\frac{2023}{3}\right] = 674$. Кубів є там 2^3, 3^3, …, 12^3, з яких 4 кратні 3 (тобто вже враховані в попередньому списку), тому нових чисел з кубів додається 7. Таким чином усього чисел $674 + 7 = 681$.

10 клас

1. Чотири попарно різних числа A, B, C, D у добутку дають число 2709. Яке значення може приймати різниця між максимальним можливим значенням суми $A + B + C + D$ та мінімальним значенням?

Відповідь: 80.

Розв'язання. Нехай $A < B < C < D$. Оскільки $2709 = 3^2 \cdot 7 \cdot 43$, то можливі варіанти для (A, B, C, D) – це $(1, 7, 9, 43)$, $(1, 3, 21, 43)$ та $(1, 3, 7, 129)$. Звідки вже простим підбором знаходимо найбільше значення 140 найменше – це 60, звідки й знаходимо шукану відповідь.

2. Розв'яжіть ребус ВГДЕ $\cdot$ АБ $=$ БААББА, де різним буквам відповідають різні цифри. У відповіді треба вказати число ВГДЕ.

Відповідь: 5169.

Розв'язання. Число БААББА ділиться націло на АБ, а тому на АБ має ділитися також число

$$\text{БА00БА} = \text{БА} \cdot 10001 = \text{БА} \cdot 73 \cdot 137 = \text{АБ} \cdot \text{XXXX},$$

де XXXX – чотирицифрове число. Оскільки $73 \cdot 137 = 10001 >$ XXXX, то один з цих простих дільників є дільником АБ. Звідси очевидно, що єдиною можливістю є АБ $= 73$. Далі легко знаходимо інші шукані числа: БААББА $= 377337$, ВГДЕ $=$ БААББА: АБ $= 5169$.

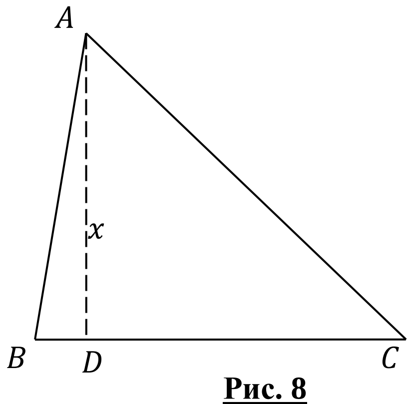


Рис. 8

3. У трикутнику ABC відомо, що $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{22}{7}$ та висота AD поділяє сторону BC на відрізки довжиною 3 та 17. Знайдіть площу ΔABC.

Відповідь: 110.

Розв'язання. Позначимо довжину проведеної висоти через x (рис. 8), тоді умови можна записати таким чином:

$$\frac{22}{7} = \operatorname{tg} \angle CAB = \frac{tg\ \angle DAB + \operatorname{tg} \angle CAD}{1 + \operatorname{tg} \angle DAB \cdot \operatorname{tg} \angle CAD} = \frac{\frac{3}{x} + \frac{17}{x}}{1 - \frac{3}{x} \cdot \frac{17}{x}} = \frac{20x}{x^2 - 51} \Rightarrow x = 11 \Rightarrow S(ABC) = 110.$$

4. У таблиці 2×5 (2 рядки та 5 стовпчиків) кожен із квадратиків 1×1 фарбується у чорний або білий колір відповідно до таких правил:

- два сусідні стовпці ніколи не можуть мати однакову кількість чорних квадратиків;
- два квадрати 2×2, які мають спільний стовпчик, не можуть мати однакову кількість чорних квадратиків.

Скількома способами можна зафарбувати таблицю за таких умов?

Відповідь: 20.

Розв'язання. З умов задачі випливає, що кожні 3 сусідні стовпчики мають мати різні кількості чорних клітин, яких може бути 0, 1 або 2. Так і називатимемо ці стовпчики за кількістю чорних клітин. Тоді можливі такі варіанти, при цьому стовпчик 1 має завжди 2 можливих варіанти. Тепер просто перелічимо варіанти та кількість їх варіацій, що дорівнює 2, якщо містить один 1 стовпчик, та дорівнює 4, якщо там таких стовпчиків 2:

$$01201\ (4), 02102\ (2), 10210\ (4), 12012\ (4), 20120\ (2), 21021\ (4).$$

Таким чином разом – 20 варіантів.

5. Число A має рівно 4 дільники, а число B – п'ять дільників (з урахуванням 1 та самого числа). Скільки дільників може мати число AB? У відповіді вкажіть суму усіх можливих значень кількості дільників добутку AB.

Відповідь: 60.

Розв'язання. Скористаємось відомим твердженням: число n з таким розкладом на прості множники $n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ має рівно $(k_1 + 1) \dots (k_m + 1)$ дільників. Таким чином $B = q^4$. Для числа A є два варіанти.

Випадок 1. $A = p^3$.

Якщо $p = q$, то $AB = p^7$ і добуток має 8 дільників.

Якщо $p \neq q$, то $AB = p^3 q^4$ і добуток має $(3 + 1)(4 + 1) = 20$ дільників.

Випадок 2. $A = pr$.

Якщо $p = q$ (або $p = r$), то $AB = p^5 r$ і добуток має $(5 + 1)(1 + 1) = 12$ дільників.

Якщо $p, r \neq q$, то $AB = prq^4$ і добуток має $(1 + 1)(1 + 1)(4 + 1) = 20$ дільників.

6. Для скількох натуральних $n \leq 2023$ існує многочлен $P(x)$, для якого справджується рівність: $x^{2n} + x^n + 1 = P(x)(x^2 + x + 1)$?

Відповідь: 1349.

Розв'язання. Оскільки $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, то $x^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 1$. Таким чином тепер розглянемо такі випадки.

$n = 3k$:

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k} - 1 + (x^3)^k - 1 + 3 = P(x)(x^2 + x + 1) + 3$$

не може ділиться на $x^2 + x + 1$.

$n = 3k + 1$:

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k} x^2 + (x^3)^k x + 1 = ((x^3)^{2k} - 1)x^2 + x^2 + ((x^3)^k - 1)x + x + 1$$

ділиться на $x^2 + x + 1$.

$n = 3k + 2$:

$$x^{2n} + x^n + 1 = (x^3)^{2k} x^4 + (x^3)^k x^2 + 1 = ((x^3)^{2k} - 1)x^4 + x^4 + ((x^3)^k - 1)x^2 + x^2 + 1$$

ділиться на $x^2 + x + 1$, оскільки $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Таким чином умову задовольняють $n \neq 3k$. Оскільки чисел, що кратні 3 та не перевищують 2023 рівно $2022 : 3 = 674$, то шукана кількість $2023 - 674 = 1349$.

7. Два кола c_1 та c_2 мають радіуси 1 та не перетинаються. Вони розташовані всередині кута з вершиною в точці O таким чином, що коло c_1 дотикається однієї сторони кута, коло c_2 -- іншої сторони кута, і одна спільна внутрішня дотична кіл c_1 та c_2 проходить через точку O. Друга спільна дотична цих кіл перетинає сторони кута в точках A та B, при цьому $OA = OB$. Знайдіть відстань від точки A до прямої OB.

Відповідь: 4.

Розв'язання. Нехай внутрішні дотичні цих кіл перетинаються в точці P (рис. 9). Тоді ці дві спільні дотичні поділяють площину на чотири частини, нехай c_1 лежить по той самий бік від OP, що й точка A. Тоді c_1 -- вписане коло ΔAOP, а c_2 -- зовні вписане коло ΔBOP, що відповідає вершині O. Скористаємося формулою площі трикутника через однакові радіуси кіл, які для зручності позначимо через r.

$$2S_{AOP} = (AO + OP + PA) \cdot r,\ 2S_{BOP} = (BO + OP - BP) \cdot r.$$

Звідси маємо, що

$$2S_{AOB} = 2S_{AOP} + 2S_{POB} = (2BO + 2OP + PA - BP) \cdot r.$$

Враховуючи рівність дотичних, що проведені з точки до кола, а також рівність кіл, неважко показати, що вираз в дужках дорівнює $4OB$. Крім того, оскільки $PT_1 = PT_2 = PU_1 = PU_2$, тому:

$$2OP = OT_1 + OU_1 = OT_3 + OU_3 = (OA - AT_3) + (OB + BU_3) =$$
$$= (OA - AT_2) + (OB + BU_2) = 2BO - (AT_2 - BU_2) = 2BO - (AP - BP).$$

Тому $2OP + AP - BP = 2BO$ звідки й випливає вказана рівність.
Позначимо шукану в умові відстань через d, тоді це є висотою до бічної сторони рівнобедреного ΔAOB. Таким чином $2S_{AOB} = OB \cdot d \Rightarrow d = 4r = 4$.

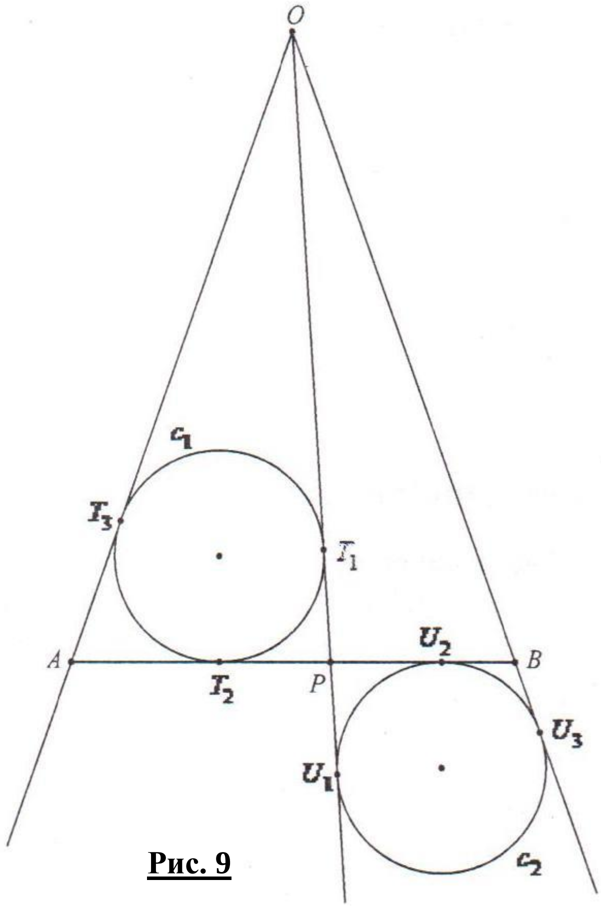


Рис. 9

8. Рейтинг кожного з 20 тенісистів задається натуральним числом від 1 до 20, у кожних двох спортсменів рейтинги різні. Тенісисти поділені на дві команди по 10 спортсменів так, що суми рейтингів у обох команд рівні. Команди грають одна проти одної матч із 100 зустрічей, в якому кожний тенісист однієї команди грає 1 гру проти кожного гравця з іншої команди. У зустрічі завжди перемагає тенісист з більшим рейтингом і за перемогу отримує 1 очко. Яку найбільшу кількість очок може набрати одна з команд?

Відповідь: 50.
Розв'язання. Нехай додатково тенісисти з однієї команди зіграють один з одним, і отримаємо повний турнір в одне коло. У додаткових іграх команди отримають рівну кількість очок. Покажемо, що й у повному турнірі обидві команди наберуть однакову кількість очок. Дійсно, кожний гравець з рейтингом k набирає $k - 1$ очко. Таким чином кожна з команд набере стільки очок, як рейтинг в команди зменшений на 10. Оскільки рейтинги команд були рівні, то й очок вони наберуть однакову кількість, тобто по 50 – половину від загальної кількості очок.

11 клас

1. Скільки дев'ятицифрових чисел вигляду $\overline{abcabcabc}$ діляться на 99?

Відповідь: 27 чисел.
Розв'язання. Оскільки число $\overline{abcabcabc} = \overline{abc} \cdot 1001001$ та при цьому 1001001 ділиться на 3, але не ділиться ні на просте число 11, ні на 9. Тому 33 повинно ділити число $\overline{abc}$. Усього таких чисел, що кратні 33 та менші 1000, є рівно 30, але трицифрових серед них 27, бо не враховуємо числа 33, 66 та 99.

2. У виразі $\frac{\text{АБ}+\text{ВГ}+\text{ДЕ}}{\text{КЛ}-\text{МН}}$ використані 5 двоцифрових чисел, при цьому різним буквам відповідають різні цифри. Яке найбільше значення може приймати цей вираз?

Відповідь: 222.
Розв'язання. Розглянемо випадок, коли в знаменнику різниця дорівнює 1. Найменші двоцифрові числа, що можуть задовольняти умови, це $20 - 19 = 1$. Тоді з інших цифр утворимо найбільші в сумі числа, зрозуміло, що одним з таких варіантів буде такий: $83 + 74 + 65 = 222$. Покажемо, що це найбільше можливе значення.
Сума трьох двоцифрових чисел максимальна для таких чисел: $96 + 85 + 74 = 255$. Але з решти цифр не можна утворити знаменник, що дорівнює 1. Звідси зрозуміло, що для максимальної

відповіді у знаменнику має бути число 1, бо інакше більше $\frac{255}{2}$ не отримати. Залишається перебрати усі пари, для яких різниця може дорівнювати 1. Очевидно, що одне з них має закінчуватися на 9, а тому наведений приклад шуканий. Інакше групи цифр, що лишилися, будуть утворювати меншу суму двоцифрових чисел, що лишилися.

3. П'ять кіл розташовані таким чином, як це показано на рис. 10. Відомо, що радіус найбільшого зовнішнього кола дорівнює $R = 999$. Знайдіть радіуси двох найменших кіл.

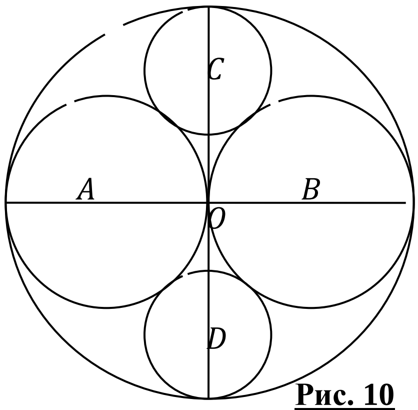


Рис. 10

***Відповідь*:** 333.

***Розв'язання*.** Позначимо центр зовнішнього кола через O, центри середніх кіл через A, B, а центри найменших кіл через C, D. Розглянемо тепер ΔABC (рис. 11).

З властивостей кіл, що дотикаються очевидні такі довжини сторін: $AB = R, BC = \frac{1}{2}R + r, CO = R - r$, де через r позначений шуканий радіус найменшого кола. Очевидно, що радіус середніх кіл дорівнює $\frac{1}{2}R$. Далі використаємо теорему Піфагора для ΔAOC:

$$(R - r)^2 + \frac{1}{4}R^2 = (\frac{1}{2}R + r)^2 \Leftrightarrow R^2 - 2Rr = Rr.$$

Звідси $r = \frac{1}{3}R = 333$.

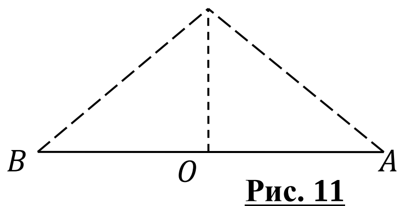


Рис. 11

4. Назвемо натуральне число *цікавим*, якщо сума його цифр, збільшена на 1, є дільником цього числа. Яка найбільша кількість цікавих чисел може йти поспіль?

Відповідь: 2.

***Розв'язання*.** Припустимо, що 3 цікавих числа йдуть поспіль. Тоді серед них є число n, що дає остачу 2 при діленні на 3. Тоді сума його цифр s також має остачу 2 при діленні на 3. За умовою n має ділитися націло на $s + 1$, але $s + 1 \vdots 3$, тому й n має також ділитися на 3, що суперечить вибору числа n. Залишається показати, що існує 2 цікавих числа, що йдуть поспіль, наприклад, 39 та 40. Дійсно, $39 : (3 + 9 + 1) = 3$ та $40 : (4 + 0 + 1) = 8$.

5. Знайдіть відношення $2S : T$, де

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}, T = \frac{1}{51 \cdot 100} + \frac{1}{52 \cdot 99} + \frac{1}{53 \cdot 98} + \ldots + \frac{1}{100 \cdot 51}.$$

Відповідь: 151.

***Розв'язання*.** Оскільки $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ та $\frac{1}{uv} = \frac{1}{u+v}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v})$, матимемо:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}, T = \frac{2}{151} \cdot (\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{100}).$$

Додамо та віднімемо від S вираз $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}$, тоді матимемо:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - 2 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100}) = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{2S}{T} = \frac{\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}}{\frac{2}{151} \cdot (\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \ldots + \frac{1}{100})} = 151.$$

6. В турнірі з шахів, де кожний грав з кожним іншим рівно 1 раз, брали участь 12 гравців, серед яких були три брати – Гаррі, Магнус та Віши. Відомо, що кожний учасник, окрім трьох братів, у підсумку набрав не більше 4 очок, а Гаррі набрав 9 очок. Яке місце міг посісти Гаррі за підсумками турніру? Знайдіть усі можливі значення, а у відповіді запишіть їхню суму.

Відповідь: 3.

Розв'язання. Усього партій між 9 гравцями – за виключенням братів – було зігране $\frac{9\cdot8}{2}=36$. Тому сумарно вони мали набрати не менше ніж 36 очок. Але за умовою, вони набрали не більше ніж $9\cdot4=36$ очок. Висновок, вони усі набрали по 4 очки і програли усі свої партії братам. Але тоді Гаррі свої 9 очок набрав саме в зустрічах з іншими учасниками, тому програв обидві партії братам. Тобто вони так само мали по 9 очок з аутсайдерами, але ще кожний переміг Гаррі.

7. Точки A та C лежать на колі з радіусом $\sqrt{50}$ та з центром у точці O. Точка B лежить всередині кола таким чином, що $\angle ABC=90°$. Знаючи, що $AB=6$ та $BC=2$, знайдіть величину OB^2.

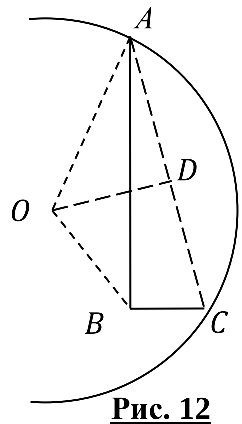


Рис. 12

Відповідь: 26.

Розв'язання. Нехай точка D – середина відрізка AC (рис. 12). Тоді $OD\perp AC\Rightarrow AC=2\sqrt{10}\Rightarrow AD=\sqrt{10}\Rightarrow OD=\sqrt{50-10}=2\sqrt{10}$.
Тоді

$$\cos\angle OAB=\cos(\angle OAD-\angle CAB)=$$
$$=\cos\angle OAD\cos\angle CAB+\sin\angle OAD\sin\angle CAB=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$
$$OB=\sqrt{AO^2+AB^2-2AO\cdot AB\cos\angle OAB}=\sqrt{26}.$$

8. Є 8 куп камінців. У кожній з них кількість камінців різна і ненульова. Відомо, що будь-яку купу можна прибрати й усі камінці з неї розкласти по інших купках таким чином, що в кожній з 7 куп, які залишились, стане однакова кількість камінців. Яка найменша кількість камінців може бути в найбільшій купі?

Відповідь: 28.

Розв'язання. Нехай у купках лежать $a_1<a_2<\ldots<a_8$ камінців. Оскільки кількості камінців у купках різні, $a_1+7\le a_8$. Отже, якщо розкладати камінці з першої (найменшої) купки, для того, щоб купи стали рівними, в сьому купку доведеться покласти принаймні 1 камінець, у шосту купку треба буде покласти принаймні 2 камінці, ..., у другу купку — не менше ніж 6 камінців. Таким чином, у першій купі повинен бути щонайменше $1+2+\ldots+6=21$ камінець. Тому у восьмій, найбільшій купці, не може бути менше за $21+7=28$ камінців.

З іншого боку, неважко переконатись, що розподіл камінців $a_i=20+i$, $i=\overline{1;8}$ задовольняє умову задачі. Тому число 28 є шуканою відповіддю.