VII олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для учнів 4–6 класів

"Бережeного Бог береже, а козака шабля"

Розв'язання завдань

4 клас

Основні задачі

1. У полі 5×5 в деяких клітинках розташовані міни, не більше однієї в клітинці. На рис. 1 показаний розподіл мін в деяких полях. Відомо, що числа стоять в полях, де мін немає, і число означає, скільки полів сусідніх із заданим, містять міну. Поля є сусідніми, якщо вони мають принаймні одну спільну вершину. Скільки усього мін на цьому полі?

1		**2**		**2**
	3		**3**	
3				**3**
	2			
			2	

Рис. 1

Відповідь: 8.

Розв'язання. Заповнюємо зірочками спочатку очевидні речі: там де в куточку число 2, та зліва на краю 3. Ставимо 0 там, де мін немає. Таким чином верхній ряд заповнений (рис. 2). Другий зверху рядок заповнюємо також, завдяки двійці, що там стоїть у верхньому рядку. Далі бачимо дві трійки, навколо яких вже стоять по три міни в другому рядку, а також двійку у четвертому рядку з двома мінами поруч. Далі біля трійки в правому стовпчику треба поставити дві міни в четвертому рядку. І в куток йде 0. Залишається порахувати кількість мін.

1	**0**	**2**	*****	**2**
*****	**3**	*****	**3**	*****
3	*****	**0**	**0**	**3**
*****	**2**	**0**	*****	*****
0	**0**	**0**	**2**	**0**

Рис. 2

2. Яна вирізала з паперу один прямокутник розміром 10×24, а також два однакові квадрати та ще один прямокутник, що не є квадратом. В результаті з цих чотирьох фігур вона склала квадрат, без накладань та дірок. Які розміри може мати другий прямокутник? Дайте, принаймні, чотири відповіді.

Відповідь: 34×44, 58×34, 19×29 та 2×24

Розв'язання. На рис. 3 наведені можливі розв'язання.

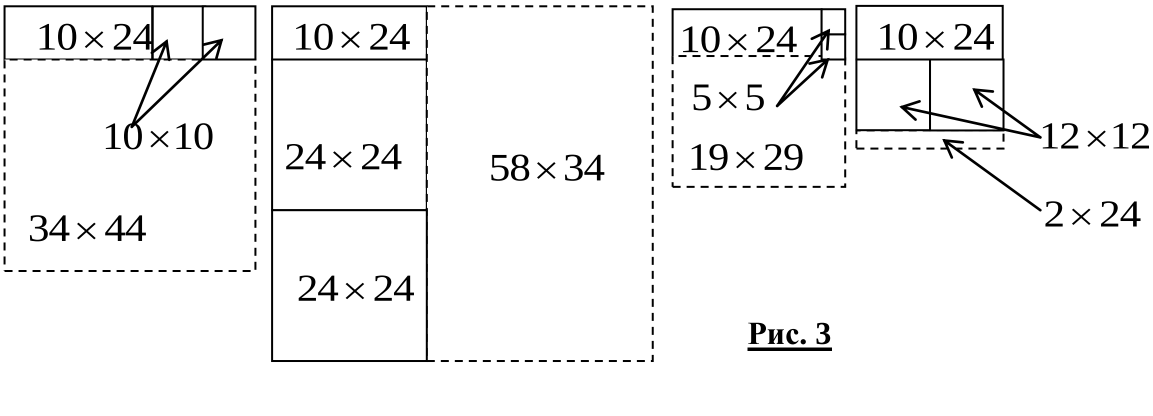

Рис. 3

3. У таблиці 2×9 верхній рядок зліва направо заповнений цифрами $1, 2, \ldots, 9$ у вказаному порядку. Чи можна другий рядок цієї таблиці заповнити тими самими числами у деякому іншому порядку, щоб сума двох чисел у кожному стовпчику утворювала точний квадрат?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
8	**2**	**6**	**5**	**4**	**3**	**9**	**1**	**7**

Рис. 4

Відповідь: так.

Розв'язання. Головною ідеєю побудови є така – якщо до цифри a у верхньому рядку приписали цифру b, то до цифри b слід приписати цифру a. Далі простим перебором отримуємо розподіл, як на рис. 4.

4. Коробка, яка має форму куба з ребром 4 см повністю заповнена набором кубиків зі стороною 1 см. Вкажіть усі інші можливі розміри коробок, що мають форму прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном і які можна повністю заповнити тим самим набором кубиків зі стороною 1 см.

Відповідь: $1\times1\times64$, $2\times2\times16$ та $8\times8\times1$.

Розв'язання. Малих кубиків усього $4^3=64$. Квадратне дно може бути таким, щоб його площа ділила 64. Таким чином можливі варіанти 1, 4, 16 та 64. Третій варіант відповідає заданій коробці. Інші варіанти дають такі відповіді: $1\times1\times64$, $2\times2\times16$ та $8\times8\times1$.

5. Тарасик та Стецько знайшли скриню зі скарбами. Кожний з них напхав у одну кишеню срібних монет, а у іншу – золотих. Тарасик мав у одній кишені дірку, через яку загубив половину своїх золотих монет. Стецько теж мав в одній своїй кишені дірку і втратив половину срібних монет. Вдома Стецько віддав третину своїх золотих монет Тарасикові, а Тарасик віддав чверть своїх срібних монет Стецькові. Після цього кожний з них мав 12 золотих та 18 срібних монет. Скільки і яких монет Тарасик та Стецько забрали зі скрині з самого початку?

Відповідь: Тарасик забрав зі скрині 12 золотих та 24 срібних, а Стецько – 18 золотих та 24 срібних.

Розв'язання. Нехай Тарасик мав з самого початку x золотих монет, а Стецько – y. Тоді можна скласти такі рівняння: $12=\frac{2}{3}y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$. Звідси $y=18$, $x=12$.

Аналогічно для срібних монет: Тарасик мав з самого початку a срібних монет, а Стецько – b. $18=\frac{3}{4}a=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b \Rightarrow a=24,\ b=24$.

Додаткові задачі

6. Розріжте прямокутник розміром 1×5 на чотири частини таким чином, щоб з них можна було скласти квадрат. Частини не мають накладатися одна на одну.

Відповідь: приклад показаний на рис. 5.

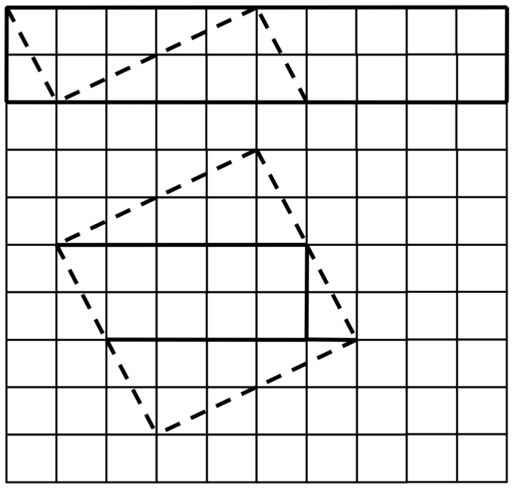

Рис. 5

7. У класі пройшов шаховий турнір в одне коло між усіма бажаючими, тобто кожний з кожним зіграв рівно по 1 разу. За перемогу гравець отримує 1 очко, за нічию – $\frac{1}{2}$ очка, за поразку очки не нараховуються. Відомо, що серед будь-яких трьох учасників є той, хто набрав в іграх з іншими двома рівно $\frac{3}{2}$ очки. Яка найбільша кількість учасників могла брати участь в турнірі?

Відповідь: 5 учасників.

Розв'язання. Приклад, що для 5 учасників турнір з такими умовами можливий, такий: нехай $A>B>C>D>E>A$ – знак більше означає перемогу. А інші партії завершилися нічиєю. Умови очевидно виконуються,адже з будь-яких трьох учасників принаймні два йдуть поспіль, та принаймні два – не поспіль.

Припустимо, що учасників принаймні 6. Очевидно, що для кожних трьох учасників мають справджуватися такі умови:

(1) не може бути трьох гравців, усі партії між якими завершилися внічию.

(2) не може бути трьох гравців, усі партії між якими завершилися без нічиїх.

Кожний учасник, наприклад, A, зіграв 5 партій. Якщо серед них було принаймні 3 нічиї, наприклад, проти B, C, D,тоді в зустрічах між ними не повинно бути нічиїх, щоб не суперечити умові (1) з гравцем A, але тоді маємо суперечність з умовою (2) між ними. Аналогічно, якщо там три гри без нічиїх. Одержана суперечність завершує доведення.

8. Петрик виклав на стіл 2019 сірників. Василь та Грицько вирішили зіграти в гру – Василь може за один хід взяти зі стола 16 або 25 сірників, Грицько може за один хід взяти зі стола 11 або 29 сірників. Ходи роблять по черзі, програє той, хто не може зробити хід, тобто на столі лишається менше сірників, ніж треба для ходу (або не лишилося жодного сірника після ходу супротивника). Петрик вийшов, а коли повернувся, то гра закінчилася, при цьому на столі лишилося 5 сірників. Хто переміг у цій грі і хто ходив першим?

Відповідь: переміг Василь, він ходив першим.

Розв'язання. Скористаємося подільністю на 9, на усі числа, що розглядатимемо, будемо дивитися як на остачу за модулем 9. На початку гри число сірників дорівнює 3. Якщо першим ходив Василь, то число стане рівним 5, тоді після ходу Грицька воно знову стане рівним 3. І далі все повторюється. Якщо порядок ходів інший, то спочатку ходить Грицько, і число сірників на столі стає рівним 1, далі після ходу Василя воно знову стане рівним 3.

Як бачимо з умов задачі, першим ходив Василь, лише після такого порядку ходів на столі може лишитися 5 сірників. Він і переміг, оскільки саме Грицько не може зробити наступний хід.

5 клас

Основні задачі

1.Задача № 2 за 4 клас.

2.Задача № 3 за 4 клас.

3.Задача № 5 за 4 клас.

4. В рядок зліва направо стояли 10 дітей, у кожного з яких була певна кількість горіхів. При цьому у дівчат та хлопчиків сумарна кількість горіхів була однакова. За командою вчителя кожна дитина віддала по 1 горіху кожній дитині, що стоїть правіше від неї (не обов'язково поруч). По завершенню цієї передачі виявилося, що у дівчат стало на 25 горіхів більше, ніж було до того. Скільки в рядку могло стояти дівчат?

Відповідь: 5.

Розв'язання. Зрозуміло, що діти передають відповідно $9, 8, \ldots, 0$ горіхів, а отримують відповідно $0, 1, \ldots, 9$. Тобто кількість горіхів у п'ятьох дітей збільшується на $9, 7, 5, 3, 1$, а у інших на такі саме кількості зменшується. Оскільки $9+7+5+3+1=25$, звідси маємо, що усі дівчата мали лише збільшувати кількість своїх горіхів. Таким чином їх було рівно 5.

5. Равлик рухається на папері в клітинку так, як це показано на рис. 7, а саме по спіралі, не заходячи двічі на жодну клітинку і не пропускаючи жодної, при цьому усі ці клітинки нумеруються послідовно. В якому напрямі равлик буде рухатися від клітинки з номером 243 до клітинки з номером 244: нагору, донизу, ліворуч чи праворуч?

Відповідь: ліворуч.

Розв'язання. Треба з'ясувати закономірність руху равлика. Спочатку він рухається 1 крок праворуч, далі 1 крок нагору. Далі – 2 кроки ліворуч і 2 кроки донизу. Потім все повторюється – 3 кроки праворуч та 3 кроки нагору, 4 кроки ліворуч і 4 кроки донизу. Переконатися в цьому нескладно, якщо на попередньому кроці було k кроків у певному напрямі, то наступного разу в тому напрямі буде $k+2$ кроки. Таким чином треба порахувати кількість ходів до потрапляння в поле 243.

$$1+1+2+2+\ldots+15+15=2\cdot(1+2+\ldots+15)=240.$$

Останній хід на 15 був нагору. Дійсно, непарні довжини відповідають парам ходів $\rightarrow\uparrow$, а парні – $\leftarrow\downarrow$. Таким чином останні 15 кроків були нагору, тому наступні 16 ходів, які починаються з клітинки 241, будуть ліворуч.

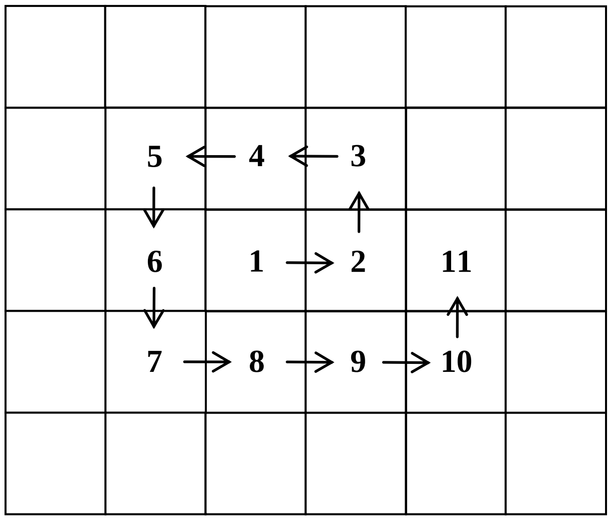

Рис. 7

Додаткові задачі

6. Задача № 6 за 4 клас.

7. Задача № 7 за 4 клас.

8. Задача № 8 за 4 клас.

6 клас

Основні задачі

1. Задача № 3 за 4 клас.

2. Задача № 3 за 5 клас.

3. Задача № 4 за 5 клас.

4. Задача № 5 за 4 клас.

5. Задача № 6 за 4 клас.

Додаткові задачі

6. Задача № 7 за 4 клас.

7. Задача № 8 за 5 клас.

8. У Юлі є чотири однакових трикутники, у Катерини є квадрат та у Олександри є квадрат іншого розміру. Разом Катерина та Юля можуть скласти квадрат з усіх своїх п’яти фігурок. Чи може статися так, що й Олександра та Юля також зможуть скласти квадрат з усіх своїх п’яти фігурок? (Квадрати складаються без прогалин та накладань).

Відповідь: так.

Розв’язання. Можливий приклад показаний на рис. 8.

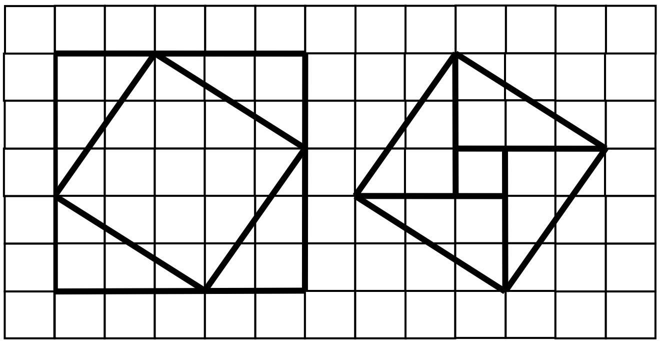

Рис. 8