# Математичний занзібар

*«Той, хто пересуває гори, спочатку прибирає малі камінці.»*
*Конфуцій*

## Наймолодша ліга

**1.** Розглянемо множину $M = \{1,2,\ldots,2021\}$ та її підмножину $A = \{x \in M | \frac{1}{24}(x^3 - x) \in \mathrm{N}\}$. Скільки елементів у множині $A$?

***Відповідь:*** 1262.

***Розв'язання.*** Оскільки $\frac{x^3-x}{24} = \frac{(x-1)x(x+1)}{24}$, то добуток трьох послідовних чисел завжди ділиться на 3, щоб число було натуральним треба, щоб або $x \pm 1$ були парними, тоді добуток двох сусідніх парних чисел ділиться щонайменше на $2 \cdot 4 = 8$, або щоб $x \vdots 8$. Таким чином треба порахувати шукану кількість.
Чисел першого типу стільки, скільки непарних чисел у множині $M$ – тобто 1011. Але треба виключити число $x = 1$, бо для нього $x^3 - x = 0$ – не натуральне.
Чисел другого типу, скільки чисел, що кратні 8 у множині $M$ – тобто 252.
Разом $1010 + 252 = 1262$.

**2.** Скількома способами з чисел $1, 2, 3, \ldots, 13$ можна вибрати 4 числа, що утворюють зростаючу арифметичну прогресію?
Нагадаємо, що числа $a, b, c, d$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію, якщо $b - a = c - b = d - c > 0$.

***Відповідь:*** 22.

***Розв'язання.*** Найбільше можливе значення різниці прогресії дорівнює $\frac{13-1}{3} = 4$. Тепер проводимо належне обчислення. Прогресій з різницею 1 є $13 - 1 \cdot 3 = 10$, з різницею 2 таких прогресій є $13 - 2 \cdot 3 = 7$, з різницею 3 є $13 - 3 \cdot 3 = 4$, з різницею 4 є $13 - 4 \cdot 3 = 1$. Таким чином їхня кількість $1 + 4 + 7 + 10 = 22$.

**3.** З 6 букв слова БОГДАН утворюються усі можливі слова з 6 букв і розташовують в лексикографічному порядку, тобто за абеткою, або як вони розташовані в словниках. Таким чином першими будуть такі слова: АБГДНО, АБГДОН, АБГНДО, АБГНОД, …, і їм послідовно надають номери $1, 2, 3, \ldots$, при цьому усього таких словотворень рівно 720. Який номер при такому розташуванні матиме слово БОГДАН?

***Відповідь:*** 225.

***Розв'язання.*** З першою літерою А таких слів буде $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Далі йде група слів, що починаються з Б.
Слів з другою літерою А там буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, з другою літерою Г, Д, Н там буде також по 24. Далі йде група слів з другою буквою О.
Слів з третьою буквою А буде $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, далі йдуть слова з третьою літерою Г.
Слів з четвертою буквою А буде $2 \cdot 1 = 2$, далі йдуть слова з четвертою буквою Д.
Далі першим в списку йде слово з п'ятою буквою А, і останньою стане буква Н.
Порахуємо його місце: $120 + 4 \cdot 24 + 6 + 2 + 1 = 225$.

**4.** Є 7 квадратів, що розташовані так, як то показане на рис. 1. Відомо, що сторона кожного квадрату складає цілу кількість клітинок. На кожному з квадратів написане, скільки клітинок складає довжина його сторони. Яке найменше значення у клітинках може приймати довжина сторони $a$? Зовнішній прямокутник, який утворюють наведені 7 квадратів, не обов'язково квадрат.

***Відповідь:*** 11.
***Розв'язання.*** Запишемо ті умови, яким мають задовольняти довжини сторін зазначених квадратів.

$$b = c + e, a + c = 2d, c + d = 2e, a = b + c.$$

Далі просто подивимося як можна їх виразити одне через інше.

$$a = 2d - c = b + c \Rightarrow 2d = b + 2c;\ 2e = c + d = 2b - 2c \Rightarrow 2d = 4b - 6c \Rightarrow$$
$$2d = b + 2c = 4b - 6c \Rightarrow 3b = 8c.$$

Таким чином, щоб усі квадрати складалися з цілої кількості клітинок, найменше можливе значення для $c = 3 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = b + c = 11$. Неважко переконатися, що й усі інші квадрати мають довжину сторін, що визначається цілою кількістю клітин.

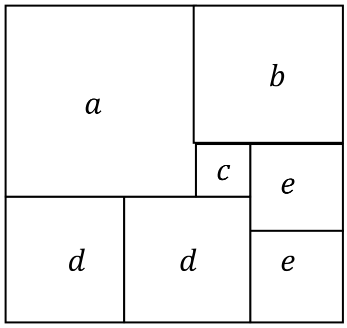

**Рис. 1**

**5.** Які натуральні числа не можна записати як суму двох складених натуральних чисел?

***Відповідь:*** $1, 2, \ldots, 7, 9, 11$.
***Розв'язання.*** Усі числа $n \geq 12$ подати належним чином можна. Якщо $n$ – парне, то це можуть бути числа $n - 4$ та 4. Якщо $n$ – непарне, то це можуть бути числа 9 та $n - 9$ – парне і більше від 3. Залишається перебором знайти шукані числа.
Не можна подати числа $1, 2, \ldots, 7$, оскільки найменше складене число 4, тому найменше число, що можна подати у вигляді складених суми чисел – це $4 + 4 = 8$. Так само $4 + 6 = 10$. Числа 9 та 11 так подати не можна.

**6.** Маємо дев'ять карток, на кожній з яких записане деяке ціле число від 1 до 9, при цьому записані числа можуть повторюватися. Відомо, що яку б кількість карток довільним чином не вибрати, сума чисел на них не кратна 10. Які числа можуть бути написані на картках?

***Відповідь:*** однакові непарні числа, окрім 5.
***Розв'язання.*** Методом від супротивного, припустимо, що не усі числа різні. Позначимо їх $a_1, a_2, \ldots, a_9$, при цьому $a_1 \neq a_2$. Позначимо суми $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_9 = a_1 + a_2 + \cdots + a_9$. За припущенням, кожне з них не закінчується цифрою 0. Якщо там є два числа, що закінчуються на однакову цифру, наприклад, $S_i$ та $S_j$ при $i < j$, то шуканий набір утворюють числа $S_j - S_i$.
Остання можливість, що усі останні цифри різні і немає цифри 0. Позначмо через $S_k$ те з чисел $S_1$, …, $S_9$, що має останньою цифрою $a_2$? При цьому це не число $S_1$. Тоді шуканим набором буде той, що утворюють числа $S_k - a_2$. Одержана суперечність показує, що усі числа однакові.
Простим перебором переконуємося, що парні числа шуканий набір не утворюють, а кожне непарне число умову задовольняє, окрім 5.

**7.** Шахова тура має пройти з лівого нижнього кута шахівниці у правий верхній рівно за 6 ходів. При цьому вона може рухатися лише направо або нагору, та ходи нагору та направо мають чергуватися. Знайдіть кількість можливих маршрутів тури.

***Відповідь:*** 450.
***Розв'язання.*** Нехай перший хід буде нагору. Щоб цих ходів було 3, ми маємо вибрати два числа серед 6 чисел $2, 3, \ldots, 7$, які будуть вказувати на ті вертикалі, на які ходитиме тура першим та другим вертикальним ходом, бо третім вона має стати на 8 горизонталь. Варіантів $C_6^2 = 15$. Аналогічно для горизонтальних ходів – 15. І це разом $15 \cdot 15 = 225$. Стільки ж варіантів, якщо перший хід робиться по горизонталі.

**8.** У квадраті за стороню 1 провели дві дуги кіл, радіуса 1, як то показане на рис. 2. Чому дорівнює площа заштрихованої частини квадрата?

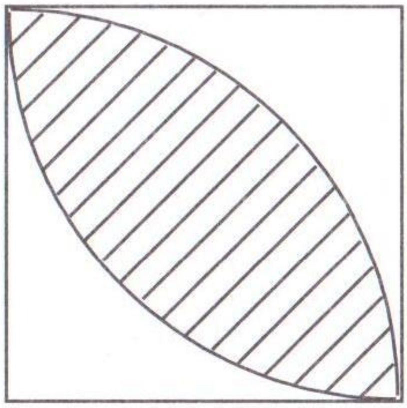

**Рис. 2**

***Відповідь:*** $\frac{1}{2}\pi - 1$.

***Розв'язання.*** Проведемо діагональ та порахуємо половину цієї площі. Це треба від площі чверті круга відняти площу половини квадрата, тобто $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$. Таким чином площа заштрихованої частини складає $\frac{1}{2}\pi - 1$.

**9.** Знайдіть найбільше натуральне число, усі цифри якого попарно різні та яке зменшується у 5 разів, якщо викреслити першу цифру.

***Відповідь:*** 3750.

***Розв'язання.*** За умовою $\overline{aA} = 5A$, де $a$ – перша цифра числа. Тоді $4A = 10^{n-1}a \Rightarrow$ при $n \geq 3$ $A = 25 \cdot 10^{n-3}a \Rightarrow$ при $n > 4$ шукане число закінчується двома нулями, а тому має однакові цифри. Найбільше число буде при найбільшому $n$, нехай $n = 4$, тобто число $A$ – трицифрове. Тоді $A = 250a$ та при $a \geq 4$ – воно стане чотирицифровим, тому $a \leq 3$. При $a = 3$ отримуємо шукане найбільше число 3750.

**10.** По 10 тарілкам розкладено декілька яблук так, щоб на будь-яких двох тарілках було разом або 5, або 8, або 11 яблук, і щоб усі три варіанти зустрічалися. Скільки при цьому усього могло бути яблук? Вкажіть усі можливості для цієї кількості.

***Відповідь:*** 40.

***Розв'язання.*** Якщо хоча б на 4-х тарілках різна кількість яблук $a < b < c < d$, то отримаємо мінімум 5 різних варіантів кількісті: $a + b, a + c, a + d, b + d, c + d$. Тому є декілька тарілок з однаковою кількістю яблук, але сума яблук на таких двох тарілках – парна. Але серед варіантів лише одне парне число, тому однакова кількість яблук на тарілках – це 4. Така кількість на 8 тарілках, адже 4 – це єдина кількість яблук на тарілці, яка є принаймні на двох тарілках. Щоб отримати 5, то має бути тарілки з 2 та 3 яблуками, що призводить до суперечності, бо тоді 11 яблук не отримати. Або має бути тарілка з 1 яблуком. Зрозуміло, що на 10-й тарілці має бути 7 яблук. Разом – 40 яблук.

**11.** У волейбольному турнірі, де у одній грі команда, що перемогла, та команда, що програла, набирають очки у співвідношенні 3–0 або 2–1, кожна команда з кожною іншою зіграла рівно один раз. При цьому виявилося, що усі $n$ команд-учасниць набрали порівну очок. При якому найменшому $n$ це могло статися, якщо не в усіх команд кількість перемог дорівнює кількості поразок?

***Відповідь:*** 5.

***Розв'язання.*** Очевидно, що така ситуація можлива лише при непарному $n$, адже сумарна кількість набраних очок ділиться на $n$, отже $\frac{3n(n-1)}{2}$ кратно $n$, що неправда при парному $n$. Для $n = 3$ – це очевидно неможливо.

Залишається навести приклад, що при $n = 5$ це можливо (Рис. 3).

| | I | II | III | IV | V | Оч |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I | XX | 3 | 3 | 0 | 0 | 6 |
| II | 0 | XX | 2 | 2 | 2 | 6 |
| III | 0 | 1 | XX | 2 | 3 | 6 |
| IV | 3 | 1 | 1 | XX | 1 | 6 |
| V | 3 | 1 | 0 | 2 | XX | 6 |

**Рис. 3**

**12.** Квадрат $ABCD$ має довжини сторін рівні 1. Точки $P$ та $Q$ вибрані на сторонах $AB$ та $AD$ відповідно таким чином, що периметр $\Delta APQ$ дорівнює 2. Чому може дорівнювати градусна міра $\angle PCQ$?

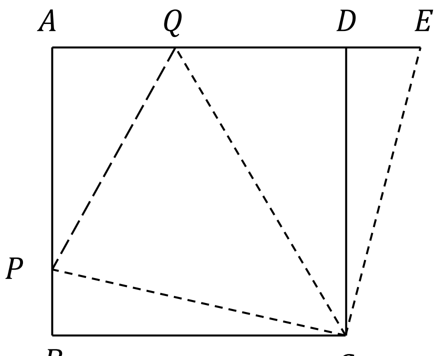

**Рис. 4**

***Відповідь:*** 45.

***Розв'язання.*** Побудуємо $\Delta CDE$, що рівний $\Delta CBP$, а саме $CD = CB$, $DE = BP$ та $\angle CDE = \angle CBP = 90°$ (рис. 4). Тоді

$$QE = ED + DQ = (1 - AP) + (1 - AQ) = $$
$$= 2 - (AP + AQ) = PQ.$$

Але звідси за трьома сторонами $\Delta CQE = \Delta CQP$, тоді $\angle ECQ = \angle QCP \Rightarrow 2\angle QCP = \angle ECP = \angle DCB = 90° \Rightarrow \angle QCP = 45°$.

**13.** Замініть у виразі $(\overline{ab})^c = (\overline{de})^f$ букви цифрами так, щоб рівність стала правильною, використавши кожну цифру від 1 до 6 рівно один раз. Достатньо навести один приклад.

***Відповідь:*** $16^5 = 32^4$.

**14.** Бригада з декількох робочих за 7 повних днів може виконати певну роботу, яку може виконати та ж саме бригада без двох працівників за декілька повних днів. Яка найбільша кількість робочих могла бути в цій бригаді з самого початку?

***Відповідь:*** 16.

***Розв'язання.*** Припустимо, що зменшена бригада могла виконати роботу за $l$ днів, позначмо через $n$ – кількість робітників у бригаді з самого початку. Тоді має справджуватися така рівність: $7n = l(n-2)$. Зрозуміло, що $l \geq 8$, бо кількість днів має бути цілою і більшою від попередньої кількості. Тоді $7n = l(n-2) \geq 8(n-2) \Rightarrow n \leq 16$. Покажемо, що саме такою могла бути кількість членів бригади і це шукана найбільша кількість: при $n = 16$ $l = 8$.

**15.** По колу написані 100 ненульових чисел. Між кожними двома сусідніми числами написали їхній добуток, а попередні числа витерли. Кількість додатних чисел не змінилося. Яка мінімальна кількість додатних чисел могла бути написана по колу з самого початку?

***Відповідь:*** 34.

***Розв'язання.*** Покажемо, що така оцінка досягається. Поставимо спочатку один знак «+», далі 33 групи таких знаків «+ – –». Тоді після вказаної операції буде стояти один знак «+», далі 33 групи таких знаків «– + –».

в кожній групі поруч стоять 2 мінуси, а також є пара сусідніх плюсів, які й залишають кількість плюсів не змінною. Зрозуміло, що решта знаків будуть мінуси.

Доведемо методом від супротивного, що додатних чисел було не менше 34. Припустимо, що їх не більше 33. Від'ємні числа утворюються лише якщо один з множників додатний, а другий – від'ємний, при цьому додатний множник може приймати участь не більше як у двох таких добутках. Таким чином могло утворитися не більше 66 від'ємних чисел, якщо до них додати 33 додатні, кількість яких не мала змінитися, то й вийде остаточно не більше 99, що суперечить умові. Отримана суперечність і завершує доведення.

**16.** Точка $A$ – середина відрізку $BC = 4$. Побудовані два чверть кола – одне з центром в точці $A$ та радіусом 2, друге – з центром в точці $B$ та радіусом 4, як то показане на рис. 5. Чому дорівнює різниця площ частин $I$ та $II$?

***Відповідь:*** $3\pi - 8$.

***Розв'язання.*** Сума площ регіонів $I, III, IV$ дорівнюють площі чверті круга радіуса 4, тобто вона дорівнює $\frac{1}{4}\pi \cdot 16 = 4\tau$. Регіони $II, IV$ разом утворюють прямокутник з площею $2 \cdot 4 = 8$. Регіон $III$ – це чверть круга радіуса 2, а тому його площа $\frac{1}{4}\pi \cdot 4 = \pi$. Тому шукана різниця площ регіонів $I$ та $II$ складає:

$$I - II = (I + III + IV) - (II + IV) - (III) \Rightarrow 4\pi - 8 - \pi = 3\pi - 8.$$

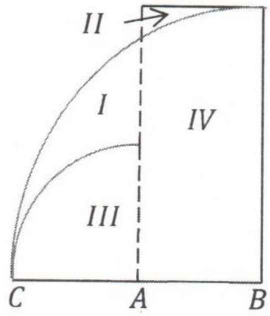

**Рис. 5**

**17.** Петрику подобаються усі числа, що не діляться на 3, а Василю подобаються усі числа, в яких немає цифр, що діляться на 3. Скільки існує чотирицифрових чисел, що подобаються одночасно і Петрику, і Василю?

***Відповідь:*** 810.
***Розв'язання.*** Шукані числа мають бути складеними з цифр $1, 2, 4, 5, 7, 8$ , при цьому в кожному числі сума цифр не має бути кратною 3. Розіб'ємо їх на дві групи: група «А» -- це цифри $1, 4, 7$, а група «Б» -- це цифри $2, 5, 8$. Число, що задовольняє умові задачі має бути складеним одним з чотирьох способів:
1) 4 цифри з групи «А»;
2) 4 цифри з групи «Б»;
3) 3 цифри з групи «А» и 1 цифра з групи «Б»;
4) 3 цифри з групи «Б» и 1 цифра з групи «А».
Усього таких чисел буде $3^4 + 3^4 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4 = 10 \cdot 3^4 = 810$.

**18.** Якби Олександр Македонський прожив на 5 років менше, то він був би при владі чверть свого життя, а якби він прожив на 9 років більше, то правив би половину свого життя. Скільки років прожив Олександр Македонський?

***Відповідь:*** 33.
***Розв'язання.*** Нехай $x$ – тривалість життя, а $y$ – кількість років при владі, тоді з однієї умови $x - 5 = 4(y - 5)$, з іншої: $x + 9 = 2(y + 9) \Rightarrow 4y - 20 + 5 = 2y + 18 - 9 \Rightarrow y = 12, x = 33$.

**19.** Є 3 однакових жовтих, 3 однакових синіх та 3 однакових білих м'ячі. Скількома способами їх можна розкласти на 3 купки по 3 м'ячі. Способи різні, якщо їх купки не є однаковими.

***Відповідь:*** 10.
***Розв'язання.*** Усі купки однокольорові – 1 спосіб, усі купки з трьох кольорів – 1 спосіб.
Є купка з 3 м'ячів одного кольору, але не усі такі. Тоді інші дві купки визначаються однозначно. Звідси випливає, що така купка одна і способів 3.
Якщо є 3 купки з 2 м'ячами одного кольору у кожній, то таких способів 2.
Якщо є рівно 2 купки по 2 м'ячі одного кольору, наприклад, жовті та сині. Тоді зелені по 1 в купках. Тобто таких способів усього 3.
Є рівно одна купка з 2 м'ячами одного кольору, наприклад, жовтими, тобто сині та зелені мали б бути по 1, але тоді до пари жовтих обидва не потрапляють, тобто таких варіантів немає.
Разом: $1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10$.

**20.** На яку найменшу кількість фигурок, що зображені на рис. 6, можна повністю розрізати квадрат $7 \times 7$? Фигурки можна повертати та перегортати.

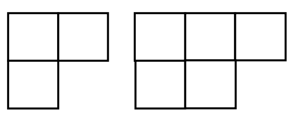
**Рис. 6**

***Відповідь:*** 11.
***Розв'язання.*** Куточок складається з 3 клітин, фігурка Р – з 5 клітин. Щоб загальна кількість куточків та Р фігурок була найменшою, треба, щоб фігурок Р було якомога більшою. Фігурки Р займають 5 клітин, тому, їх не

може бути більше 8. Дійсно, якщо їх 9, то вони б зайняли 45 клітин і 4 клітинки, що лишилися не закриються куточками. Так само 10 фігурок P бути не може, бо вони б покрили $50 > 49$ клітин. Таким чином найбільша можлива кількість P фігурок – 8. Тоді ще треба додати 3 куточки і вийде, що мінімальна можлива кількість фігурок 11. Приклад, що таке розбиття існує, показаний на рис. 7.

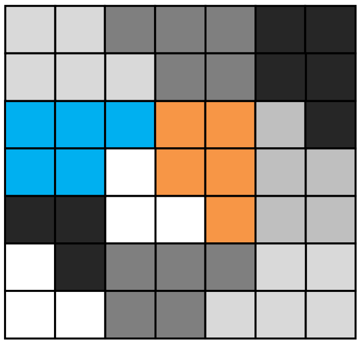

**Рис. 7**

## Молодша ліга

**1.** Задача № 1 наймолодшої ліги.

**2.** Скількома способами з чисел $1, 2, 3, \dots, 40$ можна вибрати 4 числа, що утворюють зростаючу арифметичну прогресію?
Нагадаємо, що числа $a, b, c, d$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію, якщо $b - a = c - b = d - c > 0$.

***Відповідь:*** 247.
***Розв'язання.*** Найбільше можливе значення різниці прогресії дорівнює $\frac{40-1}{3} = 13$. Тепер проводимо належне обчислення. Прогресій з різницею 1 є $40 - 1 \cdot 3 = 37$, з різницею 2 таких прогресій є $40 - 2 \cdot 3 = 34$, з різницею 3 є $40 - 3 \cdot 3 = 31$, …, з різницею 13 є $40 - 13 \cdot 3 = 1$. Таким чином їхня кількість $1 + 4 + \dots + 37 = \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 13 = 247$.

**3.** Задача № 3 наймолодшої ліги.

**4.** Задача № 4 наймолодшої ліги.

**5.** У університеті є $n$ студентів, кожному з яких присвоєні різні номери. Кожний номер студента є натуральний дільник числа $60^{60}$. НСД номерів будь-яких двох студентів не є номером студента. Для якого найбільшого $n$ це можливо?

***Відповідь:*** 3721.
***Розв'язання.*** Оскільки $60^{60} = 2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{60}$, то усі дільники мають вигляд $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, $0 \le a \le 120$, $0 \le b, c \le 60$. Припустимо, що усі номери мають вигляд, для якого $a + b + c = 120$. Тоді кожний такий номер однозначно визначається парою $(b, c)$ і усього таких різних пар $61^2 = 3721$. Покажемо, що вони задовольняють умову.
Якщо взяти два такі номери $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ та $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$, то їх НСД $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ не задовольняє умову, бо $p \le a$, $q \le b$ та $r \le c$ при цьому принаймні одна з нерівностей є строгою, бо якщо усі три рівності, то це суперечитиме умові, що $a + b + c = x + y + z = 120$, але тоді $p + q + r < 120$ – не є номером вказаного вигляду. Припустимо, що таких чисел більше ніж $61^2 = 3721$, тобто існують два номери в яких співпадають друга та третя компоненти: $(a_1, b, c)$ та $(a_2, b, c)$, якщо $a_1 \le a_2$ (або навпаки), то їхній НСД співпадає з одним з них, а тому є номером студента, що суперечить умові.

**6.** Задача № 6 наймолодшої ліги.

**7.** Задача № 7 наймолодшої ліги.

**8.** На гіпотенузі $AB$ прямокутного трикутника $ABC$ побудований у зовнішній бік квадрат $ABDE$. Бісектриса $\angle ACB$ перетинає сторону $DE$ квадрата у точці $M$. Знайдіть відношення $EM : DM$, якщо $AC = 2, BC = 6$?

***Відповідь:*** $EM : DM = 3$.

***Розв'язання.*** Бачимо, що бісектриса $\angle ACB$ проходить через центр $O$ квадрата (рис. 8). Справді, точка $O$ лежить на описаному колі $\Delta ACB$, оскільки $\angle AOB = 90°$, при цьому $AO = OB$. Оскільки $O$ – центр симетрії квадрата, пряма $CO$ ділить сторони $AB$ та $DE$ на рівні відрізки $AL = DM$, $BL = ME$, де $AL$ – бісектриса $\Delta ABC \Rightarrow$

$$\frac{EM}{DM} = \frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = 3.$$

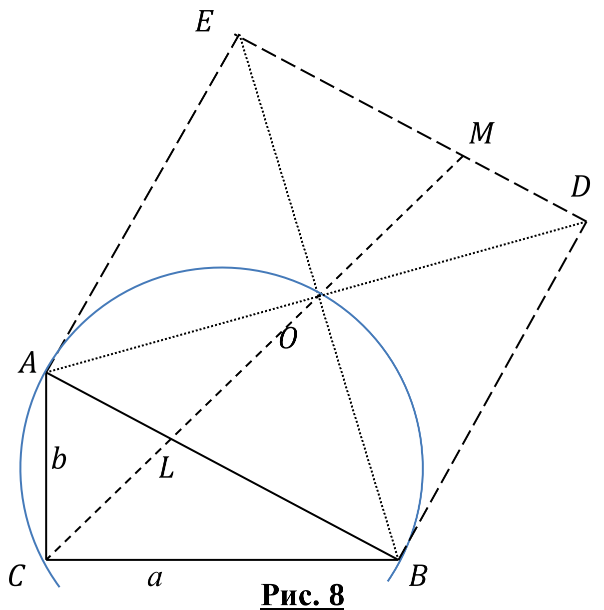

**Рис. 8**

**9.** Задача № 9 наймолодшої ліги.

**10.** Задача № 10 наймолодшої ліги.

**11.** Задача № 11 наймолодшої ліги.

**12.** Задача № 12 наймолодшої ліги.

**13.** Замініть букви в ребусі $A : B : C + D : E : F + G : H : I = 1$ попарно різними цифрами так, щоб вийшла правильна рівність (одна з цифр не використовується).

***Відповідь:*** $2 : 1 : 4 + 9 : 3 : 6 + 0 : 5 : 7 = 1$.
***Розв'язання.*** Таких розв'язків багато, наприклад, такий:

$$2 : 1 : 4 + 9 : 3 : 6 + 0 : 5 : 7 = \frac{1}{2} + \frac{9}{18} + 0 = 1.$$

**14.** Задача № 14 наймолодшої ліги.

**15.** Задача № 15 наймолодшої ліги.

**16.** У правильному восьмикутнику $ABCDEFGH$ діагоналі $AD$ та $BH$ перетинаються в точці $I$. Знайдіть градусну міру $\angle BID$. Восьмикутник називається правильним, якщо він має рівні сторони та рівні кути.

***Відповідь:*** 67,5.
***Розв'язання.*** Неважко порахувати, що внутрішній кут правильного восьмикутника дорівнює $135°$. Оскільки $\Delta ABH$ – рівнобедрений (рис. 9), то $\angle ABH = 22{,}5° \Rightarrow \angle IBC = 135° - 22{,}5° = 112{,}5°$. Оскільки $BC || AD \Rightarrow$

$$\angle BID = 180° - \angle IBC = 180° - 112{,}5° = 67{,}5°.$$

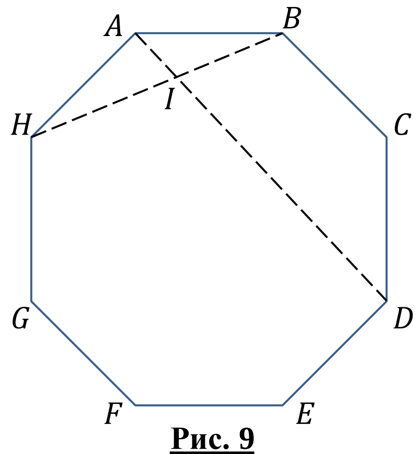

**Рис. 9**

**17.** Задача № 17 наймолодшої ліги.

**18.** Задача № 18 наймолодшої ліги.

**19.** Задача №19 наймолодшої ліги.

**20.** Для яких натуральних $n$ існує опуклий $n$-кутник, усі сторони якого мають довжину 5, а вершини розташовані у вузлах сітки?

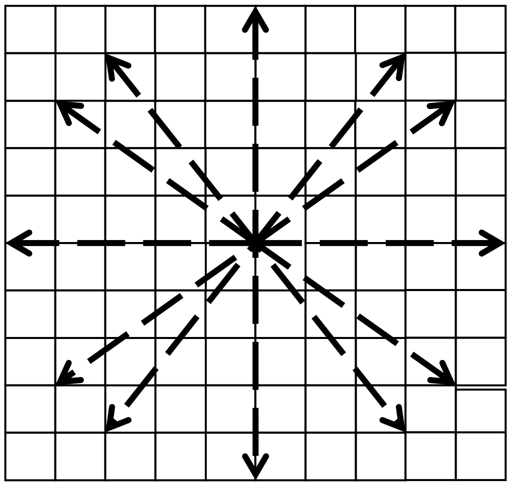

**Рис. 10**

***Відповідь:*** $4, 6, 8, 10, 12$.

***Розв'язання.*** Відкладемо від початку координат усі вектори, які мають цілі координати та довжину 5. Таких рівно 12 (рис. 10). Припустимо, що шуканий многокутник ми побудували. Тоді усі його сторони утворюють вказані вектори (якщо ми обходимо вершини за годинниковою стрілкою) і не більше ніж 1 раз. Пофарбуємо усі цілочисельні вершини в шаховому порядку: точки, у яких абсциса та ордината однакової парності, – чорні, усі інші – білі. Кожний з наших 12 векторів з'єднує точки різних кольорів, тому при обході контуру нашого $n$-кутника, кольори вершин чергуються, а тому їх парна кількість. Далі нескладно побудувати приклади для кожного наведеного парного $n$. Наприклад, для $n = 6$ вибираємо три сусідніх вектори, а також три їм протилежних. В цьому й порядку їх з'єднуємо, щоб отримати шуканий шестикутник. Так і для усіх інших $n$.

## Середня ліга

**1.** Розглянемо множину $M = \{1,2,\ldots,2021\}$ та її підмножину $A = \{x \in M | \frac{1}{24}(x^3 - x) \in N\}$. Знайдіть найменше можливе число $n \geq 2$, для якого довільна підмножина множини $A$, що містить $n$ елементів, має два різних елементи, чия різниця кратна 40.

***Відповідь:*** 26.

***Розв'язання.*** Спочатку знайдемо кількість елементів множини $A$. Оскільки $\frac{x^3-x}{24} = \frac{(x-1)x(x+1)}{24}$, то добуток трьох послідовних чисел завжди ділиться на 3, щоб число було натуральним треба, щоб або $x \pm 1$ були парними, тоді добуток двох сусідніх парних чисел ділиться щонайменше на $2 \cdot 4 = 8$, або щоб $x \vdots 8$. Таким чином треба порахувати шукану кількість.

Чисел першого типу стільки, скільки непарних чисел у множині $M$ – тобто 1011. Але треба виключити число $x = 1$, бо для нього $x^3 - x = 0$ – не натуральне.

Чисел другого типу, скільки чисел, що кратні 8 у множині $M$ – тобто 252.

Разом $1010 + 252 = 1262$.

З кожного класу остач при діленні на 40 можна обрати по числу, окрім остач які діляться на 2 і не діляться на 8, тому виходить 20 непарних та 5, які кратні 8, тобто всього 25. Але більше неможна додати жодного елементу, тому шукане найменше $n = 26$.

**2.** Скількома способами з чисел $1, 2, 3, \ldots, 101$ можна вибрати 4 числа, що утворюють зростаючу арифметичну прогресію?

Нагадаємо, що числа $a, b, c, d$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію, якщо $b - a = c - b = d - c > 0$.

***Відповідь:*** 1650.

***Розв'язання.*** Найбільше можливе значення різниці прогресії дорівнює $\frac{101-1}{3}$, для цілих чисел це значення має бути цілим, тому найбільше 33. Тепер проводимо належне обчислення. Прогресій з різницею 1 є $101 - 1 \cdot 3 = 98$, з різницею 2 таких прогресій є $101 - 2 \cdot 3 = 95$, з різницею 3 є $101 - 3 \cdot 3 = 92$, …, з різницею 33 є $101 - 33 \cdot 3 = 2$. Таким чином їхня кількість $2 + 5 + \cdots + 98 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 33 = 1650$.

**3.** У чарівний палац 1 січня 2021 року зібралися чарівниці. Кожного дня в усіх чарівниць окрім однієї покращується краса та магічна сила, а у чарівниці, що лишилася – покращується лише одна з цих якостей, а інша якість може погіршитися і суттєво. Виявилося, що після 31 грудня 2021 року усі чарівниці не змінили свої якості. Скільки максимум чарівниць могло зібратися в чарівному палаці?

***Відповідь:*** 182.
***Розв'язання.*** Якщо якась якість у чарівниці покращувалася кожного дня, то по завершенні 365 днів залишитись без змін вона не могла. Тому, щоб чарівниця не змінилась, необхідно щоб кожна її якість принаймні один раз погіршилася або лишалася без змін. Якщо чарівниць хоча б 183, то сумарно в них якостей $183 \cdot 2 = 366 > 365$ – це більше, ніж днів у році. Але кожного дня погіршується або не змінюється лише одна якість в однієї з чарівниць. Тому такого бути не могло. Для 182 чарівниць це можливо. Тоді в них 364 якості. Нехай кожного дня відбувається погіршення однієї з якостей, разом зменшень 365. З 363 якостей буде по одному погіршенню за рік та рівно настільки, наскільки воно покращиться за усі інші дні. У останньої якості буде рівно два погіршення настільки, наскільки воно покращилося за інші 363 дні. Таким чином усі чарівниці не зміняться.

**4.** Прямокутник $ABCD$ та паралелограм $AEGH$ розташовані таким чином, що вершина $E$ лежить на стороні $CD$, вершина $B$ лежить на стороні $GH$ та $EG \cap CB = F$. Відомо, що площа чотирикутника $AEFB$ дорівнює сумі площ чотирьох трикутників $ADE$, $CFE$, $BFG$ та $ABH$, а також $DE = \frac{1}{5}CE$. Знайдіть відношення $BF : BC$.

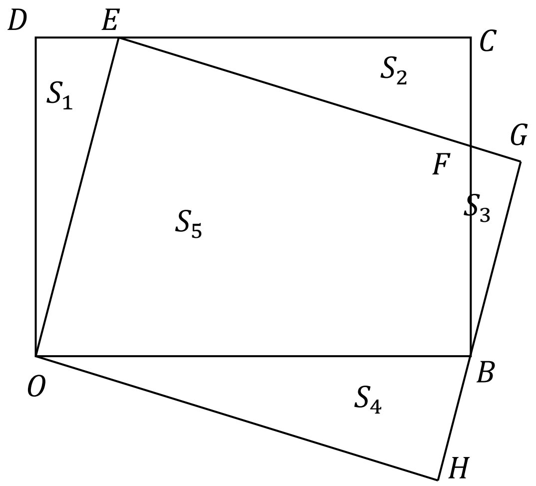


**Рис. 11**

***Відповідь:*** $BF : BC = 2 : 5$.
***Розв'язання.*** Маємо такі рівності для площ різних фігур (рис. 11).

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2S_{ABE} = 2S.$$

Позначимо через $h$ – висоту з точки $H$ на пряму $AE$, тоді

$$2S = AE \cdot h = S_{AEGH} = S_{ABCD}.$$

Позначимо площі трикутників та внутрішнього чотирикутника $AEFB$ як на рис. 1.

$$S_{ABCD} = S_5 + S_1 + S_2 = 2(S_1 + S_2) + (S_3 + S_4),$$
$$S_{AHGE} = S_5 + S_3 + S_4 = (S_1 + S_2) + 2(S_3 + S_4) \Rightarrow$$
$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \Rightarrow S_{ABCD} = 3(S_1 + S_2).$$

З умови $DE = \frac{1}{6}DC \Rightarrow S_1 = \frac{1}{12}S_{ABCD}$. $S_2 = (\frac{1}{3} - \frac{1}{12})S_{ABCD} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.
$S_2 = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot S_{BCD} = \frac{5}{6} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD} = \frac{5}{12} \cdot \frac{FC}{BC} \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABCD} \Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{FB}{BC} = \frac{2}{5}$.

**5.** Задача № 5 молодшої ліги.

**6.** Задача № 6 наймолодшої ліги.

**7.** Відомо, що коробка містить 1007 білих та 1007 чорних м'ячів, що занумеровані числами $1, 2, \dots, 2014$. На кожному кроці випадковим чином вибираємо один чорний та один білий шар і отримуємо $|b - a|$ очок, де $a, b$ номери м'ячів. Яку максимальну кількість очок може гарантовано набрати за будь-якої нумерації м'ячів?

***Відповідь:*** 1007.

***Розв'язання.*** Можлива ситуація, при якій м'ячи йдуть по черзі і ми вибираємо їх послідовно 1-й та 2-й, 3-й та 4-й і так далі, тому зможемо отримати 1007 очок. Меншою очевидно ця сума бути не може.

**8.** Задача № 8 молодшої ліги.

**9.** Зайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 100 менше добутку двох інших послідовних натуральних чисел. Вкажіть усі можливі такі пари.

***Відповідь:*** $(49, 50)$, $(10, 11)$ та $(7, 8)$.
***Розв'язання.*** Позначимо більшу пару через $n, n+1$, а меншу пару – через $m, m+1$. Тоді справджується рівність:

$$n^2 + n - m^2 - m = 100 \Rightarrow (n-m)(n+m+1) = 2^2 \cdot 5^2.$$

Таким чином добуток двох чисел різної парності дорівнює $100$, при цьому множник $n - m < n + m + 1$. Випишемо усі варіанти розкладу $100$ як добутку двох множників рівної парності: $100 = 1 \cdot 100 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20$. Таким чином знаходимо 3 розв'язки.

$$\begin{cases} n-m=1, \\ n+m+1=100, \end{cases} \Rightarrow 2n+1 = 101 \Rightarrow n = 50, m = 49.$$
$$\begin{cases} n-m=4, \\ n+m+1=25, \end{cases} \Rightarrow 2n+1 = 29 \Rightarrow n = 14, m = 10.$$
$$\begin{cases} n-m=5, \\ n+m+1=20, \end{cases} \Rightarrow 2n+1 = 25 \Rightarrow n = 12, m = 7.$$

**10.** Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x\left(1+\dfrac{x}{y}\right) = 225, \\ y\left(1+\dfrac{y}{x}\right) = 144. \end{cases}$$

***Відповідь:*** $(x, y) = (100, 80), (-900, 720)$.
***Розв'язання.*** Перепишемо систему рівнянь таким чином:

$$\begin{cases} \frac{x(x+y)}{y} = 225, \\ \frac{y(x+y)}{x} = 144. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 225 \cdot 144, \\ \frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{16}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = \pm 180, \\ \frac{x}{y} = \pm\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Якщо $x, y > 0$, то $\begin{cases} x+y = 180, \\ 4x = 5y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100, \\ y = 80. \end{cases}$

Якщо $x, y < 0$, то $x + y < 0 \Rightarrow \frac{x(x+y)}{y} < 0$ – суперечність.

Якщо $xy < 0$, то має бути $x + y < 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y = -180, \\ 4x = -5y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -900, \\ y = 720. \end{cases}$

**11.** У країні є 2015 міст, кожні два з яких з'єднані між собою двостороннім авіарейсом. Яка найменша кількість авіакомпаній може бути в країні, якщо відомо, що між будь-якими трьома містами 3 авіарейси здійснюють 3 різні авіакомпанії?

***Відповідь:*** 2015.
***Розв'язання.*** Кожна компанія може мати максимум 1007 авіарейсів, бо при більшій кількості серед цих авіарейсів принаймні двічі зустрінеться одне місто – суперечність. Тому компаній не може бути менше, ніж $\frac{C_{2015}^2}{1007} = 2015$. Що такої кількості вистачить, випливає з прикладу. Якщо міста перенумерувати числами $1, 2, .., 2015$, то можна з'єднати міста за таким принципом: міста $i$ та $j$ з'єднуються компанією $(i + j) \pmod{2015}$.

**12.** Заданий паралелограм $ABCD$ зі сторонами $AB = 6$ та $AD = 2\sqrt{3}$. Будуємо коло $k_1$ з центром у точці $A$, що проходить через точку $B$, коло $k_2$ з центром у точці $C$, що проходить через точку $B$, а також третє коло $k_3$ з центром у точці $D$, що перетинає кола $k_1$ та $k_2$ у точках $M_1, N_1$ та $M_2, N_2$ відповідно. Знайдіть відношення $M_1N_1 : M_2N_2$.

***Відповідь:*** $\sqrt{3}$.

***Розв'язання.*** За трьома сторонами $\Delta ADM_1 = \Delta CM_2D$ (рис. 12).

$\Delta AN_1M_1$ – рівнобедрений, в якому $N_1M_1$ – основа і дорівнює подвоєній висоті $\Delta ADM_1$, що проведена на сторону $AD$.

Аналогічно $\Delta DN_2M_2$ – рівнобедрений, в якому $N_2M_2$ – основа і дорівнює подвоєній висоті $\Delta CDM_2$, що проведена на сторону $CD$.

З рівності зазначених трикутників

$$AD \cdot N_1M_1 = CD \cdot N_2M_2 \Rightarrow \frac{N_1M_1}{N_2M_2} = \frac{CD}{AD} = \sqrt{3}.$$

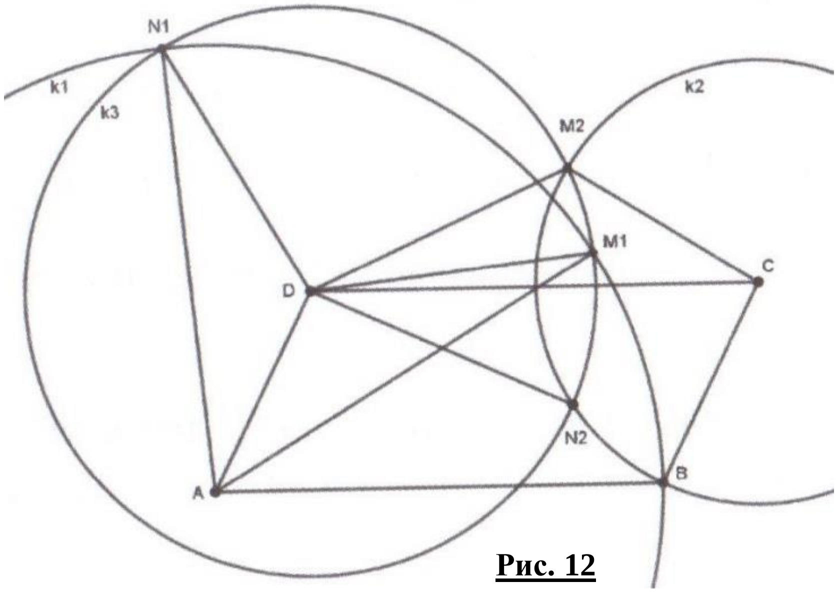


**Рис. 12**

**13.** Замініть букви в ребусі $A : B : C + D : E : F + G : H : I = J$ попарно різними цифрами так, щоб вийшла правильна рівність.

***Відповідь:*** $5 : 4 : 3 + 7 : 6 : 2 + 0 : 8 : 9 = 1$.

***Розв'язання.*** Розв'язок декілька, наприклад, такий:

$$5 : 4 : 3 + 7 : 6 : 2 + 0 : 8 : 9 = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} + 0 = 1.$$

**14.** Бригада з декількох робочих за 14 повних робочих дні може виконати певну роботу, яку може виконати таж саме бригада без трьох працівників за декілька повних днів, а також таж саме бригада без п'яти працівників за декілька повних днів. Яка найбільша кількість робочих могла бути в цій бригаді з самого початку?

***Відповідь:*** 10.

***Розв'язання.*** Позначмо через $n$ – кількість робітників у бригаді з самого початку. Припустимо, що зменшена на 3 робітників бригада могла виконати роботу за $l$ днів, а зменшена на 5 робітників бригада могла виконати роботу за $m$ днів Тоді мають справджуватися такі рівності:

$$14n = l(n-3) = m(n-5).$$

З першої рівності $\frac{14n}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3} \Rightarrow n - 3 \in \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\} \Rightarrow n \in \{4, 5, 6, 9, 10, 17, 24, 45\}$.

Аналогічно $\frac{14n}{n-5} = 14 + \frac{70}{n-5} \Rightarrow n - 5 \in \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\} \Rightarrow n \in \{6, 7, 10, 12, 15, 19, 40, 75\}$.

Як бачимо спільні значення – це $n = 6$ та $n = 10$, отож шуканим значенням є більше з них, тобто 10.

**15.** Задача № 15 наймолодшої ліги.

**16.** Знайдіть найбільше можливе натуральне число, яке буде дорівнювати стороні рівностороннього трикутника, вершини якого можна розмістити всередині (не на межі) квадрата зі стороною 100.

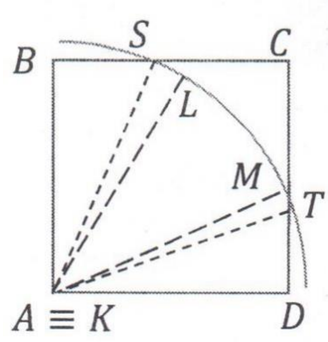


**Рис. 13**

***Відповідь:*** 103.

***Розв'язання.*** Ми будемо вкладати шуканий рівносторонній $\Delta KLM$ всередину квадрату $ABCD$. Відмітимо для кожної сторони квадрату ту вершину трикутника, яка є найближчою до цієї сторони. З принципу Діріхле принаймні один з кутів був відмічений двічі. Нехай цей кут при вершині $K$. Очевидно, що $K$ не може бути найближчим до двох протилежних сторін квадрату, тому вона є найближчою до деяких двох суміжних сторін, наприклад, до $AB$ та $AD$. Тоді ми можемо його посунути так, що вершина $K$ потрапить в вершину $A$ квадрата. Нехай сторона трикутника – це $a$. Тоді побудуємо коло з центром у точці $A \equiv K$ та радіусом $a$, нехай воно перетне периметр квадрату в точках $S$ та $T$. Зрозуміло, що $LM = a$, окрім того точки $L, M \in \smile ST$, тому $ST > a$. Очевидно, що остання нерівність не лише необхідна, але й достатня, дійсно, якщо вона справджується, то на цій дузі можна розташувати шукані точки $L, M$.

Залишається оцінити можливе значення $a$. Це можна зробити через теорему Піфагора, але простіше видається використати, що за таких умов $\angle BAS < 15°$. Оскільки

$$\cos \angle BAS = \frac{100}{a} > \cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow a < \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = 100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

Покажемо, що шукане натуральне значення – це 103, для цього достатньо перевірити такі нерівності.

$$103 < 100\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) < 104 \ \Leftrightarrow 10609 < 10000\left(8-4\sqrt{3}\right) < 10816.$$

Для лівої нерівності маємо: $40000\sqrt{3} < 69391$, яка випливає з такої $40000\sqrt{3} < 69300 \Leftrightarrow 400\sqrt{3} < 693 \Leftrightarrow 480000 < 480249$.

Для правої нерівності: $40000\sqrt{3} > 69184 \Leftrightarrow 400\sqrt{3} > 692 \Leftrightarrow 480000 > 478864$.

**17.** Петрику подобаються усі числа, що не діляться на 3, а Василю подобаються усі числа, в яких немає цифр, що діляться на 3. Розглянемо усі чотирицифрові числа, що подобаються одночасно і Петрику, і Василю. Чому дорівнює сума цифр усіх таких чотирицифрових чисел?

***Відповідь:*** 14580.

***Розв'язання.*** Шукані числа мають бути складеними з цифр $1, 2, 4, 5, 7, 8$ , при цьому в кожному числі сума цифр не має бути кратною 3. Розіб'ємо їх на дві групи: група «А» -- це цифри $1, 4, 7$, а група «Б» -- це цифри $2, 5, 8$. Число, що задовольняє умові задачі має бути складеним одним з чотирьох способів:

1) 4 цифри з групи «А»;
2) 4 цифри з групи «Б»;
3) 3 цифри з групи «А» и 1 цифра з групи «Б»;
4) 3 цифри з групи «Б» и 1 цифра з групи «А».

Усього таких чисел буде $3^4 + 3^4 + 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^4 = 10 \cdot 3^4 = 810$.

Для пошуку загальної суми цифр з усіх цих чисел розіб'ємо їх на пари: друге число пари визначається по першому таким чином: воно отримується з першого заміною усіх цифр за принципом $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 7$ та $4 \leftrightarrow 5$. Наприклад, число $1545 \leftrightarrow 8454$. . Сума цифр будь-якої пари дорівнює 9, а кількість таких пар 405. Тому шукана сума усіх цифр дорівнює $9 \cdot 4 \cdot 405 = 14580$.

**18.** Знайдіть усі дійсні корені рівняння

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

якщо відомо, що це 4 попарно різних числа, сума двох з яких дорівнює 1.

***<u>Відповідь:</u>*** $\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}, 1 \pm \sqrt{3}$.

***<u>Розв'язання.</u>*** Позначимо ці корені через $a, b, c, d$. Тоді з теореми Вієта маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = -\frac{7}{4}, \\ abc + abd + acd + bcd = -\frac{11}{2}, \\ abcd = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Крім того, $a + b = 1$. Далі послідовно знаходимо, що $c + d = 2$. Перепише деякі з цих рівнянь:

$$(a + b)(c + d) + ab + cd = -\frac{7}{4}, (a + b)cd + (c + d)ab = -\frac{11}{2} \Rightarrow$$

$$ab + cd = -\frac{15}{4}, cd + 2ab = -\frac{11}{2} \Rightarrow ab = -\frac{7}{4}, cd = -2 \Rightarrow$$

знаходимо остаточно шукані корені:

$$a, b = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}, c, d = 1 \pm \sqrt{3}.$$

**19.** Задана таблиця $2 \times 20$. В її комірки треба розставити числа $1, 2, \dots, 40$ так, щоб кожне число зустрілося рівно один раз, а суми чисел у кожному рядку та у кожному стовпчику були непарними. Скількома способами це можна зробити?

***<u>Відповідь:</u>*** $2^{19} \cdot (20!)^2$.

***<u>Розв'язання.</u>*** Зафарбуємо комірки, в яких стоятимуть непарні числа. Очевидно, що в кожному стовпчику з двох комірок має бути рівно одна така зафарбована клітинка. Ми можемо зафарбувати довільним чином клітинку в усіх стовпчиках, окрім першого – варіантів $2^{19}$, далі в першому стовпчику клітинка фарбується однозначно, щоб у рядках були непарні суми чисел. Залишається у зафарбовані клітинки поставити непарні числа від 1 до 39, що можна зробити $20!$ Способами, аналогічно й для парних чисел. Звідси отримуємо шукану відповідь.

**20.** Задача № 20 молодшої ліги.

## <u>Старша ліга</u>

**1.** Задача № 1 середньої ліги.

**2.** Скількома способами з чисел $1, 2, 3, \dots, 2021$ можна вибрати 4 числа, що утворюють зростаючу арифметичну прогресію?

Нагадаємо, що числа $a, b, c, d$ утворюють зростаючу арифметичну прогресію, якщо $b - a = c - b = d - c > 0$.

***<u>Відповідь:</u>*** 679730.

***<u>Розв'язання.</u>*** Найбільше можливе значення різниці прогресії дорівнює $\frac{2021-1}{3}$, для цілих чисел це значення має бути цілим, тому найбільше 673. Тепер проводимо належне обчислення. Прогресій з різницею 1 є $2021 - 1 \cdot 3 = 2018$, з різницею 2 таких прогресій є $2021 - 2 \cdot 3 = 2015$, з різницею 3 є $2021 - 3 \cdot 3 = 2012$, ..., з різницею 673 є $2021 - 673 \cdot 3 = 2$. Таким чином їхня кількість $2 + 5 + \dots + 2018 = \frac{1}{2} \cdot 2020 \cdot 673 = 679730$.

**3.** Задача № 3 середньої ліги.

**4.** Задача № 4 середньої ліги.

**5.** Задача № 5 молодшої ліги.

**6.** Знайдіть усі функції $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, для яких для усіх цілих $x, y$ справджується рівність:

$$f(f(x) + y) = x + f(y + 2006).$$

***<u>Відповідь</u>:*** $x + 2006$, $2006 - x$.

***<u>Розв'язання</u>.*** При $y = 0$ та $y = 1$ матимемо, що

$$f\big(f(x)\big) = x + f(2006), f(f(x) + 1) = x + f(2007) \qquad (\mathbf{1}).$$

Тоді

$$f(f(x) + 1) - f\big(f(x)\big) = f(2007) - f(2006).$$

Якщо для деякого $x$ маємо, що $z = f(x)$, тобто $z \in E_f$:

$$f(z + 1) - f(z) = f(2007) - f(2006) \qquad (\mathbf{2}).$$

З рівності (1) бачимо, що $E_f = \mathbf{Z}$. Але тоді рівність (2) справджується для усіх $z$, тому $f(x)$ – арифметична прогресія. Таким чином $f(x) = ax + b$, звідки матимемо, що

$$f(f(x) + y) = a(f(x) + y) + b = a^2x + ay + ab + b = x + f(y + 2006) =$$
$$= x + a(y + 2006) + b = x + ay + 2006a + b.$$

Оскільки це справджується для усіх цілих $x, y$, то $a = \pm 1$ та $b = 2006$. Перевіркою переконуємося, що обидві ці функції задовольняють умову.

**7.** Задача № 7 середньої ліги.

**8.** Задача № 8 молодшої ліги.

**9.** Зайдіть два послідовних натуральних числа, добуток яких на 1000 менше добутку двох інших послідовних натуральних чисел. Вкажіть усі можливі такі пари.

***<u>Відповідь</u>*** $(499, 500)$, $(97, 98)$, $(58, 59)$ та $(7, 8)$.

***<u>Розв'язання</u>.*** Позначимо більшу пару через $n, n + 1$, а меншу пару – через $m, m + 1$. Тоді справджується рівність:

$$n^2 + n - m^2 - m = 1000 \Rightarrow (n - m)(n + m + 1) = 2^3 \cdot 5^3.$$

Таким чином добуток двох чисел різної парності дорівнює 1000, при цьому множник $n - m < n + m + 1$. Випишемо усі варіанти розкладу 1000 як добутку двох множників рівної парності: $1000 = 1 \cdot 1000 = 5 \cdot 200 = 8 \cdot 125 = 25 \cdot 40$. Таким чином знаходимо 3 розв'язки.

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m + 1 = 1000, \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 1001 \Rightarrow n = 500, m = 499.$$

$$\begin{cases} n - m = 5, \\ n + m + 1 = 200, \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 205 \Rightarrow n = 102, m = 97.$$

$$\begin{cases} n - m = 8, \\ n + m + 1 = 125, \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 133 \Rightarrow n = 66, m = 58.$$

$$\begin{cases} n - m = 25, \\ n + m + 1 = 40, \end{cases} \Rightarrow 2n + 1 = 65 \Rightarrow n = 32, m = 7.$$

**10.** Задача № 10 середньої ліги.

**11.** Задача № 11 середньої ліги.

**12.** Задача № 12 середньої ліги.

**13.** Замініть букви в ребусі $A : B : C + D : E : F + G : H : I = 1$ ненульовими попарно різними цифрами так, щоб вийшла правильна рівність.

***Відповідь:*** $1 : 3 : 6 + 5 : 8 : 9 + 7 : 2 : 4 = 1$.
***Розв'язання.*** Єдиний розв'язок такий:

$$1 : 3 : 6 + 5 : 8 : 9 + 7 : 2 : 4 = \frac{1}{18} + \frac{5}{72} + \frac{7}{8} = \frac{4}{72} + \frac{5}{72} + \frac{7}{8} = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1.$$

**14.** Задача № 14 середньої ліги.

**15.** Є множина $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160\}$. Розглянемо усі можливі триелементні підмножини цієї множини. Яких серед них більше, добуток елементів яких більше $2022$ чи менше $2022$?

***Відповідь:*** однакова.
***Розв'язання.*** Написана множина – усі дільники числа $160 = 2^5 \cdot 5$. Розглянемо такі дві триелементні підмножини: $\{a, b, c\}$ та $\left\{\frac{160}{a}, \frac{160}{b}, \frac{160}{c}\right\}$. Неважко порахувати, що усі дільники мають вигляд $2^i \cdot 5^j$, $i = \overline{0,5}$, $j = 0, 1$, а тому добутки підмножин $2^k \cdot 5^l$, $k = \overline{0,14}$, $l = \overline{0,3}$. Найбільший такий добуток, що менше $2022$ – це $2^4 \cdot 5^3 = 2000$, найменший, що більше $2022$ – це $2^{11} = 2048$. Оскільки добуток цього найбільшого та найменшого числа дорівнює $2^{15} \cdot 5^3 = 160^3$. Таким чином усі такі підмножини розбиваються на пари зазначених вище множин $\{a, b, c\}$ та $\left\{\frac{160}{a}, \frac{160}{b}, \frac{160}{c}\right\}$, якщо в одній з них, наприклад, $\{a, b, c\}$ добуток елементів $abc < 2022$, то в іншій – добуток елементів $\frac{160}{a} \cdot \frac{160}{b} \cdot \frac{160}{c} = \frac{160^3}{abc} > 2022$. Таким чином кількість множин обох типів однакова.

**16.** Задача № 16 середньої ліги.

**17.** Задача № 17 середньої ліги.

**18.** Знайдіть найбільше можливе значення виразу $|(x - y)(y - z)(z - x)|$ для довільних $x, y, z$, що задовольняє умови: $x + y + z = 0$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

***Відповідь:*** $6\sqrt{3}$.
***Розв'язання.*** без обмеження загальності розгляду вважатимемо, що $x \geq y \geq z$. Покладемо для деяких $a, b \geq 0$, що $x = y + a, y = z + b$. Тоді треба знайти максимум виразу $A = ab(a + b)$. При цьому $x + y + z = 0$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 6$. Тоді

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 18 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 + ab = 9 \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2 \leq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + ab) = 3.$$

Звідси маємо, що

$$ab \leq 3 \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab = 9 + ab \leq 12 \Rightarrow a + b \leq 2\sqrt{3} \Rightarrow A \leq 6\sqrt{3}.$$

Це значення досягається на такому наборі: $x = \sqrt{3}$, $y = 0$, $z = -\sqrt{3}$.

**19.** Задача № 19 середньої ліги.

**20.** Задача № 20 молодшої ліги.