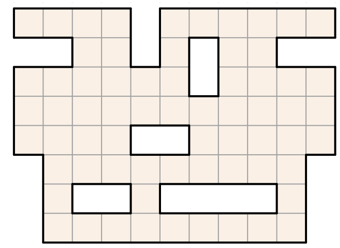
XXV Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5–12”



XXV Всеукраїнська заочна математична олімпіада “5 – 12”

В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5 – 12 класів. Наполегливо радимо потренуватися та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв’язання задач слід надсилати до 25 лютого 2021 року (за поштовим штемпелем) на адресу

`01601 МСП, Київ,`
`Київський національний університет ім. Тараса Шевченка`
`механіко-математичний факультет`
`кафедра математичного аналізу`
`“Олімпіада 5-12”`

або у відсканованому вигляді на електронну адресу `olymp5-12@ukr.net`.

Підсумки олімпіади буде підведено наприкінці березня на сайті

`http://www.mechmat.univ.kiev.ua` .

Умови задач

1. Розріжте зображену на емблемі олімпіади фігуру на шість рівних частин.

2. Є три монети вагою 7 грамів та три монети вагою 8 грамів. Усі монети виглядають однаково. Скільки зважувань на терезах без гир потрібно, аби розділити монети на три пари, кожна з яких важить 15 грамів?

3. На площині нарисовано квадрат і декілька прямих, які не проходять через його вершини. Для кожної сторони і кожної діагоналі квадрата обчислили кількість прямих, які перетинають цей відрізок. Чи могло виявитися, що ці кількості — шість послідовних натуральних чисел?

4. Під пальмою лежала велика купа кокосів. Перший краб узяв собі половину кокосів і ще один кокос, другий краб — третину кокосів, що залишилися, і ще два кокоси, третій краб — чверть кокосів, що залишилися, і ще три кокоси, тощо. Так тривало, поки залишок кокосів ділився на потрібну кількість частин. Яка найбільша кількість крабів могла дістати кокоси?

5. Вінні-Пух сів на дієту, коли кут між годинною та хвилинною стрілками дорівнював t°. Рівно через t хвилин він побачив, що кут між годинною та хвилинною стрілками знову дорівнює t°, і вирішив підкріпитися. Скільки часу Вінні-Пух сидів на дієті, якщо минуло менше години, а годинник завжди показує правильний час?

6. У царя сто міністрів. Кожен міністр вважає хоча б одного міністра чесним і хоча б одного міністра розумним. При цьому якщо міністр A вважає міністра B чесним, то всі, хто вважає міністра A розумним, теж вважають міністра B чесним. А якщо міністр A вважає міністра B розумним, то всі, хто вважає міністра A чесним, теж вважають міністра B розумним. Довести, що принаймні один міністр вважає себе розумним.

7. Нехай a, b, c — натуральні числа, жодне з яких не ділиться на інше. Довести, що

$$2a + 2b + 2c + \text{НСД}(a, b) + \text{НСД}(b, c) + \text{НСД}(a, c) < \\ < \text{НСК}(a, b) + \text{НСК}(b, c) + \text{НСК}(a, c).$$

8. Нехай ABC — гострокутний трикутник, D — середина BC. Бісектриси кутів $\angle ADB$ та $\angle ADC$ перетинають описані навколо трикутників ADB та ADC кола у точках E та F відповідно. Довести, що $EF \perp AD$.

9. Нехай a, b, c, d — такі додатні числа, що $abcd = 1$. Довести, що

$$(a + c)(b + d)(ac + bd) \geq 2(a + b + c + d).$$

10. Довести, що існує нескінченно багато натуральних чисел n таких, що $3^n - 1$ ділиться на $n^3 - 1$.

11. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E. Нехай P та Q — центри кіл, описаних навколо трикутників BCE та DCE відповідно. Пряма, яка проходить через точку P паралельно до AB, і пряма, яка проходить через точку Q паралельно до AD, перетинаються в точці R. Довести, що точка R лежить на прямій AC.

12. Чи існує многочлен f степеня 2021 з цілими коефіцієнтами такий, що при довільному цілому n кожні два з чисел $f(n)$, $f(f(n))$, $f(f(f(n)))$, $\ldots$ є взаємно простими?