Відбори на Міжнародну математичну олімпіаду (IMO) 2020

"Женщины без мужского общества блекнут,
а мужчины без женского глупеют"
Антон Чехов

1 тур

1. Квадрат 600×600 поділений на фігурки чотирьох типів, що зображені на рис. 6.01: У фігурках двох типів, що зображені ліворуч, у зафарбованих чорним клітинках записано число 2^k, де k – номер стовпця, у якому знаходиться ця клітинка (стовпці пронумеровано зліва направо числами від 1 до 600). Доведіть, що сума всіх записаних чисел ділиться на 9.

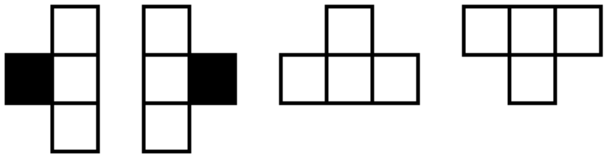

Рис. 6.01

Розв'язання. Заповнимо усі інші клітини таблиці: у кожну клітинку k-го стовпчика запишемо число 2^k. При такому заповненні сума чисел в клітинах будь-якого горизонтального прямокутника 1×6 ділиться на $(1+2+4+8+16+32)a = 63a$, де a – число, що записане у най лівішій клітинці цього прямокутника. Оскільки квадрат завбільшки 600×600, то його можна розбити на такі горизонтальні прямокутники, то при такому заповненні сума усіх чисел ділиться на 9.

Перші дві фігурки, що зображені на рис. 6.01, *вертикальними* (ті, що містять чорні клітинки), а другі дві – *горизонтальними*. Сума чисел у кожній горизонтальній фігурці складає $a + 2a + 2a + 4a = 9a$, де a – число, що записане в най лівішій його клітинці. Звідси ділиться на 9 сума усіх чисел в усіх таких горизонтальних фігурках, а тому ділиться на 9 і сума усіх чисел в усіх вертикальних фігурках. Позначимо цю суму через S, а суму чисел в усіх чорних клітинках через C.

Подвоєна сума чисел в лівій вертикальній фігурці з рис. 6.01 дорівнює $2(a + 2a + 2a + 2a) = 14a$, де a – число, що записане в чорній клітинці. Тому це число має таку саме остачу при діленні на 9, що й число $5a$. Подвоєна сума чисел в іншій вертикальній фігурі дорівнює $2(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a + a) = 5a$, де a – число, що записане в чорній клітинці. Таким чином число $2S$ дає таку саме остачу при діленні на 9, як і $5C$. Оскільки $S \,\vdots\, 9$, то й $C \,\vdots\, 9$, що й треба було довести.

2. Нехай натуральне число $n \geq 2$ та дійсні числа a_1, a_2, ..., a_n задовольняють умову $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Визначимо множину $A = \{(i,\ j) \mid 1 \leq i < j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\}$. Доведіть, що якщо множина A непорожня, то $\sum\limits_{(i,\ j)\in A} a_i a_j < 0$.

Розв'язання. Визначимо множини B та C таким чином:

$$B = \{(i,\ j) \mid 1 \leq i,\ j \leq n, |a_i - a_j| \geq 1\},\ C = \{(i,\ j) \mid 1 \leq i,\ j \leq n, |a_i - a_j| < 1\}.$$

Тоді ми маємо, що

$$\sum_{(i,\ j)\in A} a_i a_j = \frac{1}{2} \sum_{(i,\ j)\in B} a_i a_j,\ \sum_{(i,\ j)\in B} a_i a_j = \sum_{1\leq i,\ j\leq n} a_i a_j - \sum_{(i,\ j)\notin B} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{(i,\ j)\in C} a_i a_j = -\sum_{(i,\ j)\in C} a_i a_j.$$

Таким чином, нам треба показати, що якщо $A \neq \varnothing$, а тому й $B \neq \varnothing$, то $\sum_{(i,\ j)\in C} a_i a_j > 0$. Розглянемо такі 4 множини індексів:

$$P = \{i \mid a_i \leq -1\},\ Q = \{i \mid -1 < a_i \leq 0\},\ R = \{i \mid 0 < a_i < 1\} \text{ та } S = \{i \mid a_i \geq 1\}.$$

Тоді маємо так оцінки:

$$\sum_{(i,\ j)\in C} a_i a_j \geq \sum_{i\in P\cup S} a_i^2 + \sum_{i,\ j\in Q\cup R} a_i a_j = \sum_{i\in P\cup S} a_i^2 + \left(\sum_{i\in Q\cup R} a_i\right)^2 \geq 0.$$

Перша нерівність справджується оскільки усі додатні числа з правої частини входять до лівої, а усі від'ємні з лівої – входять до правої частини нерівності. Перга нерівність перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли ліва та права частини містять однакові від'ємні доданки, звідки випливає, що $|a_i - a_j| < 1$, як тільки $i,\ j \in Q \bigcup R$. Друга нерівність стає рівність лише за умови $P = S = \varnothing$. Але звідси випливає, що $A = \varnothing$. Оскільки це не так, то у правій частині має справджуватися строга нерівність, що й завершує доведення.

3. Висоти AH_1 та BH_2 гострокутного трикутника ABC перетинаються в ортоцентрі H. Коло w_1 проходить через H_2 та дотикається до BC в точці H_1, а коло w_2 проходить через H_1 та дотикається до AC в точці H_2. Доведіть, що другі дотичні BX та CY до кіл w_1 і w_2 відповідно ($X \neq H_1$ та $Y \neq H_2$) перетинаються на описаному колі трикутника ΔXHY.

(Данило Хілько)

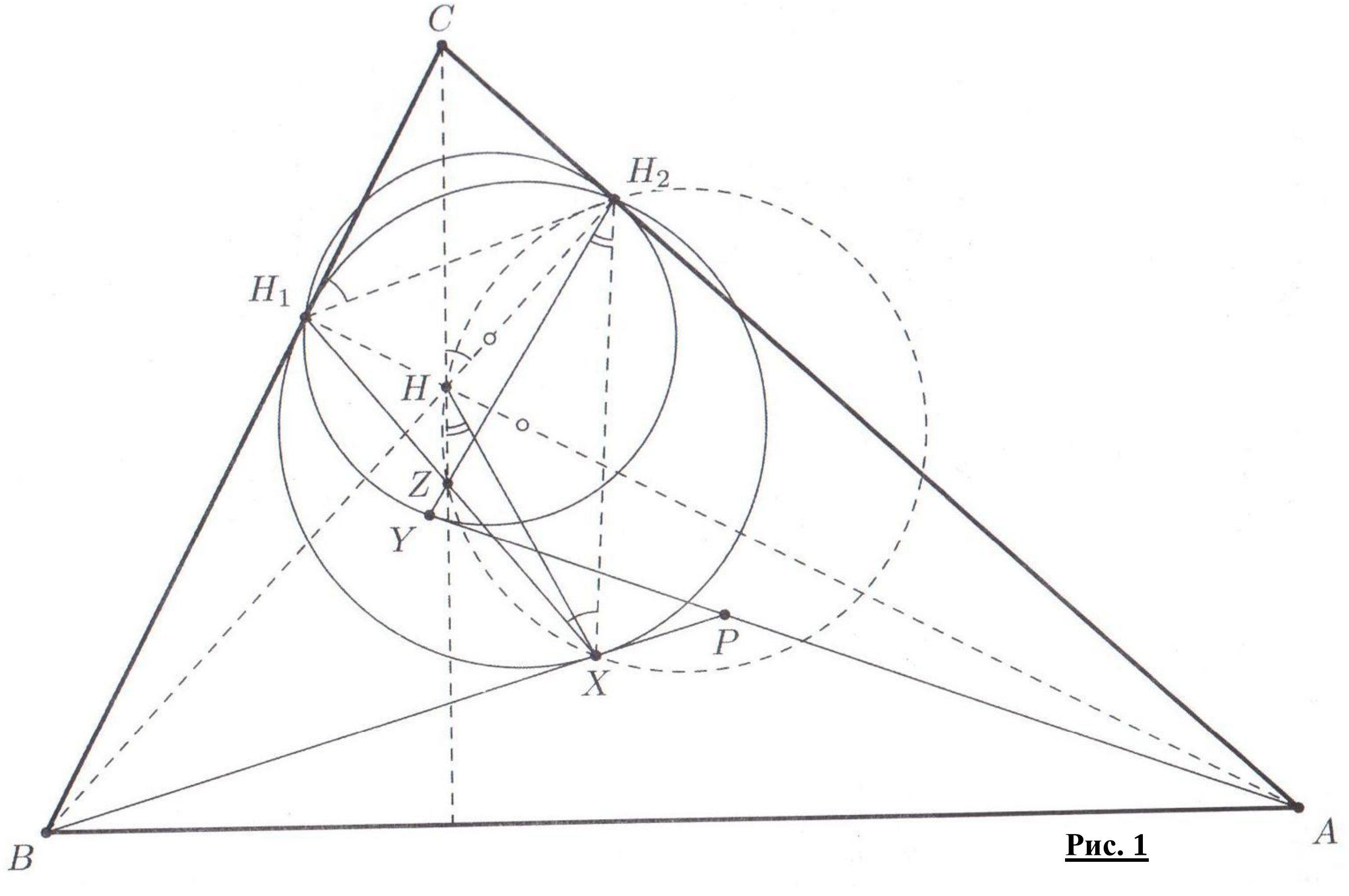

Рис. 1

***Розв'язання*.** Нехай прямі YH_2 та XH_1 перетинаються в точці Z (рис. 1). Насправді, точка Z лежить на висоті, що проведена з вершини C. Ми доведемо цей факт згодом, а зараз скористаємося з нього для підрахунку кутів. Зрозуміло, що чотирикутник HH_1CH_2 – вписаний. Також описане коло ΔH_1XH_2 дотикається до BC. Тому

$$\angle(ZH,\ HH_2) = \angle(CH,\ HH_2) = \angle(CH_1,\ H_1H_2) = \angle(H_1X,\ XH_2) = \angle(ZX,\ XH_2),$$

звідки чотирикутник H_2HZX . Тоді

$$\angle(ZH,\ HX) = \angle(ZH_2,\ H_2X) = \angle(ZH_2,\ H_2C) + \angle(CH_2,\ H_2H_1) + \angle(H_1H_2,\ H_2X) =$$
$$= \angle(ZH_2,\ H_2A) + \angle(AB,\ BC) + \angle(BH_1,\ H_1X),$$

де ми додатково використали те, що чотирикутник BH_1H_2A вписаний. Аналогічно, чотирикутник H_1HZY вписаний і

$$\angle(ZH,\ HY) = \angle(ZH_1,\ H_1B) + \angle(BA,\ AC) + \angle(AH_2,\ H_2Y).$$

Отже,

$$\angle(YH,\ HX) = \angle(YH,\ HZ) + \angle(ZH,\ HX) =$$
$$= \angle(BH_1,\ H_1Z) + \angle(CF,\ AB) + \angle(YH_2,\ H_2A) +$$
$$+ \angle(ZH_2,\ H_2A) + \angle(AB,\ BC) + \angle(BH_1,\ H_1X) =$$
$$= \angle(AC,\ CB) + 2\angle(BH_1,\ H_1X) + 2\angle(YH_2,\ H_2A).$$

Оскільки ΔXBH_1 та ΔYAH_2 – рівнобедрені, $\angle(BH_1,\ H_1X) = \angle(H_1X,\ XB)$ і $\angle(YH_2,\ H_2A) = \angle(AY,\ YH_2)$. Звідси

$$2\angle(BH_1,\ H_1X) = \angle(BH_1,\ H_1X) + \angle(H_1X,\ XB) = \angle(H_1B,\ BX).$$

Аналогічно $2\angle(YH_2,\ H_2A) = \angle(YA,\ AH_2)$. Відтак,

$$\angle(YH,\ HX) = \angle(AC,\ CB) + 2\angle(BH_1,\ H_1X) + 2\angle(YH_2,\ H_2A) =$$
$$= \angle(AC,\ CB) + \angle(H_1B,\ BX) + \angle(YA,\ AH_2) =$$
$$= \angle(AC,\ CB) + \angle(CB,\ BX) + \angle(YA,\ AC) = \angle(YA,\ BX) = \angle(YP,\ PX).$$

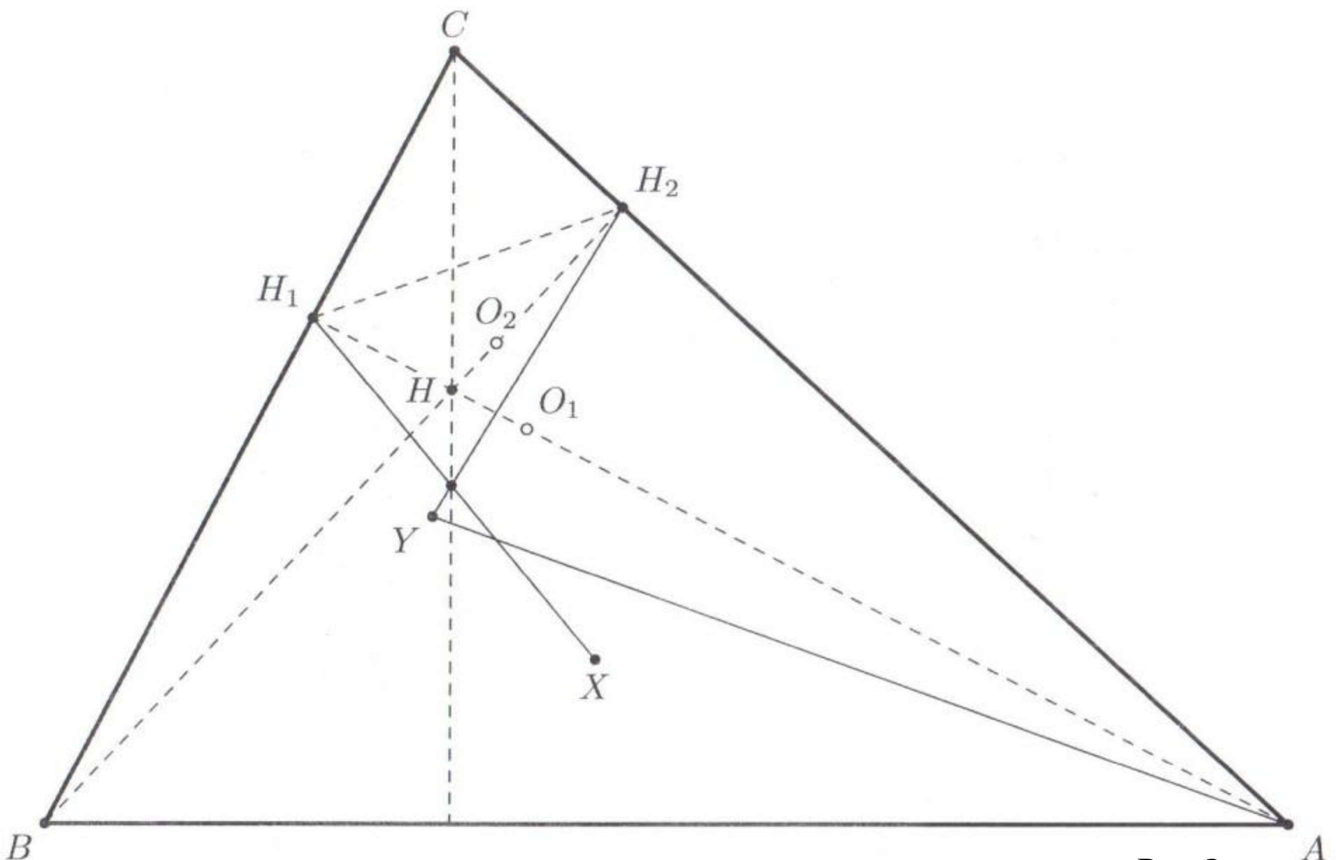

Рис. 2

Звідки $\angle(YH,\ HX) = \angle(YP,\ PX)$, тобто чотирикутник $HYPX$ вписаний.

Отже, залишилося довести, що точка Z лежить на прямій CH (Рис. 2). Нехай O_1 – центр w_1, а O_2 – центр w_2. Будемо застосовувати тригонометричну форму теореми Чеви в ΔH_1CH_2. Зауважимо, що ΔABC – гострокутний, а X – симетрична точці H_1 відносно BO_1, тобто X лежить всередині $\angle BH_1A$. Аналогічно, Y лежить всередині $\angle BH_2A$. Це дозволяє сказати, що відрізки H_1X та H_2Y лежать всередині $\angle BH_1H_2$ та $\angle H_1H_2C$ відповідно. Отже, за теоремою Чеви CH , H_1X та H_2Y перетинаються в одній точці, якщо

$$\frac{\sin\angle BHC}{\sin\angle HCA}\cdot\frac{\sin\angle YH_2C}{\sin\angle YH_2H_1}\cdot\frac{\sin\angle H_2H_1X}{\sin\angle XH_1C}=1.$$

Зауважимо, що $\angle BHC=90°-\angle B$, $\angle HCA=90°-\angle A$, а також

$$\frac{\sin\angle YH_2C}{\sin\angle YH_2H_1}=\frac{\sin\angle YH_2A}{\sin(\angle YH_2A+\angle CH_2H_1)}=\frac{\sin\angle YH_2A}{\sin(\angle YH_2A+\angle B)}=$$

$$=\frac{\sin\angle YH_2A}{\sin\angle YH_2A\cos\angle B+\cos\angle YH_2A\sin\angle B}=\frac{1}{\cos\angle B+ctg\ \angle YH_2A\sin\angle B}.$$

Аналогічно,

$$\frac{\sin\angle H_2H_1X}{\sin\angle XH_1C}=\cos\angle A+ctg\ \angle BH_1X\sin\angle A.$$

Отже, нам потрібно довести

$$\frac{\cos\angle B}{\cos\angle A}=\frac{\cos\angle B+ctg\ \angle AH_2Y\sin\angle B}{\cos\angle A+ctg\ \angle BH_1X\sin\angle A}\ \Leftrightarrow$$

$$ctg\ \angle BH_1X\sin\angle A\cos\angle B=ctg\ \angle AH_2Y\sin\angle B\cos\angle A\ \Leftrightarrow\ \frac{ctg\ \angle BH_1X}{ctg\ \angle AH_2Y}=\frac{\cos\angle A\sin\angle B}{\cos\angle B\sin\angle A}.$$

Нам відомо, що $\angle BH_1X=90°-\angle CBO_1$, а $\angle AH_2Y=90°-\angle CAO_2\ \Rightarrow$

$$\frac{ctg\ \angle BH_1X}{ctg\ \angle AH_2Y}=\frac{tg\ \angle CBO_1}{tg\ \angle CAO_2}=\frac{\frac{H_1O_1}{BH_1}}{\frac{H_2O_2}{AH_2}}=\frac{AH_2}{BH_1}\cdot\frac{H_1O_1}{H_2O_2}=\frac{AB\cos\angle A}{AB\cos\angle B}\cdot\frac{H_1O_1}{H_2O_2}.$$

Тобто тепер залишається довести, що $\dfrac{H_1O_1}{H_2O_2}=\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle A}$. Кола w_1 і w_2 проходять через H_1 і H_2. Тому пряма O_1O_2 є серединним перпендикуляром до відрізку H_1H_2. Тому

$$O_1H_1=\frac{H_1H_2}{2\cos\angle AH_1H_2}=\frac{H_1H_2}{2\cos(90°-\angle A)}=\frac{H_1H_2}{2\sin\angle A}.$$

Отже, $\dfrac{H_1O_1}{H_2O_2}=\dfrac{\sin\angle B}{\sin\angle A}$, що і потрібно було довести.