Відбір команди Києва 2020–21 (8–9 класи)

"Те, що ми вчили у школах і університетах, –
Не освіта, а тільки спосіб її отримати."
Ральф Емерсон

1 тур (умови та розв'язання задач)

8 клас

1. Маємо натуральні числа 1, 2, 3, ..., 2020. Яку найменшу кількість чисел треба стерти так, щоб для будь-яких двох чисел $a>b$, що залишилися, сума $5a+b$ не ділилася націло на $a-b$?

Відповідь: 1515.
Розв'язання. Розглянемо чотири числа, що йдуть поспіль x, $x+1$, $x+2$ та $x+3$. Сума довільних двох з них ділиться на їхні різниці, в чому неважко переконатися шляхом перебору. Таким чином ми можемо залишити на дошці не більше як одне число з цих чотирьох. Розіб'ємо усі числа на четвірки таких, що йдуть поспіль. Тоді з кожної з них лишиться максимум одна, разом – не більше 505 чисел, тому витерти доведеться щонайменше 1515 чисел.

Приклад для такої кількості виходить, якщо залишити числа 1, 5, 9, ..., 2017. Тоді різниця довільних двох кратна 4, а вираз $5a+b$ для довільних двох a, b при діленні на 4 дає остачу 2.

2. Відомо, що для кожного натурального n справджується умова: $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n+1$, при цьому $a_{2020}=2020$. Чому може дорівнювати сума $a_1+a_2+\ldots+a_{2020}$?

Відповідь: $2019\cdot 505+2020$.
Розв'язання. Перепишемо умову задачі таким чином: $na_{n+1}=(n+1)a_n+n$. Запишемо ці умови для кожного $n=\overline{1,\ 2019}$:

$$1a_2=2a_1+1,\ 2a_3=3a_2+2,\ 3a_4=4a_3+3,\ \ldots,\ 2019a_{2020}=2020a_{2019}+2019.$$

Додамо ці усі рівності: тут кожне a_k для $k=\overline{2,\ 2019}$ входить в ліву частину з коефіцієнтом $k-1$, а в праву – з коефіцієнтом $k+1$, таким чином маємо такий підсумок:

$$2019a_{2020}=2(a_1+a_2+\ldots+a_{2019})+(1+2+\ldots+2019).$$

Оскільки $1+2+\ldots+2019=2019\cdot 1010$, то

$$2(a_1+a_2+\ldots+a_{2019})=2019a_{2020}-2019\cdot 1010=2019\cdot 2020-2019\cdot 1010=2019\cdot 1010$$

$\Rightarrow\ a_1+a_2+\ldots+a_{2019}=2019\cdot 505\ \Rightarrow\ a_1+a_2+\ldots+a_{2019}=2019\cdot 505$ і остаточно маємо, що

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2019}+a_{2020}=2019\cdot 505+2020.$$

3. Точка D – середина основи BC рівнобедреного трикутника ABC з кутом при вершині $\angle BAC<60°$. На прямій, що проходить через вершину B перпендикулярно BC, вибрана така точка E, для якої $\angle EAB=\angle BAC$. На прямій, що проходить через вершину C паралельно BA, вибрана така точка F, для якої $\angle CAD=\angle FAC$ та точки F та D лежать по різні сторони від прямої AC. Доведіть, що

а) $AE=CF$; ***б)*** $BF=EF$

Розв'язання. Побудуємо два трикутники MAB та PAC, що рівні ΔABC та обидва мають вершини у точці A, нехай точки L та S – середини відрізків BM та CP (рис. 1). Тоді

$E \in AM$, а $F \in AS$. Оскільки картинка симетрична відносно висота AD, то точка T – симетричний образ точки E, буде лежати на AP.

а) Таким чином замість рівності $AE = CF$ достатньо довести рівність $AT = CF$. Позначимо таким чином кути: $\angle BAD = \angle DAC = \angle SAC = \angle SAP = \alpha$. Тоді $\angle ABD = \angle ACD = 90° - \alpha$, тоді $\angle QCF = 90° - \alpha$, $\angle QCA = 90° + \alpha$ $\Rightarrow$ $\angle FCA = 2\alpha = \angle CAT$, крім того $\angle CAF = \angle ACT = \alpha$, таким чином $\Delta CAF = \Delta ACT$, звідки й випливає шукана рівність: $CF = AT = AE$.

б) За попередніми розрахунками з рівності $\Delta CAF = \Delta ACT$, звідси відстані від точок T та F до прямої AC однакова, тому $TF \parallel AC$. З цієї паралельності $\angle ATF = 180° - 2\alpha$, а з ΔACT маємо, що $\angle ATC = 180° - 3\alpha$ $\Rightarrow$ $\angle CTF = \alpha$. З того, що $\angle ACF = 2\alpha$ та $\angle ACT = \alpha$ випливає, що $\angle TCF = \alpha$. Таким чином ΔTCF – рівнобедрений, звідки $TF = CF$. Таким чином точка F лежить на серединному перпендикулярі до відрізка CT, а також відрізка BE, тому $FB = FE$, що й треба було довести.

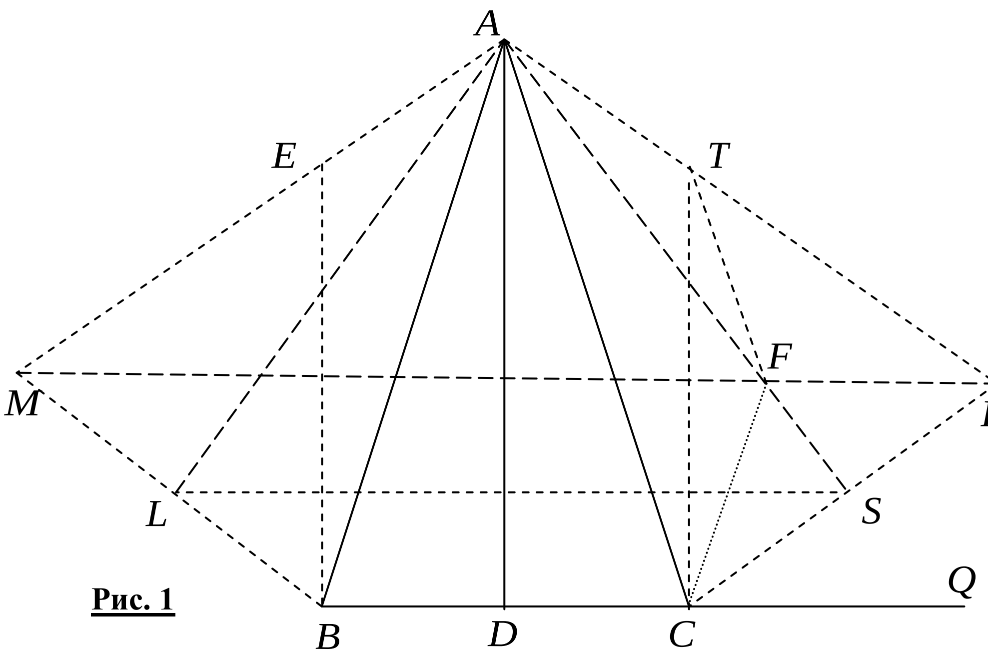

Рис. 1

4. Матуся принесла своїм дітям – Марії та Юрію – пакунок з 22 цукерками чотирьох різних кольорів, при цьому цукерок жовтого кольору більше ніж будь-якого іншого. Вона попросила поділити ці цукерки порівну за такими правилами. Діти будуть брати цукерки поки пакунок не спорожніє. Юрій розпочинає першим і кожним своїм ходом бере дві довільні цукерки або одну – останню цукерку, якщо то останній хід у грі. Марія кожним своїм ходом бере по одній цукерці кожного з кольорів, що лишаються в пакунку, тобто вона може взяти від 1 до 4 цукерок при різних ситуаціях. При якій максимальній та мінімальній кількості жовтих цукерок у пакунку гра може завершитися так, що у Марії та Юрія їх буде однакова кількість.

Відповідь: 16 – максимум, 8 – мінімум.

Розв'язання. Оскільки однакова кількість – це по 11, то зрозуміло, що Юрко розпочинає і має робити останній хід, тобто забрати останню цукерку, інакше непарна кількість цукерок в нього утворитися не може. Таким чином Юрко має зробити 6 ходів, відповідно Марія – 5. Оскільки за один хід Марія може взяти не більше однієї жовтої цукерки, то максимум вона їх візьме 5. Таким чином усього жовтих цукерок не може бути більше $16 = 5 + 11$. Покажемо, що при наявності такої кількості жовтих можливе завершення гри з рівним розподілом цукерок. Наприклад, там було 16 жовтих та по 2 цукерок інших кольорів.

Тоді Юрко бере завжди жовті, у перших 5 ходах по 2. Марія першими двома ходами бере по 4 цукерки, після чого в неї буде вже 8 цукерок і в пакунку лишаться лише жовті. Тому решту 3 ходи вона братиме по 1 цукерці і разом в неї стане 11, зрозуміло, що в Юрка буде 1 6-й хід, тобто в нього так само стане 11 цукерок.

Найменша кількість жовтих цукерок – це 7, бо якщо їх буде не більше 6, то інших кольорів не більше 5 і разом – не більше $6+5\cdot 3=21<22$ – суперечність. Припустимо, що жовтих цукерок 7. Тоді можливий розподіл цукерок може бути лише таким: $(7,\ 6,\ 6,\ 3)$, $(7,\ 6,\ 5,\ 4)$ або $(7,\ 5,\ 5,\ 5)$.

Нехай a_i – кількість непорожніх купок, які лишилися після i-го ходу Юрка. Тоді, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=11$ – кількість цукерок, що забрала Марія, при цьому $a_1\ge a_2\ge a_3\ge a_4\ge a_5\ge 1$. Очевидно, що $a_1=4$, оскільки першим своїм ходом Юрко не може забрати жодну з купок. Якщо $a_2\le 2$, то за два ходи Юрка з якихось двох купок забрали всі цукерки, при цьому Марія взяла з них 2, а Юрко не більше 4, тому в цих купках повинно було бути не більше 6 цукерок спочатку, що неможливо. Якщо $a_2=4$, то $a_3=a_4=a_5=1$, тому після третього ходу Юрка з трьох купок забрали всі цукерки. Юрко взяв не більше 6 з них, Марія також не більше 6, тому разом вони взяли не більше 12, що неможливо. Отже, $a_2=3$, а тому $a_3=2$, $a_4=a_5=1$, тобто після четвертого ходу Юрка, залишилась одна купка. За п'ять ходів Марія повинна взяти з неї п'ять камінців. Юрко за п'ятий і шостий хід повинен взяти ще три, тому спочатку в купці було не менше 8 камінців і ми знову отримали суперечність.

Покажемо, що для 8 жовтих цукерках – це можливо (рис. 2).

	0	1Ю	1М	2Ю	2М	3Ю	3М	4Ю	4М	5Ю	5М	6Ю
Жовті	8	8	7	7	6	6	5	5	4	2	1	0
Білі	6	6	5	5	4	3	2	0	0	0	0	0
Чорні	4	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
Сині	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 2

9 клас

1. Задача 1 за 10-11 класи

2. Задача 4 за 8 клас

3. Нехай $x,\ y,\ z$ – дійсні числа такі, що $\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z}$ – сторони трикутника і $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=5$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{x(y^2-2z^2)}{z}+\frac{y(z^2-2x^2)}{x}+\frac{z(x^2-2y^2)}{y}\ge 0.$$

Розв'язання. З першої умови задачі випливає, що

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})=$$
$$=2(xy+yz+zx)-x^2-y^2-z^2\ge 0.$$

З другої умови:

$$5xy=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)xy=x^2+\frac{xy^2}{z}+yz,\ 5yz=y^2+\frac{yz^2}{x}+zx \text{ та } 5zx=z^2+\frac{zx^2}{y}+xy.$$

Додамо ці нерівності:

$$5(xy+yz+zx)=(x^2+y^2+z^2)+\frac{xy^2}{z}+\frac{yz^2}{x}+\frac{zx^2}{y}+(xy+yz+zx)\ \Rightarrow$$

$$\frac{xy^2}{z}+\frac{yz^2}{x}+\frac{zx^2}{y}=4\left(xy+yz+zx\right)-\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+yz+zx\right),$$

$$=\frac{x(y^2-2z^2)}{z}+\frac{y(z^2-2x^2)}{x}+\frac{z(x^2-2y^2)}{y}\geq 0\,.$$

4. Нехай Ω – це коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$ з центром в точці O та ω – це коло, що вписане в чотирикутник $ABCD$ з центром в точці I. Діагоналі чотирикутника AC та BD перетинаються у точці E. Коло ω дотикається до сторін AD та AB у точках P та Q відповідно. Точка T – це ортогональна проекція точки E на пряму PQ. Доведіть, що прямі AO та IT перетинаються у точці, що належить колу Ω.

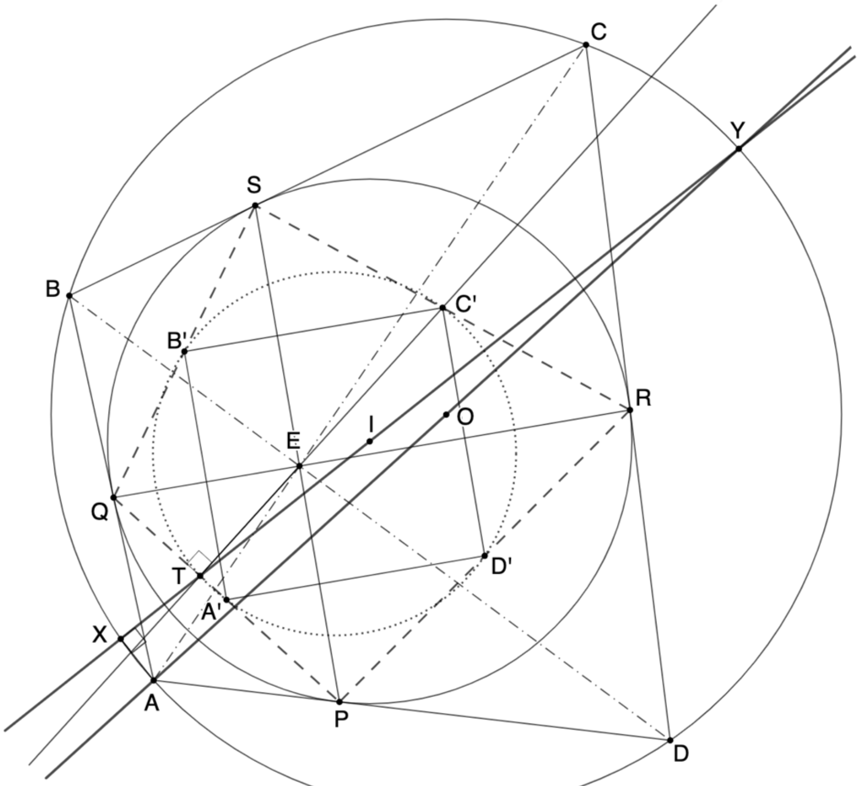

Рис. 3

Розв'язання. Нехай коло ω дотикається до сторін BC та CD у точках S та R відповідно. Позначимо середини відрізків PQ, QS, RS та RP як A', B', C' та D' відповідно. Тоді образами точок A, B, C та D при інверсії відносно кола ω є точки A', B', C' та D' відповідно (рис. 3). Використаємо властивість описаного чотирикутника, а саме що його діагоналі та хорди, які з'єднують точки дотику вписаного кола до протилежних сторін цього чотирикутника, перетинаються в одній точці. Тоді маємо, що прямі QR та PS перетинаються у точці E. Оскільки точки A, B, C та D лежать на одному колі, тоді точки A', B', C' та D' теж лежать на одному колі – назвемо його Ω'.

Оскільки$A'B' \parallel PS \parallel C'D'$ та $B'C' \parallel QR \parallel A'D'$ як середні лінії, то вписаний чотирикутник $A'B'C'D'$ – паралелограм, а отже і прямокутник.

Нехай прямі EC' та PQ перетинаються у точці T'. Тоді

$$\angle T'EP=\angle C'ES=\angle C'SE=\angle RQP=90^\circ-\angle T'PE,$$

звідси $\angle PT'E=90^\circ$. А тому точки T та T' співпадають. Звідси випливає, що $\angle A'TC'=90^\circ=\angle A'B'C'$, тому точка T належить колу Ω'.

Нехай пряма TI перетинає коло Ω у точках X та Y. Припустимо, що точки A та X лежать по один бік від прямої BD.Утакому випадку, образом точки T при інверсії відносно кола ω є точка X, тоді маємо, що точки A, A', T, X лежать на одному колі. Звідси $\angle AXI=\angle TA'I=90^\circ$. Це означає, що AY є діаметром кола Ω, що й завершує доведення – прямі AO та IT перетинаються у точці $Y\in\Omega$.