Математичнийзанзібар для учнів 4–6 класів

«Легше запалити одну маленьку свічку,
ніж проклинати темряву»
Конфуцій

Розв’язання задач

4 клас

1. У Петрика в 2021 році народився братик. Петрик дуже полюбляв математику і підмітив, що усі діти в їх родині народжувалися по одному в усі роки, що мали однакову суму цифр з числом 2021. Скільки дітей в їх родині?

Відповідь: 3.
***Розв’язання*.** Очевидно, що роки народження усіх дітей мали перші дві цифри 20. Таким чином треба знайти усі пари цифр, які дають в сумі 3 – 2003, 2012 та 2021. Таким чином в родині 3 дитини.

2. У крадіжці запідозрили людей, що мали такі ознаки.
Андрій: темне волосся та сині очі.
Богдан: світле волосся та зелені очі.
Василь: світле волосся та темні очі.
Ганна: світле волосся та темні очі.
Дарина: темне волосся та сині очі.
Едуард: темне волосся та темні очі.
Жанна: світле волосся та сині очі.
Три слідчих проводили розслідування і кожний зібрав певні факти про злочинця, який був одним з підозрюваних.
Перший сказав. Знаю тон волосся та колір очей, але не можу точно вказати на злочинця.
Другий сказав. Я не чув, що сказав Перший, але знаю тон волосся та стать, але не можу точно вказати на злочинця.
Третій, почувши обох, каже. Я одразу знав стать злочинця, але тепер завдяки вашим судженням, знаю, хто то є.
Вкажіть ім’я злочинця.

Відповідь: Ганна.
***Розв’язання*.** Перший точно не міг би сказати, хто злодій, якщо то була пара Андрій та Дарина (темне волосся та сині очі) або пара Василь та Ганна (світле волосся та темні очі).
Другий не може визначити злочинця для таких пар: Василь чи Богдан (чоловіки зі світлим волоссям), Андрій чи Едуард (чоловіки з темним волоссям) або Ганна та Жанна (жінки з світлим волоссям).
Їхнім перетином є Андрій, Василь та Ганна. Оскільки Третій знає лише стать, то якби то був чоловік – він би не дізнався, тому це жінка – Ганна.

3. Скільки існує п'ятицифрових натуральних чисел, в яких сума перших трьох цифр дорівнює 3, а сума останніх трьох – 6.

Відповідь: 38.

Розв'язання. Розглянемо випадки третьої цифри у числі $\overline{abcde}$.
Якщо $c = 0$, то $a + b = 3$, $a \neq 0$ та $d + e = 6$. Вибір a, b – 3 варіанти, d, e – 7 варіантів. Разом – 21 варіант.
Якщо $c = 1$, то $a + b = 2$, $a \neq 0$ та $d + e = 5$. Вибір a, b – 2 варіанти, d, e – 6 варіантів. Разом – 12 варіантів.
Якщо $c = 2$, то $a + b = 1$, $a \neq 0$ та $d + e = 4$. Вибір a, b – 1 варіант, d, e – 5 варіантів. Разом – 5 варіантів.
Таким чином усього чисел $21 + 12 + 5 = 38$.

4. Розріжте квадрат 5×5 з вирізаною однією клітинкою 1×1 (довільною) на 6 однакових фігур, кожна з яких складається з чотирьох клітин.

Відповідь: відповідей багато, наприклад, на рис. 1.

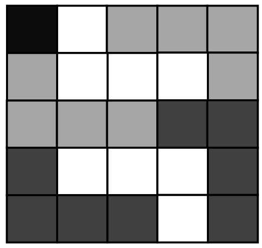

Рис. 1

5. Замініть в рівності $** + ** + ** + ** = 200$ зірочки на попарно різні цифри від 1 до 9, щоб отримати правильну рівність.

Відповідь: відповідей багато, наприклад, така: $13 + 24 + 65 + 98$.

6. Петрик шукає навпомацки в темній шухляді пару шкарпеток для побачення, на яке він завжди ходить в шкарпетках різного кольору. Він знає, що там є 6 чорних шкарпеток, 7 синіх та 8 зелених. Скільки йому мінімум треба витягнути шкарпеток, щоб там гарантовано було принаймні 2, що підходять для побачення пари шкарпеток?

Відповідь: 10.
Розв'язання. Якщо він витягне, наприклад, 9 шкарпеток, то там можуть виявитися 8 чорних та ще 1 зелена. Відповідно дві необхідні пари знайти не вдасться.
Нехай він витягне 10 шкарпеток, то, якщо там є шкарпетки усіх трьох кольорів, то відповідні 2 пари утворити легко. Якщо там шкарпетки лише двох кольорів, то одного з двох кольорів не може бути лише 1 шкарпетка, а тому також легко утворимо 2 потрібні пари.

7. Знайдіть такі ненульові цифри a, b, що задовольняють умови: $\overline{ab} \vdots 5$ та $\overline{ba} \vdots 6$.

Відповідь: $a = 4, b = 5$.
Розв'язання. Оскільки цифри не нульові, то$b = 5$. Залишається зрозуміти, що єдине двоцифрове число, що задовольняє умови – це 54.

8. Прямокутник розрізаний на 8 квадратів як це показано на рис. 2. Площа найбільшого квадрата складає 3600. Чому дорівнює периметр прямокутника?

Відповідь: 336.
Розв'язання. Сторона великого квадрата складає 60. Тоді сторона малого квадрата – $60 : 5 = 12$. Таким чином сторона середнього квадрата дорівнює $(60 + 12) : 2 = 36$. Таким чином прямокутник має сторони $60 + 12 = 72$ та $60 + 36 = 96$. Таким чином периметр прямокутника дорівнює $2 \cdot (96 + 72) = 336$.

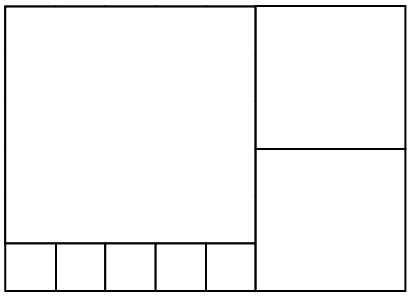

Рис. 2

9. П'ять попарно різних ненульових цифр a, b, c, d, e задовольняють такі умови:
1. $a + b > c + 6$;
2. $a + b = d$;

3. $c + e = a$;
4. $a \vdots c$;
5. $a + c > d$;
6. $a > 6$.

Знайдіть цифру e.

Відповідь: 6.
***Розв'язання*.** З умови 6 $a \in \{7,8,9\}$. З умови 2 $a \neq 9$, оскільки $a < d$.
Якщо $a = 7$, то $c = 1$, але тоді $a + c = 8 > d > a = 7$ і для d не маємо шуканого значення.
Таким чином $a = 8$, давайте пересвідчимося, що інші цифри можна належним чином підібрати.
З умови 4 $c \in \{1,2,4\}$. Якщо $c = 1$, то $a + c = 9 > d > a = 8$ – суперечність.
Якщо $c = 2$, то $a + c = 10 > d > a = 8 \Rightarrow d = 9$. З умови 2 $b = 1$, тоді умова 1 справджується. З умови 3 $e = 6$. Усі умови справджуються.
Якщо $c = 4$, то $a + c = 12 > d > a = 8 \Rightarrow d = 9$. З умови 2 $b = 1$, тоді умова 1 не справджується.

10. Кожна грань кубика $2 \times 2 \times 2$ поділена на 4 квадратики 1×1. Яку найбільшу кількість квадратиків можна зафарбувати, щоб жодні два зафарбовані квадратики не дотикалися один одного навіть вершиною?

Відповідь: 6.
***Розв'язання*.** Очевидно, що у кожній грані не можна зафарбувати більше одного квадратика, тому максимум їх може бути 6. Залишається показати, що ці 6 можна зафарбувати (рис. 3).

11. Василь задумав чотирицифрове число. Петрик хоче його визначити. Між ними відбулася така розмова.
Петрик: "Чи це число дорівнює 1369?"
Василь: "Ні, але воно кратне 1369."
Петрик: "Чи це число кратне 9?"
Василь: "Ні, але воно дає остачу 4 при діленні на 9."
Яке число задумав Василь?

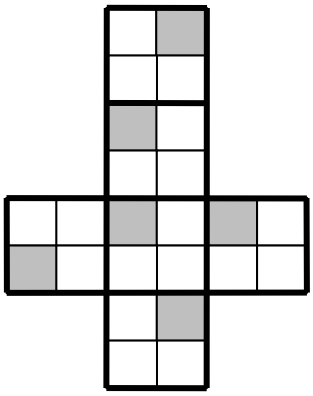
Рис. 3

Відповідь: 5476.
***Розв'язання*.** Чисел, що кратні 1369 не багато, випишемо їх: 2738, 4107, 5476, 6845, 8214 та 9583. Залишається знайти серед них те, що дає остачу 4 при діленні на 9. Шуканим є число 5476.

12. На яку найменшу кількість квадратів, що складаються з цілої кількості клітинок 1×1, можна розрізати прямокутник 6×7?

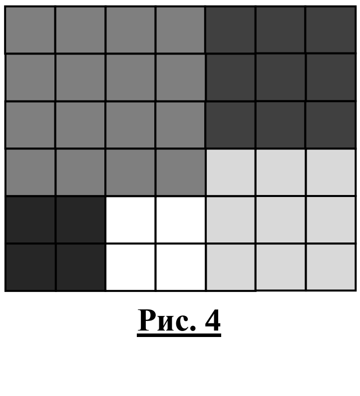
Рис. 4

Відповідь: 5.
***Розв'язання*.** Розрізання на 5 квадратів показане на рис. 4. Припустимо, що можна розрізати на 4 квадрати. Тоді серед них немає квадрату 6×6, бо тоді лишиться лише можливість додати 6 квадратів 1×1 і їхня загальна кількість стане 7. Якщо усі квадрати розбиття менші за 6×6, то кожний кут прямокутника 6×7 має покривати свій квадрат. Залишається зробити простий перебір цих варіантів, і 4 квадратів не вистачить.

13. У математичному класі 27 учнів написали контрольну з математики. Виявилося, що кожний з них написав на 10, 11 або на 12 балів і сумарно вони набрали 289 балів. Скільки щонайбільше з них отримали 12 балів?

Відповідь: 9.
***Розв'язання*.** Якби усі написали на 10, то вони набрали б 270 балів. Як висновок понад це було набране 19 балів, при цьому в це число кожний хто набрав 12 балів додає 2, а той, хто набирає 11 додає 1, таким чином максимум може бути 9 тих, хто набрав 12 балів.

14. Є 26 хлопчиків та дівчаток, що вишикувалися в ряд за спаданням їхнього зросту:
хххддхххдддххдддддххххдхдд
Яку найбільшу кількість пар для танців вони можуть утворити так, щоб у кожній парі хлопчик був вищим за дівчинку?

Відповідь: 11.
***Розв'язання*.** Розглянемо 5 останніх за зростом хлопчиків. Вони можуть утворювати пару лише з 3 дівчатками. Тому принаймні 2 з них будуть без пари. Усього хлопчиків 13, тому й пар не більше 11. Приклад такої кількоітсі пар утворити дуже просто, достатньо взяти найправішу в рядку дівчинку, що ще не має пари, та обрати для неї найправішого не зайнятого хлопчика. Так і вийде рівно 11 пар.

15. Різниця двоцифрового числа $\overline{ab}$ та двоцифрового числа $\overline{ba}$ дорівнює квадрату натурального числа. Скільки існує таких чисел $\overline{ab}$.

Відповідь: 13.
***Розв'язання*.** Очевидно, що $a > b$, тоді $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) = k^2$. Залишається розглянути можливі k, що кратні 3, квадрат яких не більше ніж двоцифрове число.
$k = 3 \Rightarrow a - b = 1 \Rightarrow$ і таких чисел 8: 21, 32, …, 98.
$k = 6 \Rightarrow a - b = 4 \Rightarrow$ і таких чисел 5: 51, 62, …, 95.
$k = 9 \Rightarrow a - b = 9 \Rightarrow$ і таких чисел не існує.
Для більших значень k тим паче шуканих чисел не існує.

16. На прямій зліва направо поставлені точки A, B, C, D, E, саме у цьому порядку. З них одна точка пофарбована жовтим, а правіше від жовтої ще одна пофарбована синім. Відомі такі відстані $AC = 7$, між жовтою точкою та B відстань 8, а між синьою точкою та точкою D – відстань 9. Яка відстань між жовтою та синьою точками?

Відповідь: 9.
***Розв'язання*.** Жовта точка не може бути розташованою між точками A та C, оскільки від неї до точки $B \in AC$ відстань 8. Тому жовтою може бути D або E. Відповідно синя точка – правіше, тобто це може бути E.

<u>5 клас</u>

1. Дарина, Петрик та Василь можуть намалювати 360 смайликів відповідно за 12, 18 та 36 днів. За скліьки днів вони намалюють 360 смайликів, якщо малюватимуть усі троє одночасно?

Відповідь: 6.
***Розв'язання*.** За 1 день Даринка рисує 30 смайликів, Петрик – 20, а Василь – 10. Тому разом вони за день нарисують 60. Таким чином усі 360 смайликів вони зможуть разом намалювати за 6 днів.

2. Задача № 2 4 класу.

3. Задача № 3 4 класу.

4. Прямокутник з периметром 2000 поділений на 7 частин, як це показано на рис. 5, де фігури I, II, III, IV, V – прямокутники, периметри яких відносяться як $1:3:5:7:9$. Чому дорівнює сума периметрів фігур A та B?

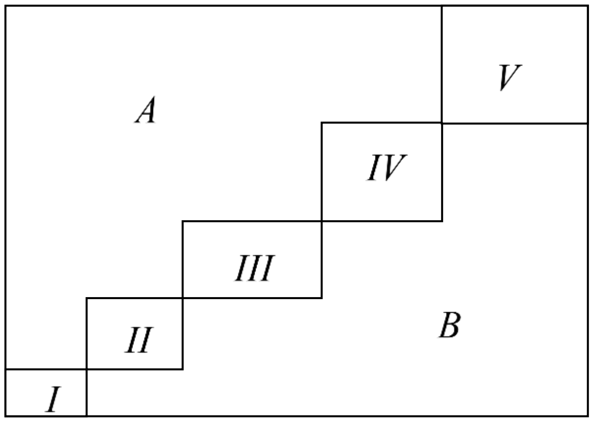

Рис. 5

Відповідь: 3200.
Розв'язання. Позначимо периметр прямокутника I через x. Тоді периметри решти прямокутників у порядку зростання – $3x$, $5x$, $7x$ та $9x$. Тоді периметр великого прямокутника дорівнює сумі периметрів прямокутників $I - V$: таким чином:

$$x + 3x + 5x + 7x + 9x = 25x = 2000 \Rightarrow x = 80.$$

Сума периметрів фігур A та B дорівнює периметру великого прямокутника та периметрам прямокутників $II, III, IV \Rightarrow$

$$2000 + 3x + 5x + 7x = 2000 + 15x = 3200.$$

5. Чотири сестри поміряли нові шапки. Анастасія на рік старша за дівчинку в синій шапці, Богдана на рік старша за дівчинку в червоній шапці, Вікторія на рік старша дівчинки в зеленій шапці. Хто старший та на скільки: Ганна чи дівчинка в жовтій шапці?

Відповідь: дівчинка в жовтій шапці на 3 роки старша за Ганну.
Розв'язання. Позначимо вік дівчат Анастасії, Богдани, Вікторії та Ганни через A, B, C, D, а вік дівчат в синій, червоній, зеленій та жовтій шапках через a, b, c, d. Тоді за умовою $A + B + C + D = a + b + c + d$. Тоді $d - D = (A - a) + (B - b) + (C - c) = 3$. Таким чином дівчинка в жовтій шапці на 3 роки старша за Ганну.

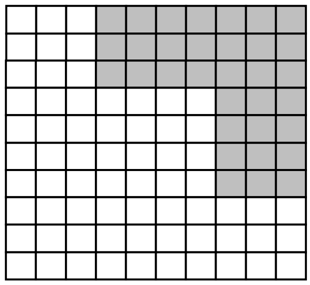

Рис. 6

6. Скількома способами на дошці 10×10 можна розставити 10 шахових тур, щоб вони не атакували одна одну та жодна з них не стояла на сірих полях (рис. 6)?

Відповідь: 864.
Розв'язання. Неважко зрозуміти, що тури, що мають стояти в верхніх трьох рядках мають бути розташовані у верхньому лівому темному квадраті 3×3 (рис. 7). Так само, тури нижніх трьох рядків мають розташовуватися в правому нижньому темному квадраті 3×3. Тому для середніх чотирьох рядків (стовпчиків) тури мають бути розташованими в темному квадраті 4×4. Залишається порахувати кількість варіантів: $3! \cdot 4! \cdot 3! = 864$

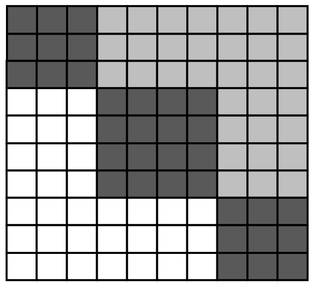

Рис. 7

7. Задача № 7 4 класу.

8. Задача № 8 4 класу.

9. Задача № 9 4 класу.

10. Кожному з 21 дітей, що були вишукувані в шеренгу дали табличку з натуральним числом. Перша зліва дитина тримає табличку з числом 1, друга зліва – з числом 2, третя зліва дитина тримає табличку з числом 3. Відомо, що сума чисел у кожних шести дітей, що стоять поруч, дорівнює 21. Чому дорівнює сума усіх 21 чисел, що тримають діти?

Відповідь: 69.
***Розв'язання*.** Сума чисел, що тримають діти з номерами 4–6 дорівнюють $21-(1+2+3)=15$. З аналогічних міркувань, діти з номерами 7, 13 та 19 тримають число 1 як і дитина з номером 1. Аналогічно діти за номерами 2, 8, 14 та 20 тримають число 2, діти з номерами 3, 9, 15 та 21 тримають номер 3. Кожна трійка дітей (4, 5 та 6), (10, 11 та 12), (16, 17 та 18) тримають числа з сумою 15. Таким чином усі 21 дитина тримають числа з сумою: $21\cdot 3+6=69$

11. Петрик вибрав натуральне число число n, та написав усі числа $1,2,\dots,n$ без пробілів як велике багатоцифрове число, Василь зробив те саме, але записав без пробілів числа $n,n-1,\dots,1$. Виявилося, що число, записане Петриком більше за число, записане Василем. При якому найменшому n таке могло статися?

Відповідь: 10.
***Розв'язання*.** При $n<10$ перша цифра числа Василя більша за першу цифру числа Петрика. А при $n=10$ маємо, що записані такі числа: 12345678910>10987654321.

12. Задача № 12 4 класу.

13. У Петрика є монети по 2 та по 5 гривень. До усіх його монет по 2 грн. треба додати 60 грн., щоб придбати 4 пиріжка. До усіх його монет по 5 грн. треба додати 60 грн., щоб придбати 5 пиріжків. А усього йому не вистачає 60 грн., щоб купити 6 пиріжків. Скільки коштує пиріжок?

Відповідь: 20.
***Розв'язання*.** Можна задачу зробити логічними міркуваннями, але простіше простими рівняннями. Нехай x – сума монет по 2 гривні, y – сума монет по 5 гривні, a – вартість пиріжка. Тоді $x+60=4a$, $y+60=5a$ та $x+y+60=6a$. З перших рівнянь маємо, що $x+y+120=9a\Rightarrow 60=3a$, тобто пиріжок коштує 20 грн.

14. Юні математики Андрій, Богдан, Василь, Грицько, прізвища яких Андрєєв, Богданов, Васильєв та Григор'єв, два рази пили чай за круглим столом. Перший раз Андрій сидів напроти Андрєєва, а Богдан сидів поруч з Васильєвим. Вдруге Грицько сидів напроти Богданова, а Васильєв – поруч з Андрієм. Напишіть імена та прізвища кожного, якщо відомо, що жодні два юні математики не сиділи двічі один напроти одного.

Відповідь: Андрій Богданов, Василь Васильєв, Грицько Григор'єв та Богдан Андрєєв.
***Розв'язання*.** Подивимося, як сиділи за столом математики у другий раз. Напроти Андрія – не Андрєєв (оскільки вони вже сиділи напроти раніше), не Богданов (бо напроти нього сидить Грицько) та не Васильєв (оскільки він сидить поруч з Андрієм), тому – це Григор'єв. Андрій не може бути Андрєєвим (вони сиділи напроти), поруч з ним сидить Васильєв, а напроти нього сидить Григор'єв, звідси Андрій – Богданов. Напроти Богданова – Грицько, таким чином, Грицько – Григор'єв. Васильєв та Богдан – різні люди, поруч з Васильєвим сидять Андрій та Грицько, тому, Васильєв – Василь. Тоді Андрєєв – Богдан.

15. Якою буде остання цифра числа $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+2020\cdot 2021$?

Відповідь: 0.
***Розв'язання*.** Випишемо останні цифри чисел $1\cdot 2, 2\cdot 3, 3\cdot 4,\dots,2020\cdot 2021$:

$$2,6,2,0,0,2,6,2,0,0,\ldots$$

Тоді остання цифра суми буде змінюватися таким чином: $2,8,0,0,0,2,8,0,0,0,\ldots$. Неважко збагнути, що остання цифра буде 0.

16. Розріжте квадрат на 7 не обов'язково різних прямокутників, у кожного з яких одна із сторін удвічі менша за другу?

Відповідь: Прикладів багато, один з можливих показаний на рис. 8.

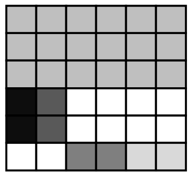

Рис. 8

6 клас

1. Дарина, Петрик та Василь можуть виконати певну роботу відповідно за 12, 18 та 36 днів. За скільки днів вони виконають цю роботу, якщо працюватимуть усі троє одночасно?

Відповідь: 6.
Розв'язання. Поділимо усю роботу на 360 однакових частин. За 1 день Даринка зробить 30 частин цієї роботи, Петрик – 20, а Василь – 10. Тому разом вони за день зроблять 60. Тому усі 360 частин вони зможуть разом виконати за 6 днів.

2. Задача № 2 4 класу.

3. Задача № 3 4 класу.

4. Задача № 4 5 класу.

5. Задача № 5 5 класу.

6. Задача № 6 5 класу.

7. Ненульові цифри b, d задовольняють такі умови: $\overline{bd} \vdots 13$ та $\overline{db}$ має рівно 3 дільники.

Відповідь: $b = 5, d = 2$.
Розв'язання. Оскільки мати три дільники, то це квадрат числа. Таким чином достатньо перебрати просто усі двоцифрові квадрати. $16 \to 61 \not\vdots 13$, $25 \to 52 \vdots 13$, $36 \to 63 \not\vdots 13$, $49 \to 94 \not\vdots 13$, $64 \to 46 \not\vdots 13$ та $81 \to 18 \not\vdots 13$.

8. Задача № 8 4 класу.

9. Задача № 9 4 класу.

10. Задача № 10 5 класу.

11. Яке найбільше чотирицифрове число при діленні на 11 дає остачу 10, при діленні на 12 дає остачу 11, при діленні на 13 дає остачу 12?

Відповідь: 8579.
Розв'язання. Позначмо це число через n, тоді $n + 1$має одночасно ділитися на 11, 12 та 13, тобто це число, що має ділитися на $11 \cdot 12 \cdot 13 = 1716$. Знайдемо найбільше чотирицифрове число, що ділиться на 1716. Це число $1716 \cdot 5 = 8580$, і шуканим є число 8579.

12. Розріжте довільний трикутник на 4 опуклі фігури: шестикутник, п'ятикутник, чотирикутник та трикутник. Фігура опукла, якщо будь-який відрізок всередині цієї фігури не виходить за її межі фігури.

Відповідь: один з можливих прикладів на рис. 9.

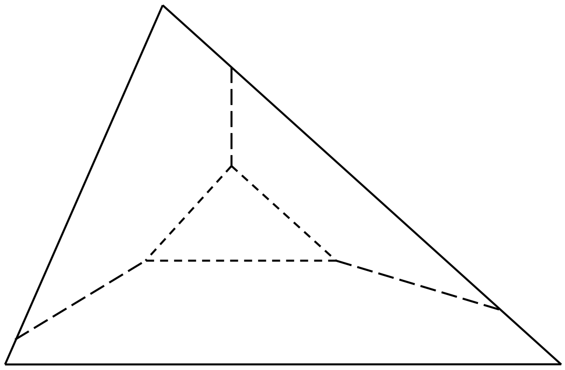

Рис. 9

13. Якому цілому числу дорівнює цей вираз:

$$26 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{11\cdot 13}\right)?$$

Відповідь: 12.

***Розв'язання*.** Зробимо таки перетворення:

$$26 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{11\cdot 13}\right) = 13 \cdot \left(\frac{3-1}{1\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{7-5}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{13-11}{11\cdot 13}\right) =$$

$$= 13 \cdot \left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots+-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{11}-\tfrac{1}{13}\right) = 13 \cdot \left(1-\tfrac{1}{13}\right) = 13-1 = 12.$$

14. Задача № 14 5 класу.

15. Задача № 15 5 класу.

16. Задача № 16 5 класу.