



Середа, 10 квітня, 2019

Задача 4. Нехай трикутник ABC має інцентр в точці I . Коло, що проходить через точку B та дотикається до AI в точці I перетинає сторону AB вдруге в точці P . Коло, що проходить через точку C та дотикається до AI в точці I перетинає сторону AC вдруге в точці Q . Доведіть, що PQ є дотичною до вписаного кола трикутника ABC .

Задача 5. Нехай $n \geq 2$ є цілим, та нехай a_1, a_2, \dots, a_n є цілими додатніми числами. Доведіть, що існують додатні цілі числа b_1, b_2, \dots, b_n , що задовольняють наступним трьом умовам:

(A) $a_i \leq b_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$;

(Б) остачі чисел b_1, b_2, \dots, b_n при діленні на n є попарно різними; та

(В) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Тут $\lfloor x \rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа x , тобто, найбільше ціле число, що не перевищує x .)

Задача 6. У колі Аліна провела 2019 хорд з попарно різними кінцями. Назвемо точку *особливою*, якщо для неї виконується одна з умов

(i) вона є однією з 4038 кінців проведених хорд; або

(ii) вона є точкою перетину щонайменше двох хорд.

Біля кожної *особливої* точки Аліна записує число. А саме для 4038 точок, що задовольняють умову (i): Аліна біля якихось 2019 точок записує число 0, а біля інших 2019 точок записує 1. А для точок, що задовольняють умову (ii) записує будь-яке ціле число (не обов'язково додатне).

На кожній хорді, Аліна розглядає відрізки, що з'єднують дві сусідні *особливі* точки. (Хорда з k *особливими* точками мають $k - 1$ таких відрізків.) Для кожного такого відрізка вона записує жовтим кольором суму чисел, що записані на кінцях цього відрізка, та синім кольором модуль їх різниці.

Аліна помітила, що $N + 1$ порахованих жовтих чисел це вточності числа $0, 1, \dots, N$. Доведіть, що хоча б одне записане синім кольором число ділиться на 3.

(Хорда це відрізок, що з'єднує дві різні точки на колі.)