Олімпіада з алгебри

"Зачекай – і погане само собою зникне."
Закон Хелранга

Розв'язання задач

4 клас

1. У біологічній лабораторії на самоізоляції живуть люди, пацюки та змії. Разом в них 40 голів, 100 ніг та 36 хвостів. Скільки змій в лабораторії?

Відповідь: 13.
Розв'язання. Усього там 40 істот, хвостів не мають лише люди, тому їх там 4. Таким чином пацюки та змії там мають $100-2\cdot 4=92$ ноги. Тобто пацюків там $92:4=23$. Таким чином змій $40-4-23=13$.

2. У Петрика є 5 гир вагою $2, 3, 4, 5, 6$ грамів. Він хоче додати до них ще одну, щоб отримані 6 гир можна було розбити на три групи однакової маси. Скількома способами він це може зробити.

Відповідь: 4.
Розв'язання. Гирю мають додати цілою вагою, бо принаймні дві групи матимуть цілу вагу грамів. Сумарна вага має бути кратною 3. Таким чином треба додати гирю з вагою $3n+1$. Але вона не може бути важчою за $\frac{1}{2}\cdot(2+3+4+5+6)=10$ грамів, бо інакше сума ваг двох довільних купок буде меншою за одну гирю. Таким чином можна додати гирю 4 способами, покажемо, що кожний з них задовольняє умови.
1. Для набору $1, 2, 3, 4, 5, 6$ маємо таке розбиття: $1-6,\ 2-5,\ 3-4$.
2. Для набору $2, 3, 4, 4, 5, 6$ маємо таке розбиття: $2-6,\ 3-5,\ 4-4$.
3. Для набору $2, 3, 4, 5, 6, 7$ маємо таке розбиття: $2-7,\ 3-6,\ 4-5$.
4. Для набору $2, 3, 4, 5, 6, 10$ маємо таке розбиття: $2-3-5,\ 4-6,\ 10$.

3. Господар обіцяв найманому працівнику за рік роботи 17000 гривень та не новий автомобіль. Але із-за пандемії робітник пропрацював лише 5 місяців, за що господар сплатив робітникові 3000 гривень та той автомобіль. Скільки коштував той не новий автомобіль?

Відповідь: 7000.
Розв'язання. Позначимо вартість автомобіля через x (у тисячах гривень), тоді за 5 років, тобто 60 місяців робітник за однією схемою отримав би $(17+x)\cdot 5=85+5x$, а з іншого боку – $(3+x)\cdot 12=36+12x$. Тоді $85+5x=36+12x \Rightarrow 7x=49 \Rightarrow x=7$.

4. Скільки цілих чисел одночасно ближче до 15, ніж до 20, та ближче до 8, ніж до 3?

Відповідь: 12.
Розв'язання. Проведемо горизонтальну пряму і розташуємо на ній зліва направо на рівних відстанях між сусідніми числа $1, 2, 3, \ldots$ Усі числа, що задовольняють першу умову розташовані лівіше від 18, тобто 17, 16, 15,…, а другу умову задовольняють числа, що розташовані правіше

від 5, тобто числа 6, 7, 8, $\dots$. Таким чином усього таких чисел 12: $6, 7, \dots, 17$.

5. Виготовили кубик, на шести гранях якого записані числа 6, 7, 8, 9, 10 та 11. Після двох кидань такого кубика порахували суми чисел на тих чотирьох гранях, що виявилися збоку (не верхня та не нижня), при першому киданні ця сума була рівною 36, а при другому – 33. Яке число записане на грані, що протилежна тій грані, на якій записане число 10?

<u>Відповідь:</u> 8.
<u>Розв'язання</u>. Сума усіх чисел на гранях складає 51, таким чином при першому киданні на верхній та нижній гранях числа мали суму 15, при другому – 18. Тоді третя і остання пара граней мають суму $51-(15+18)=18$. Але отримати 18 можна лише двома способами: $11+7=10+8$. Таким чином проти грані 10 розташована грань з числом 8.

<u>5 клас</u>

1. Задача № 2 за 4 клас.

2. Сім'я складається з тата, мами та декількох дітей, серед яких немає близнюків. Кожного року вона справляють сімейне день народження, де рахують сумарний вік усіх членів родини. У той рік, коли їхній найменшій дитині виповнилося 1 рік, вони святкували 65-річчя родини. За кілька років вони святкуватимуть 120-річчя родини. Скільки дітей в цій сім'ї?

<u>Відповідь:</u> 3.
<u>Розв'язання</u>. Між двома святкуваннями різниця $120-65=55$, тобто їхня родина складається з 5, 11 або 55 членів. Останнє очевидно суперечить умові. Якщо в родині батьки та 9 дітей, то діти в рік святкування 65-річчя родини мали мінімум такий сумарний вік: $1+2+\dots+9=45$ років. Тому на двох батьків припадає сумарно 20 років, що неможливо. Висновок – в родині 5 членів, з яких 3 дітей.

3. Господар обіцяв найманому працівнику за рік роботи 7 срібних монет та 11 мідних. Але із-за пандемії робітник пропрацював лише 7 місяців, за що господар сплатив робітникові 4 срібні та 7 мідних монети. Скільком мідним монетам дорівнювала срібна?

<u>Відповідь:</u> 7.
<u>Розв'язання</u>. За 7 років, тобто за 84 місяці за однією схемою робітник би отримав $7\cdot 7=49$ срібних та $11\cdot 7=77$ мідних монет. За іншою схемою він би отримав $4\cdot 12=48$ срібних та $7\cdot 12=84$ мідні монети. Таким чином 1 срібна монета прирівняна до 7 мідних.

4. Скільки цілих чисел одночасно ближче до 2000, ніж до 2020, та ближче до 222, ніж до 111?

<u>Відповідь:</u> 1843.
<u>Розв'язання</u>. Проведемо горизонтальну пряму і розташуємо на ній зліва направо на рівних відстанях між сусідніми числа $1, 2, 3, \dots$ Усі числа, що задовольняють першу умову розташовані лівіше від 2010, тобто 2009, 2008, $2007\dots$, а другу умову задовольняють числа, що розташовані правіше від 166, тобто числа 167, 168, 169, $\dots$. Таким чином усього це числа:

$167, 168, \ldots, 2009$. Залишається зрозуміти, що цілих чисел між числами $a < b$ включно обидва буде $b - a + 1$, тобто в нашому випадку цих чисел 1843

5. Ціна стандартного обіду в ресторані залежить лише від дня тижня. Андрій обідав 10 днів поспіль, починаючи з вівторка 10 листопада та сплатив 700 гривень, Богдан сплатив 700 гривень за 12 обідів поспіль, починаючи від 12 листопада, Вероника сплатила 1000 гривень за 20 обідів поспіль від 20 листопада, а скільки сплатив Грицько, що 24 дні поспіль обідав, починаючи від 24 листопада?

<u>Відповідь:</u> 1500.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо вартості обідів по днях тижня: понеділок – a_1, вівторок – a_2, …, неділя – a_7. Позначимо також через A – сума тижневого харчування. Тоді маємо такі умови:

$A + a_2 + a_3 + a_4 = 700$,

$A + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_1 = 700$,

$2A + a_5 + a_6 + a_7 + a_1 + a_2 + a_3 = 1000$,

$3A + a_2 + a_3 + a_4 = X$.

Треба знайти значення X.

Якщо порівняти першу та другу умови, додавши їх матимемо, що:

$$a_2 + a_3 = a_5 + a_6 + a_7 + a_1 \text{ та } 3A + a_4 = 1400.$$

Тоді з третьої умови, якщо використати одержану залежність матимемо, що

$$2A + 2(a_2 + a_3) = 1000 \text{ або } a_2 + a_3 = 500 - A.$$

Тоді $3A + a_2 + a_3 + a_4 = 1900 - A$. Разом з першою умовою $A + a_2 + a_3 + a_4 = 700$ неважко отримати, що $2A = 1200 - A$. Таким чином $A = 400$, $a_2 + a_3 + a_4 = 300$. Звідси $X = 1500$.

<u>6 клас</u>

1. Задача № 2 за 5 клас.

2. Від чисельника та знаменника кожного з дробів $\frac{2018}{2011}$ та $\frac{2054}{2019}$ відняли таке натуральне числа a, що обидва отримані дроби стали рівними. Яке значення могло приймати число a?

<u>Відповідь:</u> 2009.

<u>Розв'язання</u>. Для розв'язання задачі достатньо скласти пропорцію:

$$\frac{2018-a}{2011-a} = \frac{2054-a}{2019-a} \Rightarrow (2018-a)\cdot(2019-a) = (2011-a)\cdot(2054-a) \Rightarrow$$

$$2018\cdot 2019 - 2018a - 2019a = 2011\cdot 2054 - 2011a - 2054a \Rightarrow 28a = 56252 \Rightarrow$$

$a = 2009$.

3. Знайдіть найменше натуральне число x, для якого число $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} + \frac{5x}{6}$ є натуральним?

<u>Відповідь:</u> 20.

Розв'язання. Якщо додати такі три доданки: $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{5x}{6}=\frac{3+4+5}{6}x=2x$, то бачимо що це число є завжди цілим. Тому залишається подивитися, за яких умов натуральним числом буде така сума $\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}=\frac{31x}{20}$. Зрозуміло, що x має націло ділитися на 20, а тому найменше можливе значення $x=20$.

4. Яким буде чисельник цього виразу, якщо його записати як правильний нескоротний дріб:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}?$$

Відповідь: 21.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{4}{8\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{6}{17\cdot 23}=$$

$$=\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{5-3}{3\cdot 5}+\frac{8-5}{5\cdot 8}+\frac{12-8}{8\cdot 12}+\frac{17-12}{12\cdot 17}+\frac{23-17}{17\cdot 23}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}=\frac{1}{2}-\frac{1}{23}=\frac{21}{46}.$$

5. Задача № 5 за 5 клас.

7 клас

1. Задача № 2 за 6 клас.

2. Задача № 3 за 6 клас.

3. Задача № 4 за 6 клас.

4. Відомо, що числа a, b, c задовольняють умові $a^2+2b^2=3c^2$. Які значення може приймати вираз $\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b-c}{b-a}\right)\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}$?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Зробимо низку перетворень:

$$\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b-c}{b-a}\right)\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{2c^2-2a^2}{(b+c)(b-a)}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{2(c-a)(a+2b+3c)}{(b+c)(b-a)}=$$

$$=\frac{2(ca-a^2+2bc-2ba+3c^2-3ac)}{(b+c)(b-a)}=\frac{2(2bc-2ba+2b^2-2ac)}{(b+c)(b-a)}=\frac{4(b+c)(b-a)}{(b+c)(b-a)}=4.$$

5. Позначимо через $[a]$ найбільше ціле число, що не перевищує a. Знайдіть дві останні цифри числа $\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{2020}}{3}\right]$.

Відповідь: 40.

***Розв'язання*.** Оскільки 2^n – парне число при $n \geq 1$, то $\left[\frac{2^n}{3}\right]=\left[\frac{2^n-1}{3}\right]$. Оскільки $2^n-1 \vdots 3$ при $n=2m$ та $2^n-2 \vdots 3$ при $n=2m+1$. Тому $\left[\frac{2^{2n}}{3}\right]=\frac{2^{2n}-1}{3}$ та $\left[\frac{2^{2n+1}}{3}\right]=\frac{2^{2n+1}-2}{3}$.

Звідси маємо, що

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{2020}}{3}\right]=$$

$$=0+\left(\frac{2-2}{3}+\frac{2^2-1}{3}\right)+\left(\frac{2^3-2}{3}+\frac{2^4-1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{2^{2019}-2}{3}+\frac{2^{2020}-1}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3}+\ldots+\frac{2^{2020}}{3}-1\cdot 1010=\frac{1}{3}\cdot(2+2^2+\ldots+2^{2020})-1010=\frac{2^{2021}-2}{3}-1010.$$

Подивимося на останні цифри степенів 2:

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04,...

Як бачимо, ця періодична послідовність має предперіод, а далі повторюється з кроком 20. Таким чином $2021=1+20l \Rightarrow 2^{2021}=100k+52 \Rightarrow 2^{2021}-2=100k+50$. Оскільки $2^{2021}-2 \vdots 3$, то $k=3s+1 \Rightarrow$

$$2^{2021}-2=100k+50=100(3s+1)+50=300s+150 \Rightarrow$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot(2^{2021}-2)-1010=\tfrac{1}{3}\cdot(300s+150)-1010=100t+50-10=100t+40.$$

8 клас

1. Петрик знає, що дволітрова пляшка пива Чернігівське коштує в Києві 100 грн., а в Чернігові – 99 грн. Пиво Оболонь коштує в Києві 99 грн., а в Чернігові – 100 грн. Він має 100000 грн., хоче зробити два рейси з пивом – купити в Києві пиво Оболонь та продати його в Чернігові, а звідти привезти в Київ Чернігівське пиво та продати його. Який Петрик матиме прибуток, якщо витрати на переїзд від Києва до Чернігова та на зворотний шлях складають 1000 грн. в один бік?

Відповідь: 0.

***Розв'язання*.** Петрик витрачає 1000 грн. за дорогу від Києва то Чернігова, на решту суми, тобто на 99000 грн. може придбати 1000 пляшок. З них він отримає з продажу $100\cdot 1000=100000$ грн. аналогічно і при зворотному маршруті. Таким чином він жодного гривні прибутку не отримає.

2. Задача № 4 за 6 клас.

3. Задача № 4 за 7 клас.

4. Задача № 5 за 7 клас.

5. Розглянемо сукупність натуральних чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2020}$ задовольняє умови: 1010 чисел $a_1 + a_{2020}$, $a_2 + a_{2019}$, $\ldots$, $a_{1010} + a_{1011}$ є попарно різними. Яке найменше можливе значення може приймати число a_{2020}?

Відповідь: 3029.

***Розв'язання*.** Нехай $k = 1010$, і зробимо задачку в загальному випадку. Позначимо $\forall i = \overline{1,\, k-1}$ $a_{i+1} = a_i + x_i$ та $a_{2k-(i-1)} = a_{2k-i} + y_i$. Тобто

$$a_2 = a_1 + x_1,\ a_3 = a_2 + x_2,\ \ldots,\ a_k = a_{k-1} + x_{k-1} \text{ та}$$

$$a_{2k} = a_{2k-1} + y_1,\ a_{2k-1} = a_{2k-2} + y_2,\ \ldots,\ a_{k+2} = a_{k+1} + y_{k-1}.$$

За умовою послідовність натуральних чисел a_k зростаюча, тому $x_i \ge 1$, $y_i \ge 1$, $i = \overline{1,\, k-1}$. Якщо для деякого i матимемо $x_i = y_i$, то $a_{i+1} - a_i = x_i = y_i = a_{2k+1-i} - a_{2k-i} \Rightarrow a_{i+1} + a_{2k-i} = a_i + a_{2k+1-i}$ – суперечність. Таким чином $x_i + y_i \ge 3$. Тепер маємо:

$$a_{2k} = (a_{2k} - a_{2k-1}) + (a_{2k-1} - a_{2k-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 =$$
$$= y_1 + y_2 + \ldots + y_{k-1} + (a_{k+1} - a_k) + x_{k-1} + x_{k-2} + \ldots + x_1 + a_1 =$$
$$= (y_1 + x_1) + (y_2 + x_2) + \ldots + (y_{k-1} + x_{k-1}) + (a_{k+1} - a_k) + a_1 \ge 3(k-1) + 2 = 3k - 1.$$

Залишається навести приклад з такою оцінкою:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_k = 2k-1,\ a_{k+1} = 2k,\ a_{k+2} = 2k+1,\ \ldots,\ a_{2k} = 3k-1.$$
$$a_1 + a_{2k} = 3k,\ a_2 + a_{2k-1} = 3k+1,\ \ldots,\ a_k + a_{k+1} = 4k-1.$$

<u>9 клас</u>

1. Задача № 4 за 6 клас.

2. Задача № 5 за 7 клас.

3. Знайдіть площу ГМТ, які лежать у першому квадранті координатної площини OXY та задовольняють умови: $x + y + [x] + [y] \le 2019$. У відповідь запишіть перші чотири цифри площі шуканої ГМТ.

Відповідь: 5100.

***Розв'язання*.** Якщо $x + y < 1010$, то $[x] + [y] \le x + y < 1010$, тому $[x] + [y] \le 1009$ і відповідно $x + y + [x] + [y] \le 2019$. Таким чином прямокутний рівнобедрений трикутник, що визначається мовами $x + y < 1010$, $x,\ y \ge 0$ належить до ГМТ.

Нехай $x + y > 1010$, тоді $[x] + [y] > x - 1 + y - 1 > 1008$, тому $[x] + [y] \ge 1009$ і $x + y + [x] + [y] > 2019$, тобто поза зазначеним трикутником не існує точок, що задовольняють умову. Оскільки усі точки, що задовольняють умову $x + y = 1010$, мають нульову площу, то вони не впливають на відповідь. Таким чином шукана площа ГМТ дорівнює $\frac{1}{2} \cdot 1010^2 = 510050$.

4. Задача № 5 за 8 клас.

5. Для додатних чисел a, b, c справджується умова: $57a + 88b + 125c \ge 1148$. Яке найменше значення може приймати величина: $a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2$?

Відповідь: 466.
Розв'язання. Запишемо такі нерівності:

$$a^3+5a^2-57a+99=(a+11)(a-3)^2\geq 0,$$
$$b^3+5b^2-88b+208=(b+13)(b-4)^2\geq 0,$$
$$c^3+5c^2-125c+375=(c+15)(c-5)^2\geq 0.$$

Якщо додати усі ці нерівності, то отримаємо, що

$$a^3+5a^2+b^3+5b^2+c^3+5c^2\geq 57a+88b+125b-(99+208+375)\geq 466,$$

і рівність досягається при $a=3,\ b=4,\ c=5$.

10 клас

1. Для кутів α та β справджуються рівності: $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$, $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{5}$. Визначить значення $\cos(\alpha+\beta)$. У відповіді запишіть знаменник нескоротного дробу, якому дорівнює $\cos(\alpha+\beta)$.

Відповідь: 29.
Розв'язання. Запишемо такі тригонометричні перетворення:

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{та} \quad 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2}{5} \quad \Rightarrow$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-tg^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+tg^2\,\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-\frac{4}{25}}{1+\frac{4}{25}}=\frac{21}{29}.$$

2. Задача № 3 за 9 клас.

3. Задача № 5 за 8 клас.

4. Задача № 5 за 9 клас.

5. Знайдіть усі такі функції $f:R\to R$, які для довільних дійсних чисел x, y задовольняють рівності:

$$f(2xy)+f(f(x+y))=xf(y)+yf(x)+f(x+y).$$

У відповідь запишіть суму значень $f(2020)$ для усіх функцій, що задовольняють умову задачі.

Відповідь: 2.
Розв'язання. Умову задачі позначимо через $P(x,\ y)$. Тоді робитимемо такі підстановки:

$P(x,\ \tfrac{1}{2})$: $f(x)+f(f(x+\tfrac{1}{2}))=xf(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f(x)+f(x+\tfrac{1}{2})$.

$P(x+\tfrac{1}{2},\ 0)$: $f(0)+f(f(x+\tfrac{1}{2}))=(x+\tfrac{1}{2})f(0)+f(x+\tfrac{1}{2})$.

З цих двох співвідношень отримуємо, що

$$f(x)-f(0)=2xf(\tfrac{1}{2})-2xf(0)\ \Rightarrow\ f(x)=2x(f(\tfrac{1}{2})-f(0))+f(0).$$

Таким чином розв'язком може бути лише лінійна функція, підставимо в умову $f(x)=ax+b$:

$$a2xy+b+af(x+y)+b=x(ay+b)+y(ax+b)+a(x+y)+b\ \Rightarrow$$

$$2axy + a^2(x+y) + ba + b = axy + bx + axy + by + a(x+y) \Rightarrow$$
$$a^2(x+y) + ba + b = bx + by + a(x+y) \Rightarrow (a^2 - a - b)(x+y) + b(a+1) = 0 \Rightarrow$$
$$a^2 - a - b = 0 \text{ та } b(a+1) = 0.$$

Випадок 1. $b = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0$ та $a = 1 \Rightarrow f(x) = 0$ та $f(x) = x$.

Випадок 2. $a = -1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x$.

Для цих трьох функцій сума значень у будь-якій точці дорівнює 2.

11 клас

1. Задача № 1 за 10 клас.

2. Задача № 5 за 8 клас.

3. Знайдіть значення дійсного числа a, для якого функція $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6}$ на проміжку $3 < x < 5$ має найбільше значення в точці $x = 4$. Для знайденого значення a, у відповідь запишіть значення $10a + 100$.

Відповідь: 55.

Розв'язання. З умов задачі випливає, що $f(x) \le f(4)$ при $3 < x < 5$, тобто $\frac{a}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} \le \frac{a}{3}$. Перетворимо цю нерівність у дріб зведенням до спільного знаменника, враховуючи, що два з них додатні, а один – від'ємний:

$$ax^3 - (12a+6)x^2 + (44a+30)x - (48a+24) \le 0.$$

Зрозуміло, що при $x = 4$ ця нерівність перетворюється в рівність, тому ліва частина дорівнює:

$$(x-4)(ax^2 - (8a+6)x + (12a+6) \le 0.$$

Щоб значення при $x = 4$ було максимальним, треба, щоб при переході через значення $x = 4$ ліва частина не змінювала знак, тому там має бути множник $(x-4)^2$, тобто $x = 4$ є коренем квадратного тричлену $g(x) = ax^2 - (8a+6)x + (12a+6)$, тобто при $x = 4$ він обертається в 0, звідки випливає, що $g(4) = -4a - 18 = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{2}$. Звідси остаточно маємо, що дійсно при такому значенні a нерівність

$$ax^3 - (12a+6)x^2 + (44a+30)x - (48a+24) = (x-4)^2\left(12 - \frac{9}{2}x\right) \le 0$$

справджується для усіх $3 < x < 5$. Тоді $10a + 100 = 55$.

4. Задача № 5 за 10 клас.

5. Нехай $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ та $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ – дві послідовності дійсних чисел. Для усіх $n = \overline{0, 99}$ справджуються умови:

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2} a_n,\ b_{n+1} = \tfrac{1}{2} - a_n \text{ або } a_{n+1} = 2a_n^2,\ b_{n+1} = a_n.$$

Для різних n можути виконуватися не однакові умови, наприклад, для $n = 1$ може виконуватися умова $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{2} - a_n$, а для $n = 2$ може виконуватися умова $a_{n+1} = 2a_n^2$, $b_{n+1} = a_n$. Відомо, що $a_{100} \le a_0$, яке максимальне значення може приймати сума $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}$?

Відповідь: 50.

***Розв'язання*.** Якщо $a_0 < 0$, то очевидно, що $a_{100} > a_0$.

Якщо $a_0 = 0$, то $a_n = 0 \ \forall n$, а тому $0 \le b_n \le \frac{1}{2}$. Тоді зрозуміло, що $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} \le 50$.

Нехай тепер $a_0 > 0$, тоді $a_n > 0 \ \forall n$. Звідси має справджуватися умови:

$$(a_n - \tfrac{1}{2}a_{n-1})(a_n - 2a_{n-1}^2) = 0 \text{ та } a_{100} \le a_0.$$

Перепишемо це таким чином:

$$a_n^2 - \tfrac{1}{2}a_{n-1}a_n - 2a_{n-1}^2 a_n + a_{n-1}^3 = 0 \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} - \tfrac{1}{2} - 2a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} = 2a_{n-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{100}\frac{a_n}{a_{n-1}} + \sum_{n=1}^{100}\frac{a_{n-1}^2}{a_n} = 2\sum_{n=1}^{100}a_{n-1} + 50.$$

З вірменської нерівності (нерівності Шварца) матимемо, що

$$2\sum_{n=1}^{100}a_{n-1} + 50 - \sum_{n=1}^{100}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sum_{n=1}^{100}\frac{a_{n-1}^2}{a_n} \ge \frac{(a_0 + a_1 + \ldots + a_{99})^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}} \ge a_0 + a_1 + \ldots + a_{99} = \sum_{n=1}^{100}a_{n-1} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{100}a_{n-1} + 50 - \sum_{n=1}^{100}\frac{a_n}{a_{n-1}} \ge 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{100}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1}\right) \le 50.$$

Тепер покажемо, що $\forall n$ справджується умова: $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1}$.

Нехай знайдене a_{n-1}, тоді або $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ і $\frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{\frac{1}{2}a_{n-1}}{a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{1}{2} - a_{n-1} = b_n$. Або $a_n = 2a_{n-1}^2$ і $\frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{2a_{n-1}^2}{a_{n-1}} - a_{n-1} = a_{n-1} = b_n$

Таким чином з одержаної нерівності маємо, що $\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} - a_{n-1}\right) \le 50 \Rightarrow \sum_{n=1}^{100}b_n \le 50$.