Київський національний університет імені Тараса Шевченка

IV Всеукраїнська олімпіада з математики для учнів 5–7 класів

Умови та вказівки до розв’язань задач

1 тур

«Життя – це гра.
Задумана так собі, але графіка неперевершена»

1 квітня 2021 року

5 клас

1. Чи можна виписати 7 таких натуральних чисел, щоб кожні два сусідніх числа відрізнялися на 1 і сума всіх семи чисел була рівною 100?

Відповідь: так, наприклад $13 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 100$.
Розв'язання. Сусідні числа йдуть по черзі – парне-непарне-парне… чи непарне-парне-непарне…, оскільки сума парна, то непарних має бути парна кількість, тобто ці числа мають розпочинатися з непарного числа. Оскільки $100 : 7 = 14$ з остачею 2, то розглянемо таку суму:

$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 112.$$

Таким чином, 6 з цих чисел треба зменшити на 2, і отримаємо шукане подання:

$$13 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 100.$$

2. Яку найбільшу кількість прямокутників 1×10 можна вирізати з квадрату 17×17?

Відповідь: 28.
Розв'язання. Площа заданого квадрату $17 \cdot 17 = 289$, тому вирізати не можна більше 28 таких прямокутників, що легко реалізується (рис. 1).

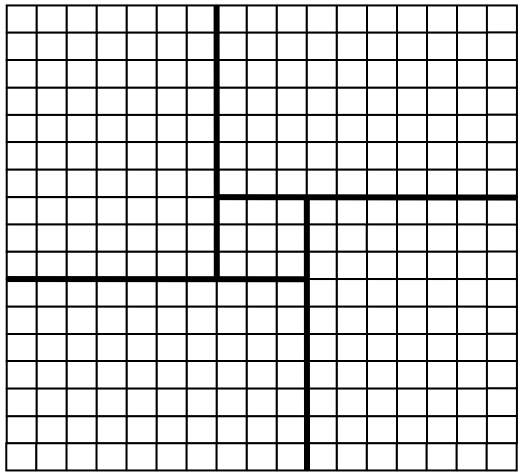

Рис. 1

3. Є квадрат 5×5, вертикалі якого зліва направо та горизонталі знизу догори занумеровані числами $1, 2, 3, 4, 5$. Кожна клітинка має номер, який утворює пара чисел (a, b), де a – номер горизонталі, b – номер вертикалі. Жучок за один крок може переповзти з клітини, де він розташований, у будь-яку сусідню по стороні клітинку заданого квадрату. Скількома способами він зможе переповзти рівно за 6 кроків з клітинки $(2,2)$ у клітинку $(4,4)$, якщо не можна двічі ставати за цей шлях в ту саму клітинку?

Відповідь: 24.
Розв'язання. Щоб потрапити за 6 кроків заданим напрямом, то жучок має зробити 3 кроки вгору, 2 праворуч та 1 донизу, або 3 кроки праворуч, 2 нагору та 1 ліворуч. Очевидно, що кількість таких шляхів таких двох типів однакова. Розглянемо кількість шляхів першого типу. Щоб жучок двічі не був в тій самій клітині, не повинні послідовно відбуватися хід нагору та донизу. Тепер розглянемо можливі варіанти.
Якщо перший хід донизу, то другий обов'язково праворуч. Далі мають бути довільним чином розподілені 3 ходи вгорну та 1 хід праворуч. Таких варіантів 4. Повністю аналогічна ситуація, коли хід донизу останній.
Якщо хід донизу не перший чи останній, то до нього та після нього мають відбуватися ходи направо. Таким чином, існує такий єдиний маршрут. І усього таких варіантів 4 – тобто хід донизу може бути 2-м, 3-м, 4-м чи 5-м. Разом 12 варіантів і загалом 24.

4. Зобразіть шестикутник, який однією прямою можна розрізати на 4 рівних трикутники.

Розв'язання. Приклад відповідного шестикутника показаний на рис. 2.

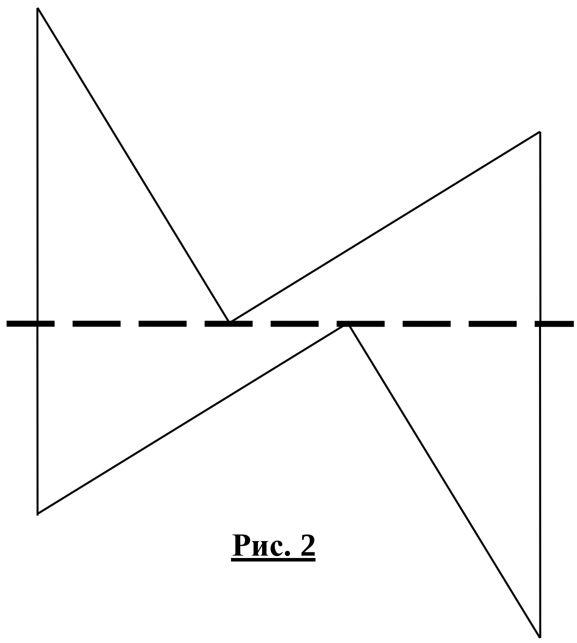

Рис. 2

5. Петрик на дошці написав 5 не обов'язково різних натуральних чисел. Після цього Івасик написав на своїй дошці усі 10 можливих сум пар чисел, які записав Петрик. Оксана з дошки Івасика з декількох однакових чисел лишила по одному, витерши усі зайві. Остаточно на дошці лишилися написаними три числа: 10, 16 та 22. Які 5 чисел написав Петрик з самого початку? Вкажіть усі можливі варіанти.

Відповідь: $(2, 8, 8, 8, 14)$, $(5, 5, 5, 11, 11)$ та $(5, 5, 11, 11, 11)$.
Розв'язання. Якщо з 5 чисел було написане принаймні 3 різних, наприклад, $a < b < c$, то точно різними стають такі записані Івасиком числа: $a + b, a + c, b + c$, причому $a + b < a + c < b + c$. Таким чином, ситуація можлива лише за умов, що числа a та c записані рівно по одному разу (інакше додалося б число $a + a$, яке менше за $a + b$ або $c + c$, яке більше за $b + c$), а число b має задовольняти умову $a + c = 2b$.
Знайдемо можливі числа за таких умов. $2b = a + c = 16 \Rightarrow b = 8$. Далі просто, оскільки $a + b = 10$, то $a = 2$, та $b + c = 22$, то $c = 14$. Маємо першу відповідь: $(2, 8, 8, 8, 14)$.
Якщо різних чисел Петрик записав не менше 4-х, то після Оксанки залишиться більше трьох чисел.
Якщо числа, записані Петриком, усі однакові, то Оксанка мала лишити 1 число.
Таким чином, ще треба розглянути випадок, коли Петрик записав рівно 2 різних числа. Очевидно, що для чисел $a < b$ варіанти (a, b, b, b, b) та (a, a, a, a, b) не задовольняють умову, бо матимемо лише по 2 різних числа, що залишаться після дій Оксани. Таким чином, лишаються можливими варіанти (a, a, b, b, b) та (a, a, a, b, b). Знайдемо можливі значення цих чисел: оскільки $a + a < a + b < b + b$, то $a + a = 10$, $a + b = 16$ та $b + b = 22 \Rightarrow a = 5$ та $b = 11$.

<u>6 клас</u>

1. На день народження віслюка Іа його друзі Вінні, Сова та П'ятачок вирішили подарувати йому повітряні кульки. За домовленістю між ними Вінні мав принести кульок у 2 рази більше за П'ятачка, а Сова – у 3 рази більше за П'ятачка. Коли вони зібралися, то Іа отримав рівно 31 кульку, бо, як завжди, П'ятачок надто поспішав і деяку кількість своїх кульок дорогою розтрощив. Скільки кульок врешті решт доніс П'ятачок?

Відповідь: 1 кульку.
Розв'язання. Позначимо кількість кульок, що мав принести П'ятачок через x, тоді Сова мала принести $3x$, а Вінні – $2x$. Тобто разом вони усі мали принести $6x$ кульок. Зрозуміло, що $x \geq 6$.
Якщо $x = 6$, то вони мали принести 36, таким чином не донесли 5 кульок. Тобто П'ятачок приніс рівно 1 кульку.
Якщо $x = 7$, то вони мали принести 42 кульки, таким чином, було б не донесено 11 кульок. Тобто не лише П'ятачок мав розтрощити кульки, що суперечить умові.

2. Задача № 3 за 5 клас.

3. Задача № 4 за 5 клас.

4. Тридцять три козаки боронили Січ за 240 золотих монет. Хитрий отаман має право ділити козаків на загони як йому заманеться (хоч 1 загін з усіх 33 козаків, хоч декілька загонів з різною чи однаковою кількістю). Далі він ділить суму 240 між загонами. Після цього у кожному загоні усі монети діляться порівну між козаками так, щоб кожний козак отримав максимальну можливу кількість монет, а остачу віддають отаману. Наприклад, якщо загону з 5 козаків дали б 34 монети, то кожному козакові цього загону дісталося б по 6 монет, після чого остача з 4 монет дісталася б отаману. Яка найбільша кількість монет може дістатися отаману, якщо він розподіляє ці 240 монет як завгодно між загонами?

Відповідь: 31.
Розв'язання. Нехай в k загонах відповідно $n_1, \ldots, n_k$ козаків. Суми, що були виділені дорівнюють відповідно $S_1, \ldots, S_k$. Тоді справджуються умови: $S_1 = n_1q_1 + r_1$, …, $S_k = n_kq_k + r_k$, де $r_1 < n_1$, …, $r_k < n_k$, або $r_1 \leq n_1 - 1$, …, $r_k \leq n_k - 1$. Тоді отаман отримає

$$r_1 + \ldots + r_k \leq n_1 - 1 + \ldots + n_k - 1 = 33 - k,$$

таким чином найбільша сума, яку може отримати отаман дорівнює $33 - k$, де k – кількість загонів. Для $k = 1$ маємо, що $240 = S_1 = 33 \cdot 7 + 9$, тобто отаман отримає лише 9 золотих.

Для $k = 2$ спробуємо отримати суму 31. $S_1 = n_1q_1 + n_1 - 1$, $S_2 = n_2q_2 + n_2 - 1$, $n_1 + n_2 = 33$ $\Rightarrow 240 = S_1 + S_2 = n_1q_1 + n_1 - 1 + n_2q_2 + n_2 - 1 = n_1q_1 + n_1 - 1 + (33 - n_1)q_2 + 33 - n_1 - 1 =$

$$= n_1(q_1 - q_2) + 33q_2 + 31 \Rightarrow 209 = n_1(q_1 - q_2) + 33q_2.$$

Виберемо, наприклад, $q_2 = 6 \Rightarrow 209 = n_1(q_1 - 6) + 198 \Rightarrow n_1(q_1 - 6) = 11$. Підберемо $n_1 = 11 \Rightarrow n_2 = 22, q_1 = 7$. Тоді $S_1 = 11 \cdot 7 + 10 = 87$ та $S_2 = 22 \cdot 6 + 21 = 153 \Rightarrow$ Отаман отримає $10 + 21 = 31$ – максимальне можливе.

5. Петрик на дошці написав 5 не обов'язково різних натуральних чисел. Після цього Івасик написав на своїй дошці усі 10 можливих сум пар чисел, які записав Петрик. Оксана з дошки Івасика з декількох однакових чисел лишила по одному, витерши усі зайві. Остаточно на дошці лишилися написаними чотири числа: 17, 20, 24 та 27. Які 5 чисел написав Петрик з самого початку? Вкажіть усі можливі варіанти.

Відповідь: $(7, 10, 10, 10, 17)$ та $(5, 12, 12, 12, 15)$.
Розв'язання. Нехай з 5 чисел, що були написані Петриком з самого початку, рівно 3 різних: $a < b < c$. З такого порівняння чисел

$$a + a < a + b < a + c < b + c < c + c,$$

Розуміємо, що числа a та c не повторюються, оскільки найменше та найбільші числа, що лишилися – непарні, а тому бути рівними $2a$ та $2b$ не можуть. Таким чином, єдиний можливий набір (a, b, b, b, c) та числа, що лишаться насамкінець такі: $a + b, a + c, b + b$ та $b + c$. При цьому можливі два випадки щодо їх упорядкування по зростанню: $a + c > 2b$ або $a + c < 2b$. Розглянемо обидва.
Випадок 1. $20 = 2b < a + c = 24$, тоді $b = 10$. Далі $a + b = 17 \Rightarrow a = 7$ та $b + c = 27 \Rightarrow c = 17$ і усі умови справджуються.
Випадок 2. $20 = a + c < 2b = 24$, тоді $b = 12$. Далі $a + b = 17 \Rightarrow a = 5$ та $b + c = 27 \Rightarrow c = 15$ і усі умови справджуються.
Якщо різних чисел Петрик записав менше трьох, то після Оксанки залишиться не більше трьох чисел. Якщо числа записані Петриком усі різні, то Оксанка мала лишити не менше 5 чисел.
Таким чином, ще треба розглянути випадок, коли Петрик записав рівно 4 різних числа. Знову таки перше та останнє число не повторюються, тому можливі і тут два випадки. Але для кожного з них $a < b = c < d < e$ та $a < b < c = d < e$ Тоді точно різними є такі числа:

$$a + b < a + d < a + e < b + e < d + e \text{ або } a + b < a + c < a + e < b + e < d + e$$

і цих чисел не менше 5. Тобто ці випадки не можливі.

<u>7 клас</u>

1. Множина P, що складається з простих чисел, називається *простенькою*, якщо сума будь-яких трьох попарно різних її елементів дає в сумі просте число. Яку найбільшу кількість елементів може мати простенька множина?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Там не може бути числа 2, бо тоді сума трьох простих чисел, одне з яких 2, буде парною, а тому не простим числом.
Надалі усі числа розглядаємо за модулем 3. Якщо там є число $3 \equiv 0$, то не може бути двох чисел рівних 1 та 2, бо їхня сума з 0 – не просте число.

Якщо там немає 3, то може бути чисел 1 та 2 не більше ніж по 2, тобто максимальна кількість елементів – 4. Залишається показати, що така простенька множина дійсно існує.
Наприклад, {5,7,17,19}, відповідні суми по три елементи дорівнюють {43,41,31,29}.

2. Для натурального числа $k > 1$ задані $k + 2$ попарно різні натуральні числа, кожне з яких не перевищує $3k + 1$. Доведіть, що серед цих чисел є пара таких, що модуль їх різниці не менше за k та не більше за $2k$.

Розв'язання. Позначимо множину заданих чисел через S. Без обмеження загальності можемо вважати, що $1 \in S$. Інакше достатньо просто відняти найменший елемент множини S від кожного елемента та додати 1. Тоді нова множина так само має задовольняти умови задачі.
Якщо принаймні одне з чисел $\{k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1\}$ належить множині S, то твердження доведене, бо шукану пару утворюють цей елемент та 1.
Нехай тепер жодне з цих чисел не належить множині S, тоді поділимо усі числа на такі пари: $(2, 2k + 2)$, $(3, 2k + 3)$, …, $(k + 1, 3k + 1)$. Оскільки окрім 1, множина S містить $k + 1$ елемент, то за принципом Діріхле принаймні для однієї пари обидва елементи належать S. Саме вони й задовольняють умову задачі.

3. Тридцять три козаки боронили Січ за 240 золотих монет. Хитрий отаман має право ділити козаків на загони, кількість яких має бути дільником числа 240. А от козаків у кожному загоні може бути довільна кількість (хоч 1 загін з усіх 33 козаків). Далі він ділить суму 240 між загонами. Після цього у кожному загоні усі монети діляться порівну між козаками так, щоб кожний козак отримав максимальну можливу кількість монет. Після цього остачу віддають отаману. Наприклад, якщо загону з 5 козаків дали 34 монети, то кожному козакові цього загону дісталося б по 6 монет, після чого остача з 4 дісталася б отаману. Яка найбільша кількість монет може дістатися отаману, якщо він розподіляє 240 монет порівну між загонами, не зважаючи на кількість козаків в кожному з них?

Відповідь: 30.
Розв'язання. Нехай в загонах відповідно $n_1, \dots, n_k$ козаків. Суми, що були виділені дорівнюють відповідно $S_1, \dots, S_k$. Тоді справджуються умови: $S_1 = n_1 q_1 + r_1$, …, $S_k = n_k q_k + r_k$, де $r_1 < n_1$, …, $r_k < n_k$, або $r_1 \le n_1 - 1$, …, $r_k \le n_k - 1$. Тоді отаман отримає

$$r_1 + \dots + r_k \le n_1 - 1 + \dots + n_k - 1 = 33 - k,$$

таким чином найбільша сума, яку може отримати отаман дорівнює $33 - k$, де k – кількість загонів. Для $k = 1$ маємо, що $240 = S_1 = 33 \cdot 7 + 9$, тобто отаман отримає лише 9 золотих.

Для $k = 2$ спробуємо отримати суму 31. $S_1 = 120 = n_1 q_1 + n_1 - 1$, $S_2 = 120 = n_2 q_2 + n_2 - 1$, $n_1 + n_2 = 33 \Rightarrow n_1(q_1 + 1) = 121 = n_2(q_2 + 1)$. Таким чином n_1 та n_2 – дільники числа 121, але таких дільників, які б давали в сумі 33 не існує.

Таким чином наступне найбільше можливе значення для золотих в отамана – це 30. Цього можна досягати або розбивши на 3 загони, або щоб при розбитті на 2 загони одна з остач стала меншою на 2 від дільника. Підберемо числа для першого варіанту:

$$S_1 = 80 = n_1 q_1 + n_1 - 1, S_2 = 80 = n_2 q_2 + n_2 - 1, S_3 = 80 = n_3 q_3 + n_3 - 1 \Rightarrow$$
$$n_1(q_1 + 1) = 81, n_2(q_2 + 1) = 81, n_3(q_3 + 1) = 81 \Rightarrow$$

Тепер треба підібрати 3 дільники числа 81, які в сумі дають 33. Це легко підбирається: $27 + 3 + 3 = 33$, звідки й будується шуканий приклад:

$$n_1 = 27, q_1 = 2, n_2 = 3, q_2 = 26 \text{ та } n_3 = 3, q_3 = 26 \Rightarrow$$
$$27 \cdot 2 + 26 = 80, 26 \cdot 3 + 2 = 80, 26 \cdot 3 + 2 = 80 \Rightarrow 26 + 2 + 3 = 30.$$

4. Задача № 5 за 6 клас.

5. Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M та продовження сторони DC у точці N. Позначимо через O – центр описаного кола ΔMCN. Доведіть, що $\angle OBC = \angle ODC$.

Розв'язання. Оскільки $AD||BC$ та $AB||CD$, то

$$\angle CMN = \angle DAM = \angle BAN = \angle CNM,$$

тому $CM = CN$ (рис. 3). Оскільки $OM = ON = OC$, то $\Delta OCM = \Delta OCN \Rightarrow$

$$\angle OMC = \angle ONC = \angle OCN.$$

Звідси випливає, що $\angle OMB = \angle OCD$, тому $\angle BMA = \angle DAM = \angle BAM,$ звідки $BM = BA = CD$. Оскільки $OM = OC$, то $\Delta OMB = \Delta OCD$, тому $\angle OBM = \angle ODC$, звідси остаточно отримуємо, що $\angle OBC = \angle ODC$.

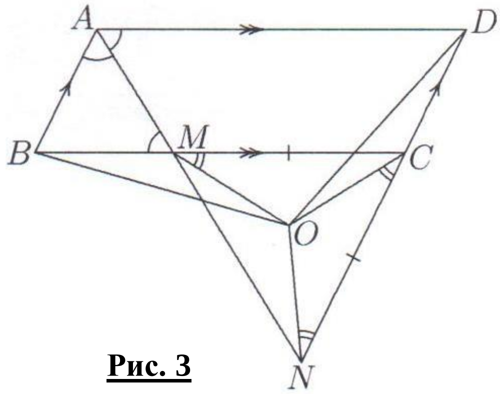

Рис. 3