

# The 12<sup>th</sup> Romanian Master of Mathematics Competition

День 1: П'ятниця, 28 лютого, 2020, Бухарест

Language: Ukrainian

**Задача 1.** Дано трикутник  $ABC$  з прямим кутом  $C$ . Нехай  $I$  – центр вписаного кола трикутника  $ABC$ , а  $D$  – основа висоти, проведеної з точки  $C$  на  $AB$ . Вписане коло  $\omega$  трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $BC$ ,  $CA$  та  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$  відповідно. Нехай  $E$  та  $F$  – точки, що симетричні точці  $C$  відносно прямих  $C_1A_1$  і  $C_1B_1$  відповідно. Нехай  $K$  та  $L$  – точки, що симетричні точці  $D$  відносно прямих  $C_1A_1$  і  $C_1B_1$  відповідно.

Доведіть, що описані кола трикутників  $A_1EI$ ,  $B_1FI$  та  $C_1KL$  мають спільну точку.

**Задача 2.** Дано ціле число  $N \geq 2$ . Позначимо через  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$  і  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)$  дві послідовності невід'ємних цілих чисел. Для кожного цілого  $i \notin \{1, \dots, N\}$  визначимо  $a_i = a_k$  і  $b_i = b_k$ , де  $k \in \{1, \dots, N\}$  таке ціле число, що  $i - k$  ділиться на  $N$ . Вважатимемо, що  $\mathbf{a}$  є  $\mathbf{b}$ -гармонічною якщо кожне  $a_i$  дорівнює такому середньому арифметичному:

$$a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

Припустимо що ні  $\mathbf{a}$  ні  $\mathbf{b}$  не є сталими послідовностями, і одночасно  $\mathbf{a}$  є  $\mathbf{b}$ -гармонічною та  $\mathbf{b}$  є  $\mathbf{a}$ -гармонічною.

Доведіть, що в наборі чисел  $a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$  хоча б  $N+1$  число дорівнює нулю.

**Задача 3.** Дано ціле число  $n \geq 3$ . В деякій країні є  $n$  аеропортів та  $n$  авіакомпаній, що здійснюють двосторонні рейс. Для кожної авіакомпанії існують таке непарне число  $m \geq 3$  та  $m$  різних аеропортів  $c_1, \dots, c_m$  такі, що всі рейси цієї авіакомпанії – це всі рейси між такими парами аеропортів:  $c_1$  і  $c_2$ ;  $c_2$  та  $c_3$ ;  $\dots$ ;  $c_{m-1}$  і  $c_m$ ;  $c_m$  і  $c_1$ .

Доведіть, що існує замкнений маршрут, що складається з непарної кількості рейсів, в якому жодні два рейси не здійснюються однією авіакомпанією.

Кожна з трьох задач оцінюється з 7 балів.

Час виконання :  $4\frac{1}{2}$  години.