# Олімпіада з геометрії

*"Те, що шукаєш, знайдеш лише обшукавши геть все."*
*Закон Буба*

## *Розв'язання задач*

## 4 клас

**1.** З кубиків зі стороною 1 будують піраміду. Перші верхні три шари цієї піраміди показані на рис. 1. Скільки кубиків буде використане на восьмий шар цієї піраміди?

***Відповідь:*** $225$.
***Розв'язання*.** У верхньому шарі – $1$ кубик, у другому – $3\cdot3=9$, у третьому – $5\cdot5=25$, далі бачимо, що сторона шару в кубиках послідовно пробігає усі непарні числа, тобто для $8$ шару це буде $2\cdot8-1=15$. Тому на цей шар піде $15\cdot15=225$ кубиків.

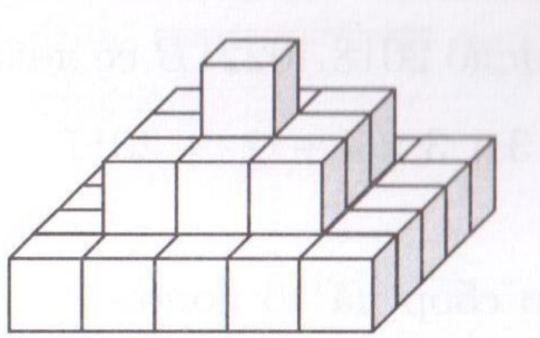


**Рис. 1**

**2.** Прямокутник з периметром 116 був розрізаний на 12 квадратів, як то показане на рис. 2. Відомо, що сірий квадрат має сторону у двічі більшою за сторону найменшого з квадратів. Чому дорівнює сторона найбільшого з квадратів?

***Відповідь:*** $16$.
***Розв'язання*.** Нехай сторона найменшого квадрата $2x$, тоді сторона дох квадратів, що під ними – $3x$, сторона двох лівих верхніх квадратів $5x$, тобто більша сторона прямокутника – $16x$. З умов задачі сторона сірого квадрату як і чотирьох йому рівних дорівнює $4x$. Таким чином менша сторона прямокутника дорівнює $13x$. Периметр прямокутника складає $2(13+16)x=58x=116 \Rightarrow x=2$. Таким чином сторона найбільшого квадрату удвічі більша за сторону сірого і дорівнює $16$.

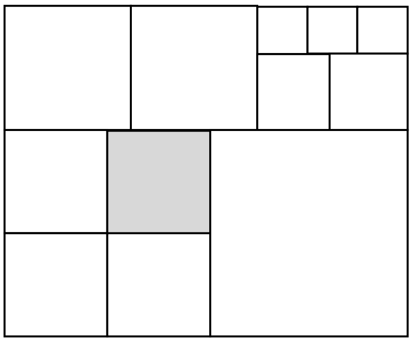


**Рис. 2**

**3.** Чотири точки лежать на одній прямій. Відстані між парами цих точок, що записані у порядку неспадання дорівнюють $3, 3, 6, x, 9, 12$. Чому може дорівнювати величина $x$? Якщо можливих відповідей декілька, знайдіть суму цих значень.

***Відповідь:*** $15$.
***Розв'язання*.** Нехай точки розташовані на числовій прямій, оскільки найбільша відстань $12$, то вважатимемо, що серед точок є точки $O(0)$ та $A(12)$. Решта точок належать відрізку $OA$. Без обмеження загальності можна вважати, що $B(3)$, оскільки там є дві пари точок на відстані $3$, тому принаймні одна пара має містити крайню з точок. Після розташування цих трьох точок вже маємо відстані $3, 9, 12$. Лишається $3, 6, x$.

Якщо $C(6)$, то додаються відстані $3, 6, 6$, тобто $x=6$.

Якщо $C(9)$, то додаються відстані $3, 6, 9$, тобто $x=9$.

Інших варіантів бути не може. Тому відповідь $6+9=15$.

**4.** Яким найменшим може бути периметр прямокутника з площею $2020$, довжини сторін якого є цілими числами?

***Відповідь:*** $242$.

***Розв'язання*.** Оскільки $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Можна або перебрати усі варіанти з цілими довжинами сторін, тут їх доволі небагато, або зрозуміти, що периметр буде тим меншим, чим менша різниця між сторонами того прямокутника. Це в нашому випадку досягається при сторонах $20$ та $101$, і дорівнює $2 \cdot (20 + 101) = 242$.

**5.** На площині нарисовані 10 рівних відрізків та відмітили усі їх точки перетину. Виявилося, що кожна точка перетину ділить кожний відрізок, що проходить через неї, у відношенні $3 : 4$. Яка може бути найбільша можлива кількість відмічених точок? Відміченими вважаються тільки точки перетину відрізків, кінці відрізків відміченими точками не вважаються?

***Відповідь:*** $10$.

***Розв'язання*.** На кожному з відрізків розташоване не більше двох точок. З іншого боку, кожна точка перетину належить не менше ніж двом відрізкам. Тому точ0к не більше, ніж $(10 \cdot 2) : 2 = 10$. Приклад, що $10$ точок можуть бути такими на рис. 3.

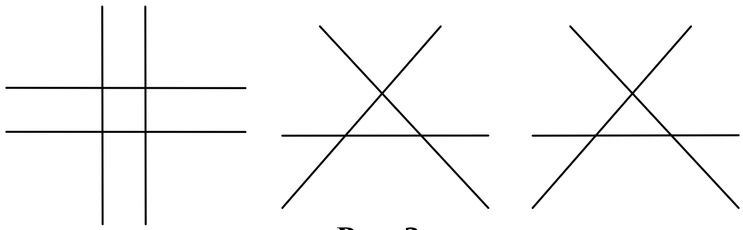


**Рис. 3**

## 5 клас

**1.** Точки $A, B, C, D$ лежать на одній прямій. Відстані між ними задовольняють такі умови: $AB = 12$, $DA + DB = 16$ та $CA - CB = 2$. Якою може бути відстань $CD$? Якщо відстаней, що задовольняють умову є декілька, то у відповіді наведіть суму усіх таких відстаней.

***Відповідь:*** $16$.

***Розв'язання*.** Нехай точки розташовані на числовій прямій, при цьому $A(10)$ та $B(22)$. Точка $D$ не може лежати всередині відрізку $AB$, бо тоді $AD + DB = 12$. Значить точка $D$ лежить з будь-якого боку поза відрізком $AB$. Маємо два варіанти: $D(24)$ або $D(8)$. Для точки $C$ єдина можливість – $C(17)$. Таким чином $CD = 7$ або $CD = 9$. Тому відповідь в задачі $16$.

**2.** Задача № 2 за 4 клас.

**3.** Якою найменшою може бути площа прямокутника з периметром $2020$, довжини сторін якого є цілі числа?

***Відповідь:*** $1009$.

***Розв'язання*.** Запишемо формулу для периметра прямокутника: $2 \cdot (a + b) = 2020 \Rightarrow a + b = 1010$. Можна збагнути, що чим менша різниця між сторонами, тим площа більша, або показати це простими розрахунками. Наприклад, $a < 505 < b$ та $a + b = 1010$, то площа прямокутника зі сторонами $a, b$ дорівнює $ab$, а у прямокутника зі сторонами $a + 1, b - 1$ буде вже $ab+b-a-1>ab$. Таким чином шуканий прямокутник з найменшою площею має сторони $1$ та $1009$ і, відповідно, площу $1009$.

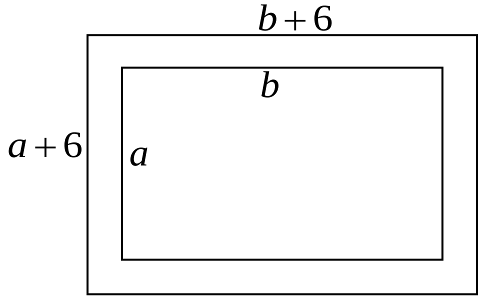



**Рис. 4**

**4.** Прямокутна рамка шириною $3$ має площу $564$. Знайдіть периметр внутрішнього прямокутника.

***Відповідь:*** $176$.

***Розв'язання.*** Позначмо розміри внутрішнього прямокутника через $a, b$. Тоді розміри зовнішнього $a+6,\ b+6$. Тоді площа рамки складає

$$(a+6)(b+6)-ab=6(a+b)+36=564 \ \Rightarrow \ a+b=88$$
$$\Rightarrow \ P=176.$$

**5.** Задача № 5 за 4 клас.

## 6 клас

**1.** Задача № 2 за 4 клас.

**2.** Ламана складається з трьох ланок. Довжина першої ланки утроє менше від суми довжин інших двох ланок. Довжина другої ланки удвоє менше від суми довжин інших двох ланок. Довжина третьої ланки дорівнює $10$. Чому дорівнює довжина усієї ламаної?

***Відповідь:*** $24$.

***Розв'язання.*** Позначимо довжину усієї ламаної через $12x$. Тоді перша ланка має довжину $3x$, а друга ланка – $4x$. Таким чином маємо рівність: $3x+4x+10=12x \ \Rightarrow \ x=2$. Таким чином довжина ламаної $12x=24$.

**3.** Задача № 4 за 5 клас.

**4.** На площині є $N>2$ точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Кожні дві з них з'єднали відрізком. Частину цих відрізків пофарбували жовтим кольором, решту (можливо жодного) – синім. Виявилося, що усі жовті відрізки утворюють замкнену ламану, що не має само перетинів, так само і усі сині відрізки. Для яких $N$ це могло статися? У відповідь наведіть суму усіх можливих значень.

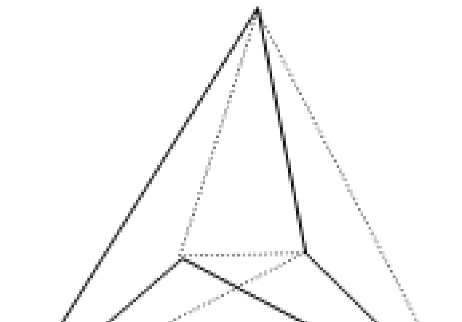


**Рис. 5**

***Відповідь:*** $8$.

***Розв'язання.*** В жовтій ламаній з кожної точки виходить рівно $2$ жовті відрізки, аналогічно, в синій ламаній з кожної точки виходить рівно $2$ сині ланки. Таким чином з кожної точки виходять, або $2$, або $4$ відрізки (або $2$ відрізки одного кольору, або $2$ жовтих та $2$ синіх). Проте, з іншого боку, з кожної точки виходить рівно $N-1$ ланка. Отже $N-1$ дорівнює або $2$, або $4$, таким чином $N$ може приймати лише два значення $3$ та $5$. Для $N=3$ в якості прикладу можна взяти просто жовтий трикутник (всі три сторони якого жовті). Приклад для $N=5$ наведений на рис. 5.

**5.** У опуклому $2020$-кутнику проведено декілька діагоналей. Проведена діагональ називається *гарною*, якщо вона перетинається у внутрішніх точках (точках, що відмінні від кінців діагоналей) рівно з однією з інших проведених діагоналей, не обов'язково з іншою гарною. Знайдіть найбільшу можливу кількість гарних діагоналей.

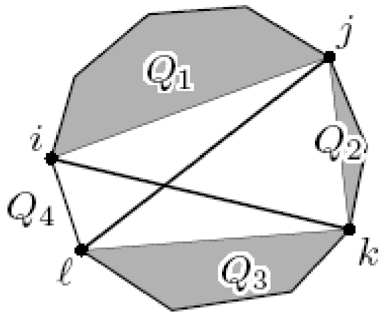


**Рис. 6**

***Відповідь:*** 2018.

***Розв'язання*.** Нехай вершин многокутника $n$, вважатимемо, що відрізок – це $2$-кутник, в якому немає діагоналей. Доведемо, що максимум гарних діагоналей може бути $n-2$ для парних та $n-3$ для непарних $n$. Для $n=3,\ 4$ відповідь очевидна. Нехай $n\geq 5$, позначимо наш многокутник через $P=A_1A_2\ldots A_n$. Якщо жодні дві гарні діагоналі не перетинаються, т о їх максимум можна провести $n-3$. Нехай тепер маємо дві гарні діагоналі, що перетинаються: $A_iA_k$ та $A_jA_l$ (рис. 6). Тоді кожна з них не перетинається з іншими проведеними діагоналями. Приберемо цю пару діагоналей. Тоді проведені діагоналі є сторонами чи діагоналями одного з чотирьох утворених многокутників $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$. Якщо деяка діагональ сторона одного з них, то вона не зможе перетинатися з іншими діагоналями, тому не є гарною.

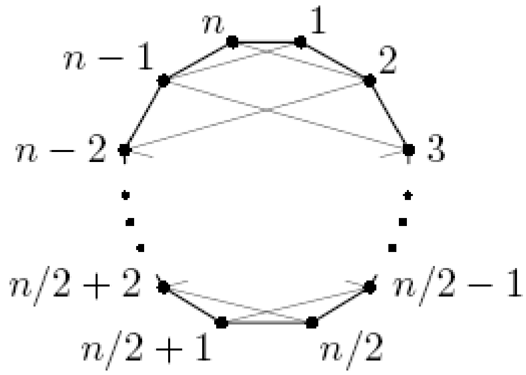


**Рис. 7**

За припущенням у кожному з многокутників $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$ діагоналей не більше ніж $k-2$, якщо він має $k$ вершин.

Тоді гарних діагоналей не більше ніж:

$(k_1-2)+(k_2-2)+(k_3-2)+(k_4-2)=k_1+k_2+k_3+k_4-8$, де $k_1+k_2+k_3+k_4=n+4$,

бо суміжні вершини многокутників $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$ рахуються двічі. Додаємо дві гарні діагоналі, що ми прибрали і маємо їхню кількість $n-2$ для парного $n$. Для непарного $n$ оцінка досягається аналогічно, з урахуванням того, що щонайменше один з многокутників $Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4$ має непарну кількість вершин.

Приклад, як провести шукані діагоналі показаний на рис. 7.

## 7 клас

**1.** Задача № 2 за 6 клас.

**2.** Всередині опуклого п'ятикутника $ABCDE$ вибрали точку $O$. Розглянемо такі 10 відрізків: $AO$, $BO$, $CO$, $DO$, $EO$, $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ та $EA$. Яка максимальна кількість з них може мати довжину 1?

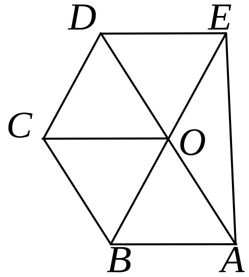


**Рис. 8**

***Відповідь:*** $9$.

***Розв'язання*.** Очевидно, що усі не можуть дорівнювати $1$, бо інакше усі п'ять кутів з вершиною в точці $O$ – з одного боку дорівнюють по $60^\circ$, з іншого – в сумі мають давати розгорнутий кут. Суперечність. Для $9$ відрізків маємо варіант шуканого розташування точок, як на рис. 8.

**3.** На площині задана незамкнена ламана, що не має само перетинів, та складається з 31 ланки (сусідні ланки не лежать на одній прямій). Через кожну ланку провели пряму, що містить цю ланку. Отримали 31 пряму, деякі з яких можуть співпасти. Яка найменша кількість попарно різних прямих могла вийти?

***Відповідь:*** $9$.

***Розв'язання.*** Окрім кінців ламаної, на ній $30$ вершин, і кожна є перетином двох прямих з проведених нами. Якщо прямих не більше $8$, то точок перетину не більше $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7=28$ – суперечність. А приклад для $9$ прямих на рис. 9.

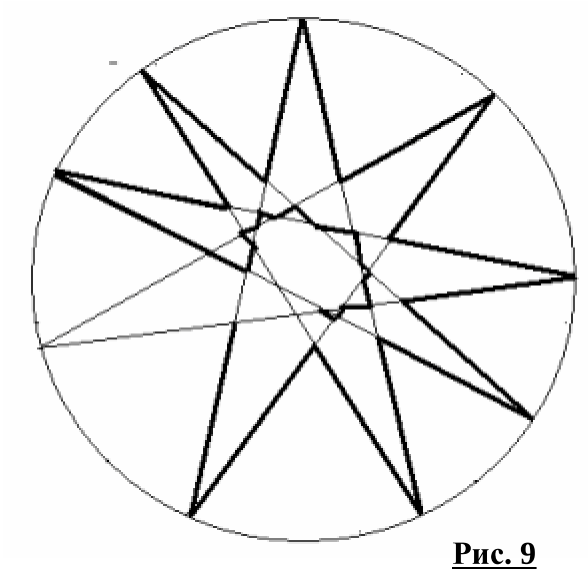


**Рис. 9**

**4.** Задача № 5 за 6 клас.

**5.** На гіпотенузі $AC$ прямокутного трикутника $ABC$ вибрана така точка $D$, що $BC=CD$. На катеті $BC$ взята така точка $E$, що $DE=CE$. Знайдіть довжину $AD$, якщо відомо, що $BE=3$ та $DE=5$.

***Відповідь:*** $2$.

***Розв'язання.*** Нехай $M$ – середина гіпотенузи $AC$. Тоді $BM=AM=CM$, $\angle EDC=\angle DCE=\angle CBM$ звідки $\angle MBD=\angle BDE$ оскільки $\angle BDC=\angle DCB$ (рис. 10). Тому $\Delta MBD=\Delta BDE$ за стороною та двом прилеглим до неї кутам. Звідси $MD=BE$ та $DE=BM$. Звідси маємо, що

$$AD+BE=AD+DM=AM=BM=DE\ \Rightarrow\ AD=2.$$

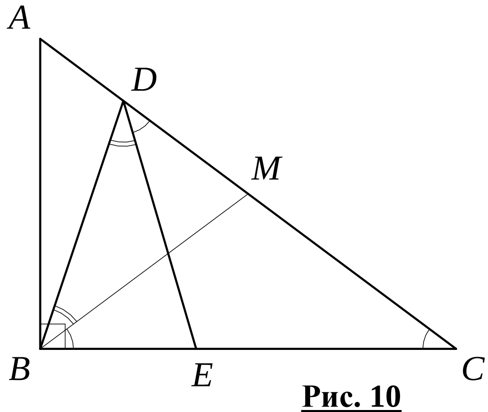



**Рис. 10**

## <u>8 клас</u>

**1.** Три сторони чотирикутника рівні, кути між ними дорівнюють відповідно $90^\circ$ та $150^\circ$. Знайдіть у градусах найменший кут цього чотирикутника.

***Відповідь:*** $45$.

***Розв'язання.*** Позначимо вершини чотирикутника $ABCD$ як то показане на рис. 1. Побудуємо квадрат $ABCX$. Тоді у $\Delta CDX$ між двома рівними сторонами кут $60^\circ$, тому він є рівностороннім. Тоді у рівнобедреного $\Delta AXD$ є кут $150^\circ$, тому $\angle XAD=\angle XDA=15^\circ\ \Rightarrow\ \angle ADC=60^\circ-15^\circ=45^\circ$ і $\angle BAD=90^\circ-15^\circ=75^\circ$.

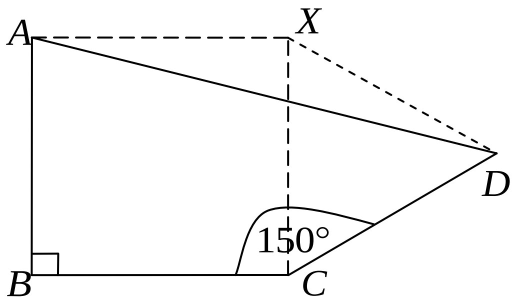



**Рис. 11**

**2.** На колі відмітили $n$ точок. Виявилося, що серед трикутників з вершинами в цих точках рівно половина гострокутних. Знайдіть усі значення $n$, при яких це можливо. У відповіді наведіть суму усіх можливих таких значень.

***Відповідь:*** $9$.

***Розв'язання.*** Очевидно, що $n>3$. Розглянемо довільний чотирикутник з вершинами в даних точках. Якщо центр кола лежить всередині чотирикутника та не на його діагоналі (назвемо такий чотирикутник *гарним*), то з чотирьох трикутників, що утворені вершинами чотирикутника, гострокутних рівно два. В усіх інших випадках гострокутних трикутників менше двох. Тоді розглянувши всі можливі чотирикутники з вершинами в даних точках та порахувавши для кожного такого чотирикутника гарні та негарні $4$ трикутники, які він утворює, ми кожен трикутник порахуємо однакову кількість разів Таким чином, умова задачі справджується тоді і тільки тоді, коли усі чотирикутники, що утворені даними точками, гарні. Очевидно, що при $n=4$ та $n=5$ – це можливо і приклад легко навести.

Нехай $n>5$. Розглянемо довільну із заданих точок $A$ та проведемо через неї діаметр $AA'$. Якщо точка $A'$ відмічена, то чотирикутник утворений $AA'$ та довільними двома з інших точок не буде гарним. Якщо точка $A'$ не відмічена, то знайдуться три відмічені точки, розташовані по один бік від $AA'$. Чотирикутник, що утворений цими точками та точкою $A$, не є гарним.

Таким чином відповідь в задачі $4+5=9$.

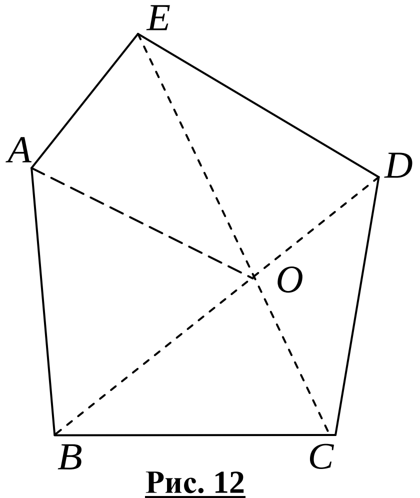


**Рис. 12**

**3.** Про п'ятикутник $ABCDE$ відомо, що $AB=BC=CD=DE$, $\angle C=\angle D=108°$, $\angle B=96°$. Знайдіть у градусах величину $\angle E$.

***Відповідь:*** $102$.

***Розв'язання.*** Проведемо діагоналі $BD$ та $CE$ (Рис. 12). Нехай $BD\bigcap CE=O$. Побачимо, що трикутники $BCD$ та $CDE$ рівнобедрені з кутом $108°$ при вершині, тому кути при основах в них $36°$. Тоді $\angle BCE=\angle BDE=72° \Rightarrow \angle COD=108° \Rightarrow \angle COB=72° \Rightarrow$ трикутники $BCO$ та $ODE$ рівнобедрені. Звідси $AB=BO=BC=CD=DE=EO=x$. Побачимо, що $\angle OBA=96°-36°=60°$, тому $\Delta ABO$ – рівнобедрений з кутом $60°$ при вершині, тобто рівносторонній. Тому $AO=x$.

$$\angle AOE=\angle BOE-\angle AOB=108°-60°=48°.$$

$\Delta AOE$ рівнобедрений з кутом $48°$ при вершині $\Rightarrow$ $\angle OEA=\frac{1}{2}(180°-48°)=66° \Rightarrow$

$$\angle AED=\angle AEO+\angle OED=66°+36°=102°.$$

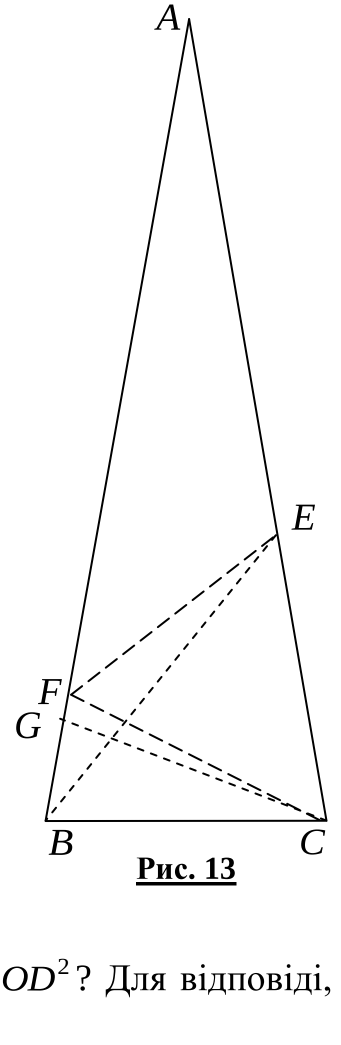


**Рис. 13**

**4.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ з кутом $20°$ при вершині $A$ та основою $BC=12$ точка $E$ на стороні $AC$ вибрана так, що $\angle ABE=30°$, а точка $F$ на стороні $AB$ так, що $EF=FC$. Знайдіть довжину $FC$.

***Відповідь:*** $12$.

***Розв'язання.*** З суми кутів трикутника $\angle ABC=\angle ACB=80°$, тому $\angle CBE=50°=\angle BEC$, звідки випливає, що $CB=CE$ (рис. 13). Розглянемо таку точку $G\in AB$, для якої $\angle GCB=20°$, тоді $\angle CBA=\angle CGB=80° \Rightarrow CG=CB=CE$. Звідси $\Delta CEG$ – рівнобедрений з $\angle ECG=60°$ $\angle GCE = 60°$, тобто він є рівносторонній. Таким чином точка G, як і точка $F$, лежить на серединному перпендикулярі до відрізку $CE$ та на стороні $AB$. Звідси випливає, що $F=G$ та $\Delta CEG$ – рівносторонній, тому $CG=CF=CB=12$.

**5.** Нехай $O$ – центр описаного кола трикутника $ABC$. Відомо, що $AB=1$ та $AO=AC=2$. Точки $D$ та $E$ обрані на променях $AB$ та $AC$ за точки $B$ та $C$ відповідно таким чином, що $OD=OE$ та $BD=\sqrt{2}EC$. Знайдіть, чому дорівнює $OD^2$? Для відповіді, подайте значення виразу $100 - OD^2$ у вигляді $a + \sqrt{b}$, а у відповідь запишіть значення $a + b$.

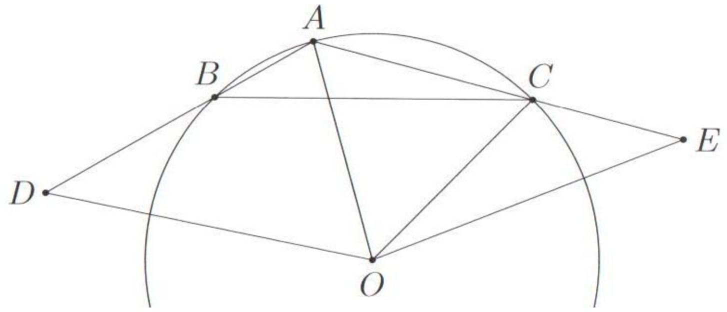
***<u>Відповідь:</u>*** $158$.

***<u>Розв'язання</u>.*** Нехай $BD = x$, $EC = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Оскільки $D$ та $E$ на рівних відстанях від $O$, то степені цих точок відносно описаного кола $\Delta ABC$ рівні. Звідси (рис. 14)

$$DB \cdot DA = EC \cdot EA \Rightarrow x(x+1) = \frac{x}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 2\right) \Rightarrow x = 2\sqrt{2} - 2 \Rightarrow$$

$$DB \cdot DA = x(x+1) = 10 - 6\sqrt{2} = OD^2 - OA^2 \Rightarrow OD^2 = 10 - 6\sqrt{2} + OA^2 = 14 - 6\sqrt{2}.$$

Далі запишемо зазначений в умові вираз: $100 - OD^2 = 86 + 6\sqrt{2} = 86 + \sqrt{72} = a + \sqrt{b} \Rightarrow$ $a + b = 86 + 72 = 158$.




**<u>Рис. 14</u>**

## <u>9 клас</u>

**1.** Задача № 1 за 8 клас.

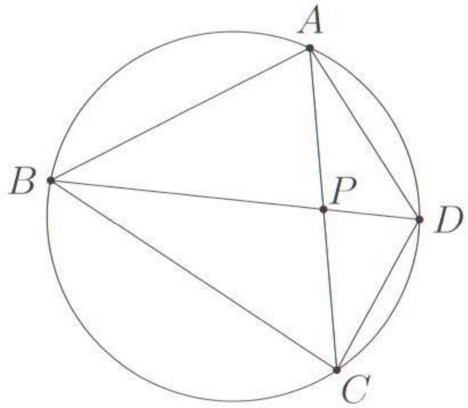
**2.** Про вписаний чотирикутник $ABCD$ відомо, що $AC = 56$, $BD = 65$, $BC > DA$ та $AB : BC = CD : DA$. Знайдіть відношення $S(ABC) : S(ADC)$. Подайте шукане відношення у вигляді нескоротного дробу, а у відповідь запишіть суму отриманих чисельника та знаменника.

***<u>Відповідь:</u>*** $65$.

***<u>Розв'язання</u>.*** Позначимо через $P$ точку перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ (рис. 15), тоді

$$\frac{AP}{CP} = \frac{S(ABD)}{S(CBD)} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \sin\angle BAD}{\frac{1}{2} CB \cdot CD \sin\angle BCD} = \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BCD} = 1.$$

Звідси випливає, що $AP = CP = \frac{56}{2} = 28$. Покладемо $BP = x$ та $DP = 65 - x$. З теореми про хорди: $AP \cdot PC = BP \cdot PD \Rightarrow 28^2 = x(65 - x) \Rightarrow x_1 = 16$ та $x_2 = 49$. З того, що $BC > DA$ та $\Delta APD \sim \Delta BCP$ маємо, що $BP > DP \Rightarrow$




**<u>Рис. 15</u>**

$$BP = 49 \text{ та } DP = 16 \Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(ACD)} = \frac{PB}{PD} = \frac{49}{16} \Rightarrow 49 + 16 = 65.$$

**3.** Дано опуклий $1000$-кутник. Всередині цього многокутника обрали ще $1020$ точок таким чином, що жодні $3$ з $2020$ точок не лежать на одній прямій. Многокутник розрізали на трикутники таким чином, що ці трикутники мають вершинами лише вказані $2020$ точок та кожна з цих точок є вершиною принаймні одного з трикутників розрізання. Скільки утворилося таких трикутників?

***<u>Відповідь:</u>*** $3038$.

***<u>Розв'язання</u>.*** Сума кутів утворених трикутників дорівнює сумі кутів многокутника та усіх розгорнутих кутів при кожній з $1020$ точок. Тобто кількість шуканих трикутників дорівнює:

$$\left(1020 \cdot 360 + (1000-2) \cdot 180\right) : 180 = 3038.$$

**4.** Задача № 5 за 8 клас.

**5.** Нехай $ABC$ гострокутний трикутник з $\angle ACB = 45°$, $G$ – точка перетину медіан, та $O$ – центр описаного кола. Якщо $OG = 1$ та $OG \parallel BC$ знайдіть довжину $BC$.

***Відповідь:*** $12$.

***Розв'язання*.** Нагадаємо, що пряма Ейлера проходить через центроїд $G$, ортоцентр $H$ та центр описаного кола $O$, при цьому $OG : GH = 1 : 2$. Тому $OH = 3$ (рис. 16) та $OH \parallel BC$. Нехай $AA_1$ та $BB_1$ – висоти $\Delta ABC$, $B_2$ – середина сторони $BC$. Оскільки $\angle ACB = 45°$, то $BB_1 = CB_1$ та $AA_1 = CA_1$. Таким чином точки $B_1$, $B_2$ та $O$ розташовані на серединному перпендикулярі до $BC$, тому $B_2B_1 \parallel HA_1$. Аналогічно $BB_1 \parallel OA_1$. Оскільки $OH \parallel BC$, то сторони $\Delta HA_1O$ паралельні сторонам $\Delta B_2B_1B$, тому $\Delta HA_1O$ є трикутник з середніх ліній $\Delta B_2B_1B$, звідки випливає, що $BC = 2BB_2 = 4OH = 12$.

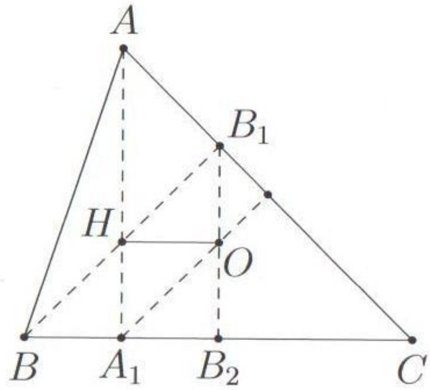



**Рис. 16**

## 10 клас

**1.** Задача № 2 за 9 клас.

**2.** На прямій відмітили $100$ точок і ще одну точку поза прямою. Яка найбільша кількість рівнобедрених трикутників може утворитися при цьому з вершинах в цій $101$ точці?

***Відповідь:*** $150$.

***Розв'язання*.** Нехай $l$ – пряма, на якій розташовані $100$ точок, $O$ – відмічена точка поза цієї прямої, $H$ – основа перпендикуляра, опущеного з $O$ на $l$ (рис. 17).

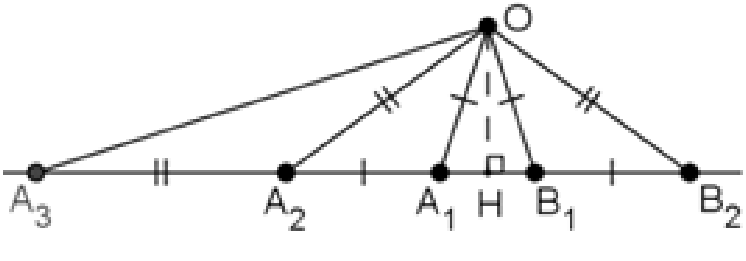



**Рис. 17**

Основа рівнобедреного трикутника може лежати на $l$ чи не на $l$. Трикутники першого виду симетричні відносно $OH$, тому їх не більше $50$ – половини відмічених точок на $l$. Трикутників другого виду з даною основою $OA$ може бути не більше одного, оскільки вершина цього рівнобедреного трикутника визначається перетином $l$ та серединного перпендикуляра до $OA$. Тому трикутників другого виду не більше $100$.

Покажемо, що ця кількість досягається. Відкладемо від променя $OH$ промені під кутом $18°$. Вони перетнуть $l$ у деяких точках $A_1$ та $B_1$, відмітимо ці точки. Відкладемо на $l$ по різні сторони від $A_1B_1$ відрізки $A_1A_2 = B_1B_2 = A_1O = B_1O$ (рис. 1), далі відкладемо аналогічним чином відрізки $A_2A_3 = B_2B_3 = A_2O = B_2O$, ..., відрізки $A_{49}A_{50} = B_{49}B_{50} = A_{49}O = B_{49}O$. Рівнобедреними будуть $50$ трикутників $OA_iB_i$, по $49$ трикутників $OA_iA_{i+1}$ та $OB_iB_{i+1}$, а також $OA_1B_2$ та $OA_2B_1$.

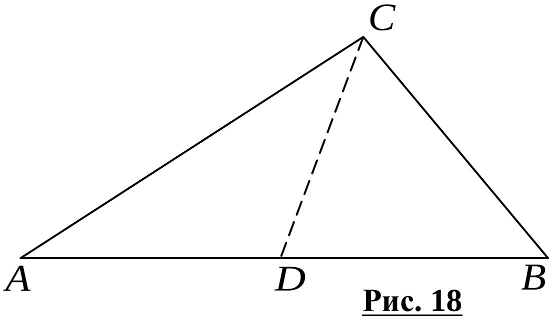



**Рис. 18**

**3.** У трикутнику $ABC$ з кутом $\angle CAB = 30°$ проведена медіана $CD$. При цьому утворився рівнобедрений $\Delta ACD$. Треба знайти $tg\,\angle DCB$? Для відповіді треба подати $15 \cdot tg\angle DCB$ у вигляді $a+\sqrt{b}$, та у відповідь записати суму $a+b$. Якщо таких кутів декілька, то у відповідь треба вписати значення для найменшого із можливих кутів.

***Відповідь:*** $27$.

***Розв'язання***. Спочатку припустимо, що $AD = CD$ (рис. 18), тоді оскільки $CD$ – медіана, то $AD = CD = BD$, тому медіана дорівнює половині протилежної сторони, звідки цей трикутник прямокутний і медіана проведена з вершини прямого кута. Тобто $\angle ACB = 90° \Rightarrow \angle DCB = 60°$ та $tg\,\angle DCB = \sqrt{3}$.

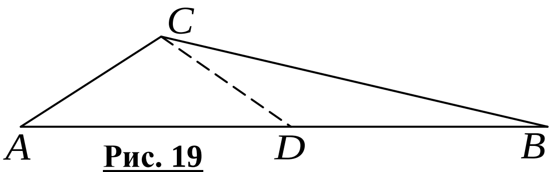



Рис. 19

Нехай тепер $AC = CD$ (рис. 19), тоді $\angle CDA = \angle CAB = 30° \Rightarrow \angle CDB = 150°$ та $\angle DCA = 120°$. Позначимо $\angle DCB = \gamma$, тоді запишемо теорему синусів для $\Delta ABC$ та $\Delta BCD$:

$$\frac{AC}{\sin\angle B} = \frac{AB}{\sin(120° + \gamma)} \text{ та } \frac{CD}{\sin\angle B} = \frac{DB}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{2\cdot DB}{\sin(120°+\gamma)} = \frac{DB}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{\sin(120°+\gamma)}{\sin\gamma} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 120°\cos\gamma + \cos 120°\sin\gamma}{\sin\gamma} = 2 \Rightarrow \sin 120° \cdot ctg\,\gamma = 2 - \cos 120° \Rightarrow \tfrac{\sqrt{3}}{2} ctg\,\gamma = 2 + \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow ctg\,\gamma = \tfrac{5}{\sqrt{3}}. \text{ Тобто } tg\,\gamma = \tfrac{\sqrt{3}}{5}.$$

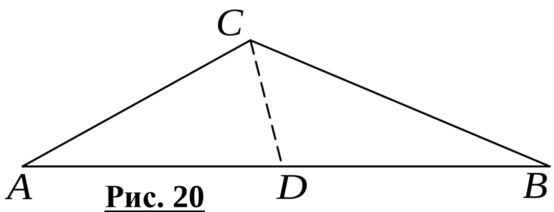



Рис. 20

І тепер повністю аналогічно попередньому випадку розглянемо останній варіант можливого рівнобедреного трикутника: $AC = AD$ (рис. 20). Тепер $\angle CDA = \angle DCA = 75°$. Позначимо $\angle DCB = \gamma$, тоді запишемо теорему синусів для $\Delta ABC$:

$$\frac{AC}{\sin(75° - \gamma)} = \frac{2\cdot AC}{\sin(75°+\gamma)} \Rightarrow \frac{\sin(75°+\gamma)}{\sin(75°-\gamma)} = 2 \Rightarrow \frac{\sin 75°\cos\gamma + \cos 75°\sin\gamma}{\sin 75°\cos\gamma - \cos 75°\sin\gamma} = 2 \Rightarrow$$

$$tg\,\gamma = \tfrac{1}{3} tg\,75° = \tfrac{2+\sqrt{3}}{3}.$$

Зрозуміло, що ці кути гострі для кожного можливого випадку, при цьому $\frac{\sqrt{3}}{5} < \frac{2+\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3}$. Таким чином для найменшого з кутів $15 \cdot tg\angle DCB = 3\sqrt{3} = \sqrt{27} = a + \sqrt{b} \Rightarrow a + b = 27$.

**4.** Задача № 5 за 9 клас.

**5.** Нехай два кола $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ – два кола, де $\Gamma_1$ має менший радіус, перетинаються у двох точках $A$ та $B$. Точки $C, D$ лежать на колах $\Gamma_1, \Gamma_2$ відповідно так, що точка $A$ є серединою відрізку $CD$. Пряма $CB$ вдруге перетинає коло $\Gamma_2$ у

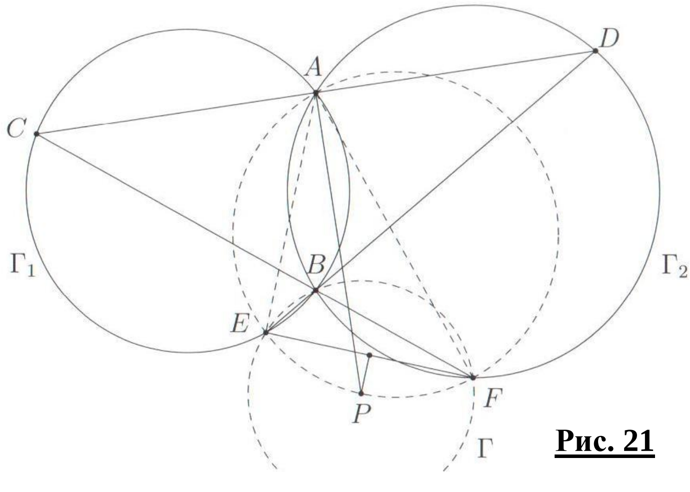



Рис. 21

точці $F$, пряма $DB$ вдруге перетинає коло $\Gamma_1$ у точці $E$. Серединні перпендикуляри до відрізків $CD$ та $EF$ перетинаються в точці $P$. Знаючи, що $CA = 12$ та $PE = 5$, знайдіть $AP$.

***Відповідь:*** $13$.

***Розв'язання.*** Спочатку доведемо, що $\angle EPF = 2\angle CAE$. Випишемо рівність вписаних кутів (рис. 21): $\angle CAE = \angle CBE = \angle DBF = \angle DAF$. Оскільки $AP$ – серединний перпендикуляр до $CD$, то це і бісектриса $\angle EAF$. Точка $P$ також лежить на серединному перпендикулярі до $EF$. Тому вона лежить на описаному колі $\Delta EAF$. Звідси маємо:

$$\angle EPF = 180° - \angle EAF = \angle CAE + \angle DAF = 2\angle CAE.$$

Оскільки $\angle EPF = 2\angle CAE = 2\angle CBE$, то точка $B$ лежить на колі $\Gamma$ з центром у точці $P$ та радіусом $R = PE$. Тоді з степені точки відносно кола маємо, що

$$2CA^2 = CA \cdot CD = CB \cdot CF = CP^2 - R^2 \Rightarrow$$

$$AP^2 = CP^2 - CA^2 = (2CA^2 + R^2) - CA^2 = CA^2 + PE^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow AP = 13.$$

## 11 клас

**1.** Задача № 2 за 9 клас.

**2.** Задача № 2 за 10 клас.

**3.** На сторонах $AB$ та $AC$ трикутника $ABC$ вибрані точки $D$ та $E$ відповідно, при цьому $AB = 6$, $AC = 9$, $AD = 4$ та $AE = 6$. Відомо, що описане коло $\Delta ADE$ перетинає сторону $BC$ у точках $F, G$, де $BF < BG$. Знаючи, що точка перетину прямих $DF$ та $EG$ лежить на описаному колі $\Delta ABC$, знайдіть відношення $\frac{FG}{BC}$. Для відповіді запишіть число $6 \cdot \frac{FG}{BC} + 10$ у вигляді $a + \sqrt{b}$ та у відповідь запишіть значення $a + b$.

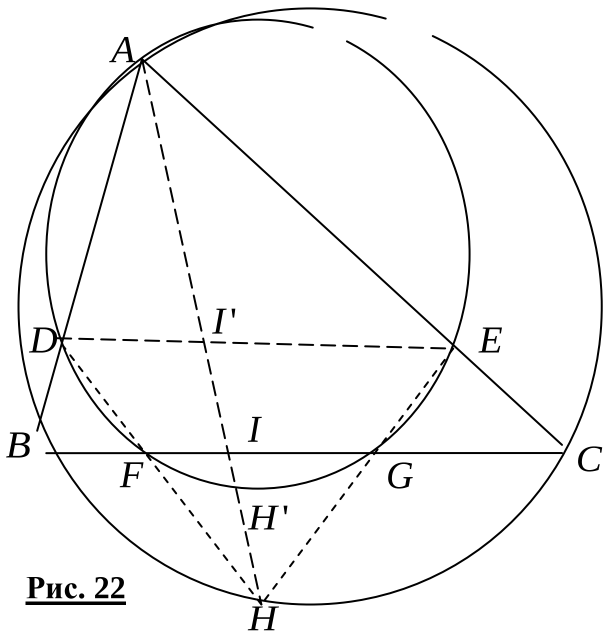



**Рис. 22**

***Відповідь:*** $40$.

***Розв'язання.*** Нехай $H = DF \cap EG$, $I' = AH \cap DE$ та $I = AH \cap BC$. Точка $H'$ – друга точка перетину описаного кола $\Delta ADE$ з прямою $AH$ (рис. 1). Нехай шукане значення $x$, тобто $FG = x \cdot BC$. З умов задачі $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow DE \parallel BC$. Звідси $\frac{IF}{IG} = \frac{I'D}{I'E} = \frac{IB}{IC} \Rightarrow$ $\frac{IF}{IB} = \frac{IG}{IC} = \frac{FG}{BC} = x$ та $\frac{IF}{IB} \cdot \frac{IG}{IC} = x^2$. З степені точки відносно кола маємо, що $IA \cdot IH' = IF \cdot IG$ та $IA \cdot IH = IB \cdot IC$. З усіх цих рівностей отримаємо, що $\frac{IH'}{IH} = x^2$.

Якщо тепер аналогічно відобразити $\Delta ADE$ у $\Delta ABC$ з коефіцієнтом $\frac{3}{2}$. Зрозуміло, що $I' \to I$ та

$H'\to H$, тому $\dfrac{AH'}{AH}=\dfrac{AI'}{AI}=\dfrac{2}{3}$. З останніх трьох рівностей:

$$AI':I'I:IH':H'H=4-6x^2:2-3x^2:3x^2:3-3x^2.$$

Звідси отримуємо, що $\dfrac{FG}{DE}=\dfrac{HG}{HE}=\dfrac{IH}{I'H}=\dfrac{3}{5-3x^2}$, а разом з $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{2}{3}$ матимемо, що $\dfrac{FG}{BC}=\dfrac{2}{5-3x^2}=x \Rightarrow 3x^3-5x+2=0$. Оскільки $x\neq 1$, з останнього рівняння отримуємо, що

$2x^3-5x+2=(x-1)(3x^2+3x-2)=0 \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{33}-3}{6} \Rightarrow 6x+10=7+\sqrt{33}=a+\sqrt{b}$ і шуканою відповіддю стане значення $a+b=40$.

**4.** Задача № 5 за 10 клас.

**5.** В гострокутному трикутнику $ABC$ з кутом $\angle ACB=75^\circ$ висоти $AA_3,\ BB_3$ перетинають описане коло в точках $A_1,\ B_1$ відповідно. На прямих $BC$ і $CA$ обрано точки $A_2$ та $B_2$ відповідно таким чином, що пряма $B_1B_2$ паралельна прямій $BC$ і пряма $A_1A_2$ паралельна прямій $AC$. Нехай $M$ – середина відрізку $A_2B_2$. Знайдіть у градусах величину кута $\angle B_3MA_3$.

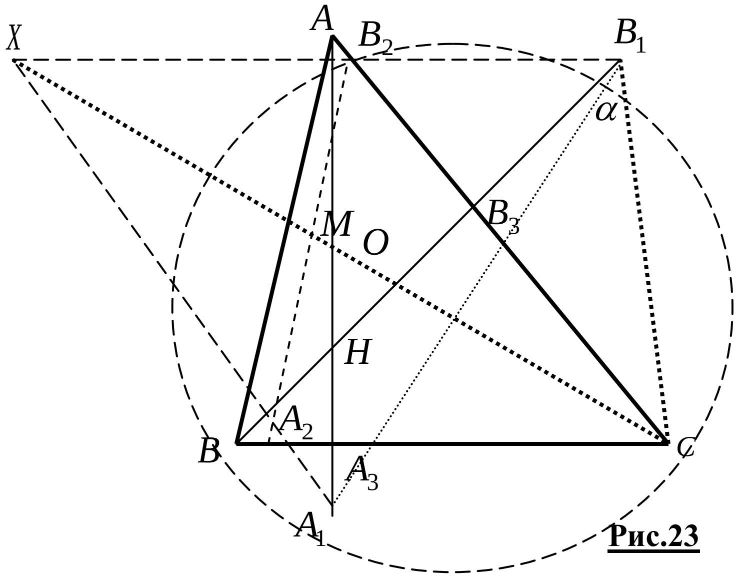


**Рис.23**

***Відповідь***: $150$.

Нехай прямі $A_1A_2$ та $B_1B_2$ перетинаються в точці $X$ (рис. 23). Тоді $CB_2XA_2$ – паралелограм, звідки $M$ також є серединою $CX$. З іншого боку, ортоцентр $H$ $\Delta ABC$ є також ортоцентром $\Delta XA_1B_1$ (з очевидних властивостей проведених ліній), а точка $C$ є центром описаного кола $\Delta HA_1B_1$, що симетричний центру описаного кола $\Delta XA_1B_1$ відносно $A_1B_1$, звідки, як відомо, оскільки $M$ – середина $XC$, то $M$ є центром кола $9$ точок $\Delta XA_1B_1$. А далі просто розглянувши гомотетію кута $\angle B_3MA_3$ з центром в $H$ та коефіцієнтом $2$ одержимо кут $\angle A_1OB_1$, де $O$ – центр описаного кола $\Delta XA_1B_1$, що, як центральний кут, вдвічі більший $\angle A_1XB_1$, який в свою чергу з паралельності дорівнює $\angle ACB$. Звідки $\angle B_3MA_3=\angle ACB=150^\circ$, що і завершує доведення.

***Альтернативне розв'язання***. Позначимо сторони та кути трикутника $ABC$ через $a,b,c$ і $\alpha,\beta,\gamma$, радіус описаного кола – $R$. Проведемо відрізки $A_1C$, $CB_1$, а також виберемо на стороні $AC$ точку $K$ таким чином, щоб відрізок $A_2K\| A_1C$. Доведемо, що $B_2B_3=KB_3$.

На рисунку зображені кути, які за умовами задачі легко знайти: $\angle CA_2A_1=\angle CB_2B_1=\gamma$, $\angle CB_1B=\alpha$, $\angle AA_1C=\beta$. Обчислимо потрібні нам відрізки: $CB_3=a\cos\gamma=2R\sin\alpha\cos\gamma$, (Рис 24) $B_1B_3=B_3C\cdot ctg\alpha=2R\cos\alpha\cos\gamma$, $B_2B_3=B_1B_3\cdot ctg\gamma=2R\cos\alpha\cos\gamma\cdot ctg\gamma$, тому $CB_2=a\cos\gamma(1+ctg\gamma\cdot ctg\alpha)= \quad =2Rctg\gamma\cos(\gamma-\alpha)$, аналогічно

$CA_2 = 2R \cdot ctg\gamma \cos(\gamma - \beta)$. $\angle CA_2K = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\angle CKA_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma + \beta$. За теоремою синусів для $\Delta CKA_2$:

$$\frac{A_2C}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \beta\right)} = \frac{CK}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \Rightarrow CK = A_2C \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma - \beta)} = 2R\cos\beta \cdot ctg\gamma .$$

$$KB_2 = CB_2 - CK = 2R \cdot ctg\gamma\left(\cos(\gamma - \alpha) - \cos\beta\right),$$

$$KB_3 = CB_3 - CK = 2R\sin\alpha\cos\gamma - 2R\cos\beta \cdot ctg\gamma = 2R \cdot ctg\gamma\left(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\beta\right),$$

оскільки

$$\sin\gamma\sin\alpha - \cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\gamma - \alpha) - \tfrac{1}{2}\cos(\gamma + \alpha) - \cos\beta =$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(\gamma - \alpha) - \tfrac{1}{2}\cos(\pi - \beta) - \cos\beta = = \tfrac{1}{2}(\cos(\gamma - \alpha) - \cos\beta),$$

то $KB_3 = \frac{1}{2} B_2B_3$, то $B_2B_3 = KB_3$. Таким чином, $MB_3$ – середня лінія $\Delta B_2A_2K$, а тому $MB_3 \parallel A_1C$. Повністю аналогічно доводиться, що $MA_3 \parallel B_1C$, а тому $\angle A_3MB_3 = \angle A_1CB_1 = 2\gamma = 150^\circ$.

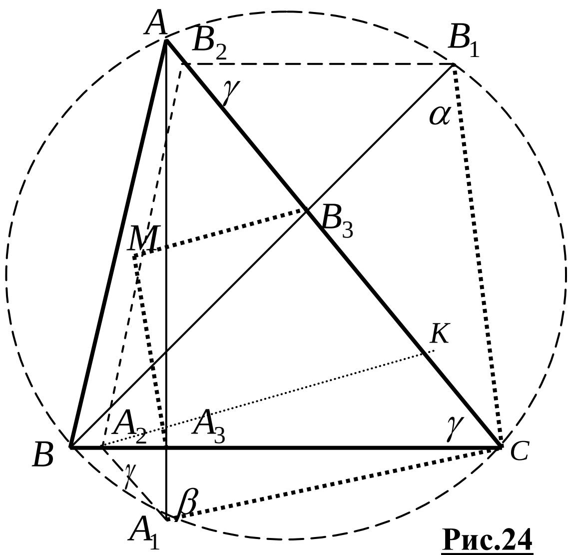



**Рис.24**