

The 12th Romanian Master of Mathematics Competition

День 2: Субота, 29 лютого, 2020, Бухарест

Language: Ukrainian

Задача 4. Позначимо через \mathbb{N} множину усіх додатних цілих чисел. Підмножина A множини \mathbb{N} називається *вільною від сум*, якщо для всіх чисел x та y (не обов'язково різних), що належать множині A , їх сума $x + y$ не належить A .

Знайдіть усі сюр'єктивні функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такі, що для кожної вільної від сум підмножини $A \subset \mathbb{N}$ її образ $\{f(a): a \in A\}$ є також вільною від сум множиною.

Зауваження: функція $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ називається сюр'єктивною, якщо для кожного додатного цілого n існує таке додатне ціле m таке, що $f(m) = n$.

Problem 5. *Вузлом* на координатній площині назвемо точку, обидві координати якої є цілими числами. *Вузловим многокутником* назвемо багатокутник, всі вершини якого є вузлами.

Нехай Γ — вузловий опуклий многокутник. Доведіть, що Γ міститься в деякому опуклому вузловому многокутнику Ω такому, що всі вершини Γ належать межі багатокутника Ω , та рівно одна вершина многокутника Ω не є вершиною багатокутника Γ .

Problem 6. Для кожного цілого числа $n \geq 2$ позначимо через $F(n)$ найбільший простий дільник числа n . *Дивна пара* — це пара різних простих чисел p та q , для яких не існує цілого числа $n \geq 2$ такого, що $F(n)F(n+1) = pq$.

Доведіть, що існує нескінченно багато дивних пар.

Кожна з трьох задач оцінюється з 7 балів.

Час на виконання: $4\frac{1}{2}$ години.