Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXIV Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

2 тур

27 січня 2019 року

"Я всіх розумніший, але то не помітно"
Наталія Резнік

7 клас

1. Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b), що задовольняють рівності:

$$ab^3 + a^3 + b + 1 = 2019.$$

(Рожкова Марія)

Відповідь. $a = 2$, $b = 10$.
Розв'язання. З умов задачі зрозуміло, що обидві невідомі – парні, бо інакше маємо рівність парного та непарного чисел. Позначимо через $a = 2n$ та $b = 2k \Rightarrow$

$$2n \cdot 8k^3 + 8n^3 + 2k = 2018 \text{ або } 8nk^3 + 4n^3 + k = 1009.$$

Далі можна зрозуміти, що k обов'язково має бути непарним, і зараз доволі просто все розв'язати простим невеликим перебором. $nk^3 \le \frac{1009}{8}$ або $k^3 \le 125$.

Таким чином залишається рівно три варіанти.

$k = 5 \Rightarrow 1000n + 4n^3 = 1004 \Rightarrow n = 1$ задовольняє умову. При більших n ліва частина стає більшою за 1004.

$k = 3 \Rightarrow 64n + 4n^3 = 1006 \Rightarrow$ розв'язків немає, бо ліва частина ділиться на 4, а права – ні.

$k = 1 \Rightarrow 8n + 4n^3 = 1008 \Rightarrow 2n + n^3 = 252 \Rightarrow n = 2m \Rightarrow 4m + 8m^3 = 252 \Rightarrow$ $m + 2m^3 = 63$. Залишається розібрати три випадки по m, оскільки з останньої рівності очевидно, що $m \le 3$. $m = 1$, $m = 2$ та $m = 3$ умови не задовольняє.
Тому шукана пара єдина, $k = 5$ та $n = 1 \Rightarrow b = 10$ та $a = 2$.

2. Андрій та Олеся грають в таку гру. На числовому промені зліва направо написані у вказаному порядку усі натуральні числа: 1, 2, 3, ... Вони по черзі, розпочинає Олеся, послідовно, починаючи з 1, викреслюють записані числа за такими правилами – якщо на попередньому ході один з гравців викреслив n послідовних чисел, то інший гравець наступним ходом може викреслити або $n+1$, або $n-1$ (якщо число $n-1$ – натуральне) натуральне число, починаючи з першого не викресленого. Перед початком гри Андрій визначає число $k \ge 2019$. Перемагає в грі той з гравців, хто своїм ходом викреслить число k. Хто переможе за правильної гри обох гравців, якщо Олеся першим ходом може викреслити від 1 до 10 перших чисел?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: Олеся.
Розв'язання. Першим ходом Олеся викреслює одне число (зрозуміло, що то буде число 1). Тоді Андрій може викреслити тільки 2 наступних числа. І надалі Олеся бере кожним викреслює 1 число. Таким чином перед кожним своїм ходом Олеся має ситуацію, коли викреслені перші 3, 6, …, $3m$ чисел. Нехай $k = 3q + r$, $r = 1, 2, 3$. Якщо $r = 1, 3$, то Олеся своєю стратегією доводить ситуацію, коли перед її ходом залишається r чисел, які вона й викреслює разом з числом k і перемагає. Якщо $r = 2$, то Олеся викреслює 3 числа, серед яких і число k.

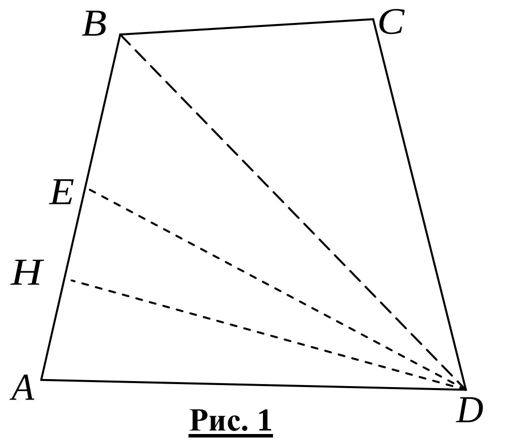


Рис. 1

3. У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle ABD = \angle DBC$ та $AD = CD$. Нехай DH – висота ΔABD. Доведіть, що $|BC - BH| = HA$.

(Хілько Данило)

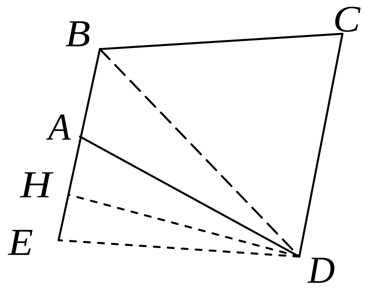


Рис. 2

Розв'язання. Відкладемо на промені BA відрізок $BE = BC$. Якщо точка E лежить на відрізку AB (рис. 1), то $\Delta BCD = \Delta BED$ за двома сторонами і кутом між ними. Тоді $AD = CD = ED$, звідки ΔADE є рівнобедреним. В ньому HD висота, а тому й медіана. Тепер маємо, що

$$AH = HE = HB - BE = HB - BC \Rightarrow BC = BH - HA,$$

Якщо точка A лежить на відрізку BE (рис. 2), то аналогічно $\Delta BCD = \Delta BED$ і

$$AH = HE = BE - HB = BC - HB \Rightarrow BC = BH + HA.$$

4. Знайдіть дріб, що є найбільшим серед усіх 1010 наведених:

$$\frac{1}{2019}, \frac{1+2018}{2019+2}, \frac{1+2018+3}{2019+2+2017}, \frac{1+2018+3+2016}{2019+2+2017+4}, \frac{1+2018+3+2016+5}{2019+2+2017+4+2015}, \ldots,$$

$$\frac{1+2018+3+2016+\ldots+1009}{2019+2+2017+4+\ldots+1011}, \frac{1+2018+3+2016+\ldots+1009+1010}{2019+2+2017+4+\ldots+1011+1010}.$$

(Рубльов Богдан)

Відповідь: найбільшими є 2-й, 4-й, …, 1010-й дробі.
Розв'язання. Розіб'ємо природнім чином усі дробі на дві групи – ті, що стоять на непарних місцях та ті, що на парних.

$a_1 = \frac{1}{2019}$,

$a_2 = \frac{1+2018+3}{2019+2+2017} = \frac{1+2021}{2019+2019}$,

$a_3 = \frac{1+2018+3+2016+5}{2019+2+2017+4+2015} = \frac{1+2021\cdot 2}{2019+2019\cdot 2}$, …,

$a_{505} = \frac{1+2018+3+2016+5+\ldots+1012+1009}{2019+2+2017+4+2015+\ldots+1008+1011} = \frac{1+2021\cdot 504}{2019+2019\cdot 504}$.

$b_1 = \frac{1+2018}{2019+2} = \frac{2019}{2021}$,

$b_2 = \frac{1+2018+3+2016}{2019+2+2017+4} = \frac{2019\cdot 2}{2021\cdot 2} = \frac{2019}{2021}$,

$b_3 = \frac{1+2018+3+2016+5+2014}{2019+2+2017+4+2015+6} = \frac{2019\cdot 3}{2021\cdot 3} = \frac{2019}{2021}$, …,

$b_{505} = \frac{1+2018+3+2016+5+\ldots+1012+1009+1010}{2019+2+2017+4+2015+\ldots+1008+1011+1010} = \frac{2019\cdot 505}{2021\cdot 505} = \frac{2019}{2021}$.

Таким чином усі дробі, що позначені як b_i, $i = \overline{1, 505}$ приймають однакові значення, які дорівнюють $\frac{2019}{2021}$. Порівняємо тепер дробі a_k та a_{k+1}:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1+2021\cdot k}{2019+2019\cdot k} - \frac{1+2021\cdot(k-1)}{2019+2019\cdot(k-1)} = \frac{(1+2021\cdot k)(2021+2021\cdot(k-1)) - (1+2021\cdot(k-1))(2021+2021\cdot k)}{(2019+2019\cdot(k-1))(2019+2019\cdot k)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$2021 + 2021\cdot(k-1) + 2021^2 k + 2021^2 k(k-1) -$$

$$- 2021 - 2021\cdot k - 2021^2(k-1) - 2021^2 k(k-1) = 2021^2 - 2021 > 0$$

Таким чином найбільшим дробом буде або $\frac{2019}{2021}$ або $a_{505} = \frac{1+2021\cdot 504}{2019+2019\cdot 504}$. Порівняємо тепер їх.

$$\frac{1+2021\cdot 504}{2019+2019\cdot 504} - \frac{2019}{2021} = \frac{(1+2021\cdot 504)\cdot 2021 - (2019+2019\cdot 504)\cdot 2019}{(2019+2019\cdot 504)\cdot 2021} < 0 \Leftrightarrow$$

$$2021 + 2021\cdot 2021\cdot 504 - 2019^2 - 2019^2\cdot 504 =$$

$$= 2021 + (2021^2 - 2019^2)\cdot 504 - 2019^2 = 2021 + 8080\cdot 504 - 2019^2 = -2020 < 0.$$

3.1. Вчителька на дошці нарисувала координатну площину та позначила деякі точки на цій площині. На жаль, двійочник Вася, що був черговим, витер майже весь рисунок, окрім двох точок $A(1; 2)$ та $B(3; 1)$. Чи зможе відмінник Андрійко за цими двома точками побудувати початок системи координат точку $O(0;0)$? На дошці точка A розташована вище та лівіше за точку B.

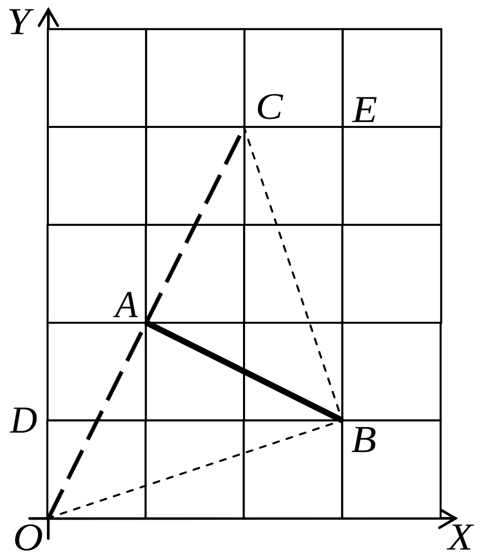


Рис. 3

Відповідь: може.
Розв'язання. Розглянемо трикутники CBE та OBD (рис. 3). Вони прямокутні та мають рівні катети, тому вони також рівні, звідки $CB = OB$. Аналогічно доводиться, що $AC = AB = OA$. Тоді ΔOCB – рівнобедрений, в якому відрізок BA є медіаною, а тому й висотою.
Тепер алгоритм побудови такий: будуємо пряму $OC \perp AB$, що проходить через точку A. Відкладаємо на цій прямій відрізки $AO = AB$ та $AC = AB$. Точка O розташована нижче ніж точка C.

4.1. Число 1000 розбили на 9 не обов'язково різних натуральних доданків. Після цього виписали усі різні числа, які можна отримати, якщо додати деякі з цих доданків (від одного до восьми). Яка найменша кількість чисел може бути виписаною?

Відповідь: 9 різних чисел.
Розв'язання. Розіб'ємо 1000 на 8 чисел 100 та одне число 200. У такому випадку сума доданків може приймати 9 різних значень $100 \cdot 1,\ 100 \cdot 2,\ \ldots,\ 100 \cdot 9$.
Доведемо, що неможна отримати менше 9 різних чисел: оскільки 1000 не ділиться на 9, тобто в нас буде принаймні 2 різних числа. Упорядкуємо усі числа за зростанням. Спочатку виберемо тільки перше, далі – тільки перше та друге, далі перше, друге та третє, і так далі, наприкінці виберемо перші 8 чисел – і так ми отримаємо 8 різних сум. Тепер візьмемо останні 8 чисел – нова сума більша за усі попередні, тому на дошці виявилося не менше 9 різних чисел.

8 клас

1. З пунктів А та Б назустріч один одному виїхали два велосипедисти зі швидкостями v_1 та v_2, де $v_1 \geq v_2$, і вперше зустрілися через 1 годину. Після зустрічі вони без зупинок продовжили рух до кінцевих пунктів. Якщо хтось із них доїхав до свого кінцевого пункту, то він розвертався та їхав у зворотному напрямі. Через який час після першої зустрічі відбулася їхня друга зустріч?

(Фольклор)

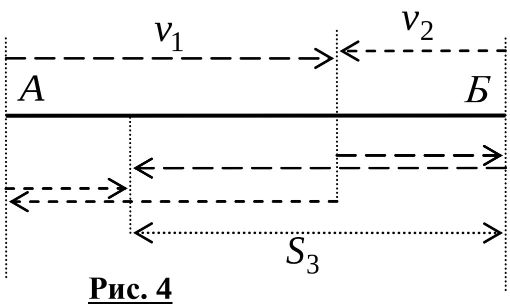


Рис. 4

Відповідь: якщо $v_1 < 2v_2$, то через 2 години, інакше через $\frac{2v_2}{v_1 - v_2}$ годин.
Розв'язання. До першої зустрічі перший велосипедист проїхав шлях $S_1 = v_1$, а другий – $S_2 = v_2$. Тобто відстань між пунктами А та Б дорівнює $v_1 + v_2$. Можливі два варіанти.

До другої зустрічі обидва досягли кінцевих пунктів та розвернулися. Нехай друга зустріч відбулася на відстані S_3 від пункту Б і через час t_2 після першої зустрічі (рис. 4). Тоді маємо такі рівності:
$$v_2 + S_3 = v_1 t_2 \text{ та } v_1 + (v_1 + v_2 - S_3) = v_2 t_2.$$
Додамо ці рівності і матимемо, що

$$v_2+S_3+2v_1+v_2-S_3=(v_2+v_1)t_2 \Rightarrow t_2=2.$$

До другої зустрічі перший досяг свого кінцевого пункту Б, розвернувся та догнав другого до того моменту, коли той досяг пункту А (рис. 5). Нехай друга зустріч відбулася на відстані S_3 від пункту Б і через час t_2 після першої зустрічі. Тоді маємо такі рівності:

$$S_3-v_2=v_2t_2 \text{ та } v_2+S_3=v_1t_2.$$

Розглянемо різницю цих рівностей і матимемо, що

$$v_2+S_3+v_2-S_3=(v_1-v_2)t_2 \Rightarrow t_2=\tfrac{2v_2}{v_1-v_2}.$$

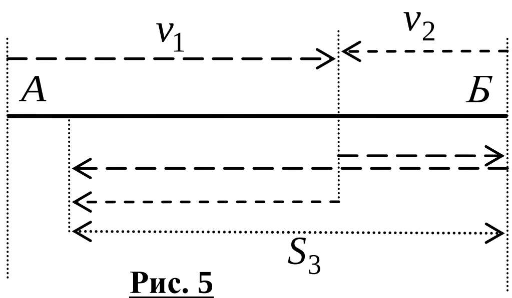


Рис. 5

Залишається зрозуміти, за яких умов на $v_1,\ v_2$ буде який з випадків. Перший випадок чинний, коли першій досягне А пізніше ніж другий. Тобто $\frac{v_2+v_2+v_1}{v_1}>\frac{v_1}{v_2} \Rightarrow 2v_2^2+v_1v_2>v_1^2$. Позначимо через $x=\frac{v_1}{v_2}$, тоді матимемо, що має справджуватися нерівність:

$$x^2-x-2<0 \Rightarrow (x+1)(x-2)<0 \Rightarrow x<2, \text{ тобто } v_1<2v_2.$$

2. У країні була така система автошляхів, що вони перетиналися лише у містах і не перетиналися між містами. При цьому з кожного міста можна було дітстатися до кожного іншого, якщо кожною дорогою можна було рухатися в обох напрямах. Між кожними двома містами не може бути більше однієї прямої дороги, що безпосередньо їх з'єднує. Уряд вирішив кожну дорогу зробити з одностороннім рухом, тобто якщо міста A та B з’єднані дорогою, то можна дістатися цією дорогою або з A в B, або навпаки. При цьому, для кожного міста повинна існувати принаймні одна дорога, якою з цього міста можна було б виїхати, та принаймні одна дорога, якою в це місто можна булоб заїхати. Чи обовязково в цій країні буде місто з якого, можливо через інші міста, можна дістатися до будь-якого іншого, або місто, до якого можна дістатися, з будь-якого іншого міста, також можливо через інші міста?

(Фольклор)

Відповідь: не обовязково.

Розв’язання. Покажемо, як може бути налаштована система шляхів, щоб відповідного міста не існувало. Позначимо через A, B, C, D трійки міст, в яких шляхи утворені за циклом, наприклад, $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_1$ (рис. 6). Таким чином досягається те, що з кожного міст виходить та заходить принаймні одна дорога. Далі організуємо ще такі дороги з вказуванням напряму: $A_1 \to B_1,\ C_1 \to B_1$ та $C_1 \to D_1$. Тоді до кожного міста груп A та C не можна дістатися з інших групи, до кожного міста групи B не можна дістатися з групи D та навпаки. Так само звідси випливає і що з кожного міста кожної групи неможливо дістатися й до кожного іншого.

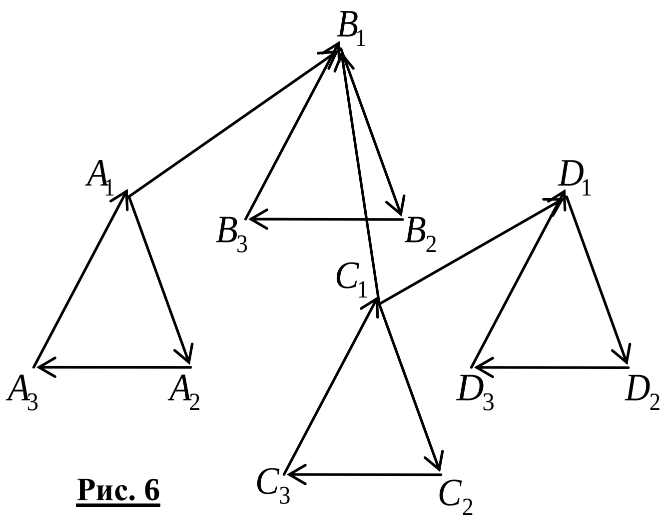


Рис. 6

3. Знайдіть усі трійки натуральних чисел $(m,\ n,\ k)$, що задовольняють рівності:

$$(m!+m)(n!+n) = (k!+k).$$

Тут через $k!$ *для натурального числа* k *позначений добуток* $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: $n = m = 1,\ k = 2$.

Розв'язання. Очевидно з умови, що $k > m$ та $k > n$. Перепишемо задане рівняння таким чином:

$$mn((m-1)!+1)((n-1)!+1) = k((k-1)!+1).$$

Оскільки $(k-1)!$ ділиться на m та n, то $(k-1)!+1$ не ділиться на жодний дільник цих чисел. Тому $k \,\vdots\, mn$. Нехай $n \ge m$. Якщо $m \ge 2$, то

$$4(n!)^2 \ge 4m!\cdot n! = (2m!)(2n!) \ge (m!+m)(n!+n) = k!+k > (mn)! \ge (2n)! \Rightarrow$$
$$4n!\cdot n! > (2n)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n! \Rightarrow 4n! > (2n)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot(n+1) \Rightarrow$$
$$4n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 > (2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdot\ldots\cdot(n+2)\cdot(n+1) /$$
$$4 > \frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{1}$$ – суперечність при $n \ge 2$.

Покажемо, що при $n \ge 2$ це є суперечністю. Кожний множник окрім першого та останнього у правій частині більше. А тепер покажемо, що й добуток першого та останнього множників так само більше у правій частині: $4n\cdot 1 > (2n)\cdot(n+1) > 6n$.

Таким чином лишається єдиний можливий варіант $m = 1$, звідси

$$2\cdot n!+2n = k!+k \ge (n+1)!+(n+1) > (n+1)!+n \Rightarrow n > n!\cdot(n-1) \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m = 1.$$

Далі просто знаходимо, що $k = 2$.

4. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. На промені BC за точку C взято точку T так, що $BC = CT$. Нехай M – середина відрізку AT. Знайдіть величину $\angle BMC$.

(Тригуб Антон)

Відповідь: $\angle BMC = 45^\circ$.

Розв'язання. Зрозуміло, що CM є середньою лінією ΔTAB (рис. 7). Відкладемо відрізок MK на промені CM за точку M такий, що $CM = MK$. Тоді $AB = CK$ та $AB \parallel CK$. Тоді $ABCK$ – паралелограм. Відкладемо на промені CA за точку A таку точку S, що $\angle SKC = 15^\circ$. Тоді ΔSKC є рівнобедреним, а тому $\angle SMC = 90^\circ$. Нехай нарешті точка $L = SK \cap AB$. Тоді чотирикутник $LACK$ є рівнобічною трапецією, звідки $AK = LC$. З

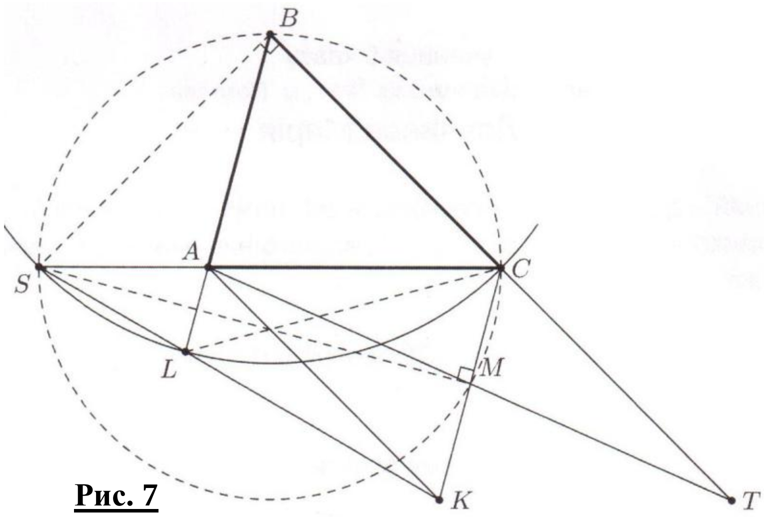


Рис. 7

іншого боку, $BC = AK \Rightarrow BC = CL$. Тоді ΔBLC є рівнобедреним з кутом $\angle BLC = 60^\circ$. Тоді цей трикутник є правильним, звідки $BC = BL$. Доведемо, що $BS = BC$, тобто, що точки S, L, C лежать на колі з центром B. Але це випливає з того, що $\angle LSC = 30^\circ = \frac{1}{2}\angle LBC$. Справді, якщо X – точка на колі з центром B і радіусом BC, то точки S, L, C лежать на одному колі з точкою X. А точки X, L, C лежать на колі з центром B. Отже, ми довели, що $BS = BC$. Тоді $\angle SBC = 180^\circ - 2\angle BCA = 90^\circ$. Звідси точки S, B, C, M лежать на одному колі, а також $\angle BMC = \angle BSC = 45^\circ$, що й треба було довести.

3.1. Знайдіть найменше натуральне число вигляду $\overline{30x070y03}$, що ділиться на 37, де x, y – цифри.

Відповідь: 300070703.
Розв'язання. Запишемо шукане число таким чином:

$$\overline{30x070y03} = 300070003 + 10^6 x + 10^2 y = 37 \cdot (8110000 + 27027x + 3y) + (3 + x - 11y).$$

Таким чином $3 + x - 11y$ має бути кратним 37 при найменшому x. Оскільки x, y – цифри, то зрозуміло, що цей вираз може приймати значення $0, -37, -74$. Для кожного з них маємо такі розв'язання.

$3 + x - 11y = 0 \Rightarrow y = 1$ та $x = 8$.

$3 + x - 11y = -37 \Rightarrow y = 4$ та $x = 4$.

$3 + x - 11y = -74 \Rightarrow y = 7$ та $x = 0$.

Звідси найменшим з них є число 300070703.

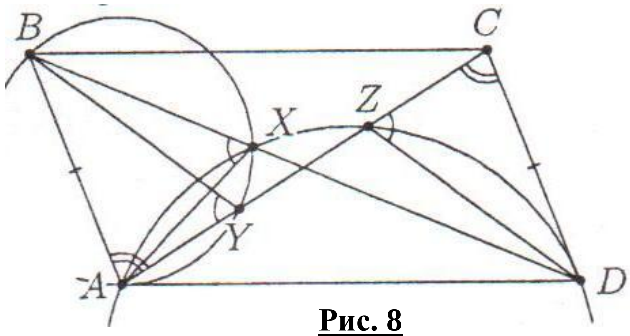


Рис. 8

4.1. Через вершини A, B паралелограма $ABCD$ проведене коло, що вдруге перетинає діагоналі BD та AC у точках X та Y відповідно. Описане коло ΔADX перетинає діагональ AC вдруге в точці Z. Доведіть, що $AY = CZ$.

Розв'язання. З того, що точки A, X, Z, D лежать на одному колі, а A, B, X, Y – на іншому (рис. 8), то

$$\angle AYB = \angle AXB = 180° - \angle AXD = 180° - \angle AZD = \angle DZC.$$

Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то $\angle BAY = \angle DCZ$, звідки $\Delta ABY = \Delta CDZ$, звідки й маємо шукану рівність сторін.

9 клас

1. Знайдіть усі дійсні значення k, для яких усі корені рівняння $k(2-k)x^2 - (k+4)x + 6 = 0$ є натуральними числами.

(Фольклор)

Відповідь: $k = 2, \frac{1}{2}, 1$.
Розв'язання. Розглянемо спочатку випадки, коли це рівняння не є квадратним.
При $k = 0$ рівняння набуває вигляду $-4x + 6 = 0$ – має не натуральний корінь.
При $k = 2$ рівняння набуває вигляду $-6x + 6 = 0$ – має єдиний корінь $x = 1$ – умову задовольняє.
Нехай тепер $k(2-k) \neq 0$. Знайдемо дискримінант квадратного рівняння:

$$D = (k^2 + 8k + 16) - 24(2k - k^2) = 25k^2 - 40k + 16 = (5k-4)^2 \Rightarrow$$

$$x_{1,\,2} = \frac{(k+4) \pm (5k-4)}{2k(2-k)} = \frac{6k}{2k(2-k)} = \frac{3}{2-k}; \ \frac{-4k+8}{2k(2-k)} = \frac{2}{k}.$$

Залишається перебрати випадки, коли ці числа натуральні. Нехай $\frac{2}{k} = m$ – натуральне, тоді $k = \frac{2}{m}$ $\Rightarrow \frac{3}{2-k} = \frac{3m}{2(m-1)}$ – натуральне число. Оскільки m – натуральне, то числа m та $m-1$ взаємно прості. Тому остання умова можлива, якщо $m - 1 = 1 \Rightarrow k = 1$ або $m - 1 = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

2. Задача 2 для 8 класу.

3. Рівносторонній трикутник ABC вписано в коло w. Точки F та E на сторонах AB та AC відповідно обираються таким чином, щоб виконувалась умова $\angle ABE + \angle ACF = 60°$. Описане коло ΔAFE вдруге перетинає коло w в точці D. Промені DE та DF перетинають пряму BC у точках X та Y відповідно. Доведіть, що центр вписаного кола ΔDXY не залежить від вибору точок F і E.

(Хілько Данило)

Розв'язання. Позначимо точку перетину відрізків CF та BE – точку P. Маємо $\angle CBE = 60° - \angle ABE = \angle FCA$. Аналогічно, $\angle FCB = \angle ABE$ (рис. 9). Тоді

$$\angle FKE = \angle CKB = 180° - \angle CBE - \angle FCB = 120°.$$

Отже, чотирикутник $AFPE$ вписаний в коло γ, на якому лежить точка D. Проведемо бісектрису кута $\angle CAB$ до перетину з γ у деякій точці O. Зрозуміло, що O – це середина меншої дуги EF кола γ. Доведемо, що O – центр правильного ΔABC. Маємо, що $\Delta AFC = \Delta BEC$ рівні за стороною та двома прилеглими кутами. Звідси $FC = BE$. Зрозуміло, що $\angle OAFC = \angle BEO$ та $OF = OE$. Звідси $\Delta OFC = \Delta BEO$ за двома сторонами та кутом між ними, а тому $\angle PBO = \angle PCO$, тобто чотирикутник $BPOC$ вписаний, звідки $\angle BOC = 120°$. Отже, точка O лежить на бісектрисі кута $\angle CAB$ в одній півплощині з точкою P відносно прямої BC та $\angle BOC = 120°$. Зрозуміло, що тоді O – центр трикутника ΔABC.

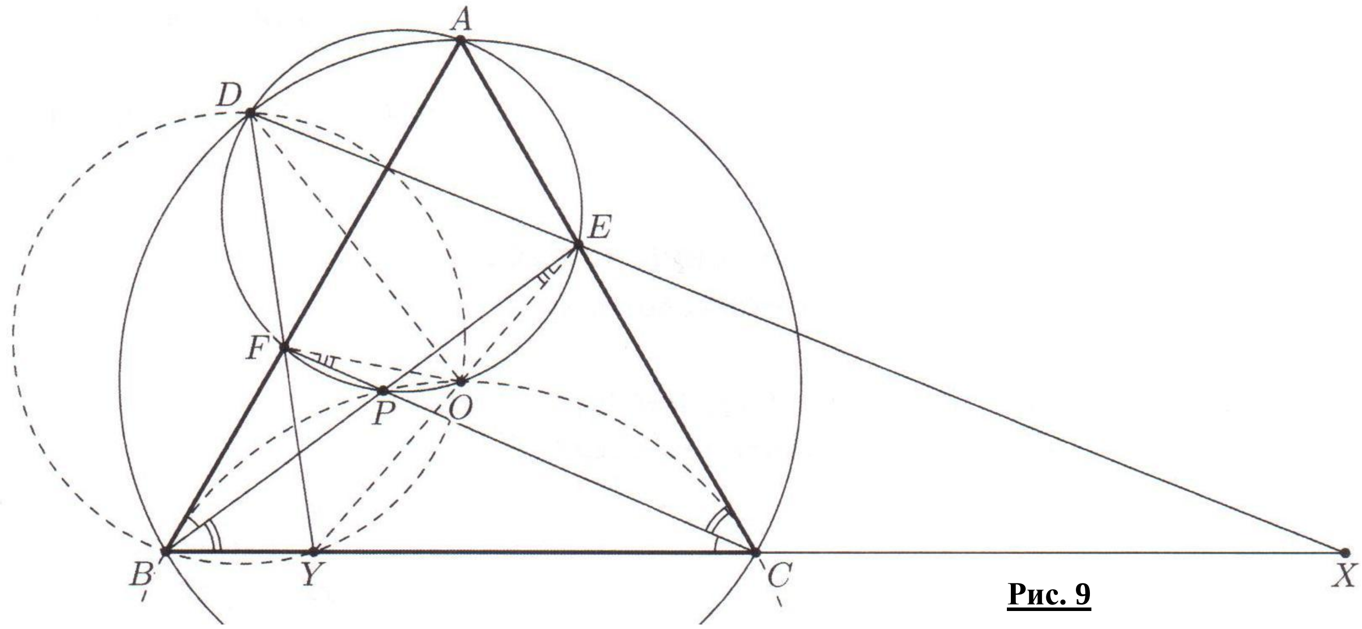


Рис. 9

Доведемо тепер, що O є інцентром ΔDXY. Зрозуміло, що тоді цей центр не залежить від точок E та F. Очевидно, $\angle YDO = \angle XDO = 30°$, тобто DO – бісектриса $\angle XDY$. Достатньо показати, що YO – бісектриса $\angle DYX$. Маємо, що $\angle YDO = \angle OBY = 30°$, звідси чотирикутник $DOYB$ вписаний і $DO = OB$, як радіуси. Отже, $\angle OYX = \angle ODB = \angle DBO = \angle DYO$, тобто YO – справді бісектриса $\angle DYX$.

4. Знайдіть усі такі натуральні n, та прості числа $p,\ q$, що задовольняють рівності:

$$n^3 = p^3 + 2p^2q + 2pq^2 + q^3.$$

(Рубльов Богдан)

***Відповідь*:** таких чисел не існує.

Розв'язання. Перепишемо задану рівність таким чином:

$$n^3 = p^3 + 2p^2q + 2pq^2 + q^3 = (p+q)(p^2 + pq + q^2).$$

Зрозуміло, що $p \neq q$, бо інакше справджувалася би умова $n^3 = 6p^3$, що неможлива для натуральних чисел.

Припустимо, що існує $s > 1$, що є дільником кожного з множників $p+q$ та $(p^2 + pq + q^2)$. Але тоді $s \mid (p+p)^2 - (p^2 + pq + q^2) = pq$. Якщо, наприклад, $s \mid p$, то з умови $s \mid (p+q)$ випливає, що й $s \mid q \Rightarrow$ з простоти p, q випливає, що $p = q$, що призводить до суперечності.

Якщо ж $((p+q), (p^2 + pq + q^2)) = 1$, то звідси випливає, що кожний множник має бути кубом натурального числа. Нехай тоді $p + q = x^3$ та $p^2 + pq + q^2 = y^3$ та $n = xy$. Тоді

$$pq = (p+q)^2 - (p^2 + pq + q^2) = x^6 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2 y + y^2).$$

Оскільки $x^4 + x^2 y + y^2 > x^3 = p + q$, то звідси випливає, що $x^4 + x^2 y + y^2 = pq$ та $x^2 - y = 1$ $\Rightarrow$

$$pq = x^4 + x^2(x^2 - 1) + (x^2 - 1)^2 = 3x^4 - 3x^2 + 1 = 3x^2(x-1)(x+1) + 1 \equiv 1 \pmod 9,$$

оскільки $x(x-1)(x+1) \vdots 3$.

Залишається перебрати варіанти за модулем 9, куб цілого числа може за модулем 9 дорівнювати $0, \pm 1$. Подивимось на наші випадки можливих остач за модулем 9 простих чисел p, q, щоб виконувалась одержана умова $pq \equiv 1 \pmod 9$.

$p \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = p + q \equiv 2 \pmod 9$ – суперечність.

$p \equiv 2 \pmod 9 \Rightarrow q \equiv 5 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = p + q \equiv 7 \pmod 9$ – суперечність.

$p \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow q \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = p + q \equiv 2 \pmod 9$ – суперечність.

$p \equiv 8 \pmod 9 \Rightarrow q \equiv 8 \pmod 9 \Rightarrow x^3 = p + q \equiv 7 \pmod 9$ – суперечність.

Усі варіанти перебрані, що завершує доведення того, що таких чисел не існує.

3.1. Коло k радіуса r вписане в ΔABC, дотичні до кола k, що паралельні відповідно сторонам AB, BC та CA перетинають інші сторони ΔABC у точках M, N; P, Q та L, T ($P, T \in AB$, $L, N \in BC$ та $M, Q \in AC$). Позначимо через r_1, r_2, r_3 – радіуси вписаних кіл у трикутники MNC, PQA та LTB. Доведіть, що $r_1 + r_2 + r_3 = r$.

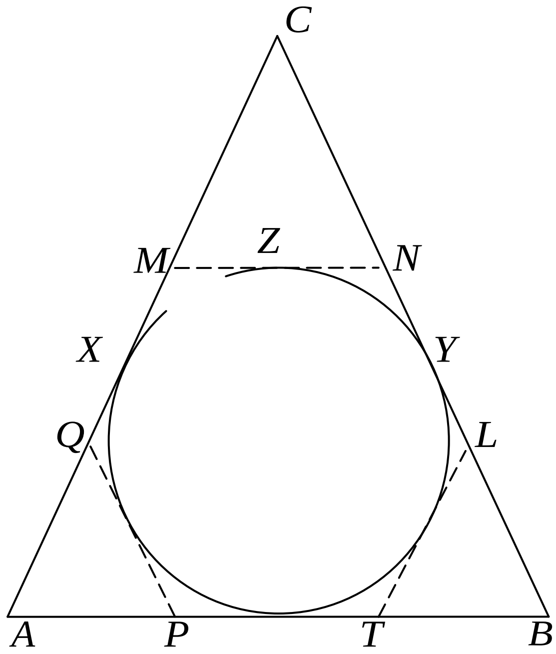


Рис. 10

Розв'язання. Оскільки усі трикутники подібні, то:

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p}.$$

Неважко зрозуміти, що (рис. 10)

$$2p_1 = CM + CN + MN = CM + CN + MZ + ZN =$$
$$= CM + MX + CN + NY =$$
$$= 2p - (AX + AB + BY) = 2p - 2c.$$

Таким чином

$$\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{p} = \frac{p - a + p - b + p - c}{p} = \frac{3p - 2p}{p} = 1.$$

4.1. Знайдіть усі такі натуральні числа n, що мають принаймні 4 дільники та саме число n дорівнює сумі квадратів чотирьох найменших дільників.

Відповідь: $n = 130$.

Розв'язання. Позначимо ці найменші дільники через $a < b < c < d$, тоді справджується така рівність: $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Звідси зрозуміло, що n – парне. Тоді $a = 1, b = 2$. Якщо $4 \mid n$, то з c, d – одне дорівнює 4. Друге має біти непарним, бо інакше вийде n непарним, що неможливо. Тому в сумі $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ два парних числа і два непарних дають за модулем 4 остачу 2, а це суперечить тому, що ліва частина кратна 4. Таким чином 4 не є дільником n.
Дільник c не може бути парним, о інакше дільник $\frac{1}{2}c < c$. Таким чином c – непарне, а d – парне. Звідси зрозуміло, що $d = 2c$. Тоді $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5 + 5c^2$. Але варіант $c = 3, d = 5$ неможливий, тому $c = 5 \Rightarrow d = 10$ та $n = 5 + 5c^2 = 130$.

10 клас

1. Відомо, що обидва дійсні корені квадратного тричлену $g(x) = x^2 - 3x + a$ є коренями многочлена $f(x) = x^3 - x^2 + cx + 4$, аналогічно обидва дійсні корені квадратного тричлену $h(x) = x^2 + x + b$ також є коренями многочлена $f(x)$. Чому може дорівнювати значення $f(1)$?

(Фольклор)

Відповідь: 0.

Розв'язання. Оскільки $f(x)$ – кубічний многочлен, то він має не більше трьох коренів, тому квадратні тричлени $g(x)$ та $h(x)$ мають спільний корінь. Позначимо його через t, тоді

$$g(t) = t^2 - 3t + a = 0 \text{ та } h(t) = t^2 + t + b = 0 \Rightarrow 4t + b - a = 0 \Rightarrow t = \tfrac{1}{4}(a - b).$$

Тоді має справджуватися рівність: $f(x)(x - t) = g(x)h(x)$.

$$(x^3 - x^2 + cx + 4)(x - t) = (x^2 - 3x + a)(x^2 + x + 2).$$

Якщо зібрати коефіцієнти при x^3 матимемо, що має справджуватися рівність:

$$-1 - t = -3 + 1 \Rightarrow t = 1, \text{ звідки } f(1) = f(t) = 0.$$

Неважко знайти і явний вигляд многочленів f, g та h, що задовольняють наведені умови: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $g(x) = x^2 - 3x + 2$ та $h(x) = x^2 + x - 2$.

2. Задана нескінченна послідовність, що складається з букв a та b. В цій послідовності можна зробити таку заміну літер $abb \to baa$. Відомо, що в якому б порядку не робити такі заміни, їх вдасться зробити лише скінченну кількість разів. Доведіть, що тоді в цій послідовності заміни $aabb \to bbaa$ так само можна буде зробити лише скінченну кількість разів.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. З того, що змін може бути скінченна кількість, то існує номер N, починаючи з якого заміни не можливі. Це означає, що там немає жодної пари букв b, що стоять поруч. Бо інакше, зліва від них стоїть буква a і можливе перетворення. Але тоді і другу підстановку зробити не можна, бо, починаючи з номера N, там немає пари букв b. А усі інші пари букв b при другій підстановці за кожний хід зсовуються наліво. А таких ходів можна зробити лише скінченну кількість.

3. Позначимо у трикутнику ABC через T_A, T_B, T_C – точки дотику зовнівписаних кіл ΔABC до сторін BC, AC та AB відповідно. Нехай O – центр описаного кола ΔABC, а I – центр вписаного кола. Відомо, що $OI \parallel AC$. Доведіть, що $\angle T_A T_B T_C = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$.

(Тригуб Антон)

Розв'язання. Нехай I_A, I_B, I_C – центри зовні вписаних кіл, I_1 – точка, симетрична точці I відносно точки O (рис. 11). Розглянемо $\Delta I_A I_B I_C$. Тоді I є ортоцентром цього трикутника, оскільки бісектриси зовнішнього і внутрішнього кута перпендикулярні. Зрозуміло також, що O є центром кола Ейлера цього трикутника. Тоді точка I_1 є центром описаного кола $\Delta I_A I_B I_C$. В такому разі $\angle I_1 I_B C = \angle I_C I_B B$, звідки $I_1 I_B \perp AC$, оскільки $\angle BI_C A = 90° - \frac{1}{2}\angle BCA = \angle ACI_B$. Тобто прямі $I_B T_B$, $I_A T_A$ та $I_C T_C$ перетинаються в точці I_1.

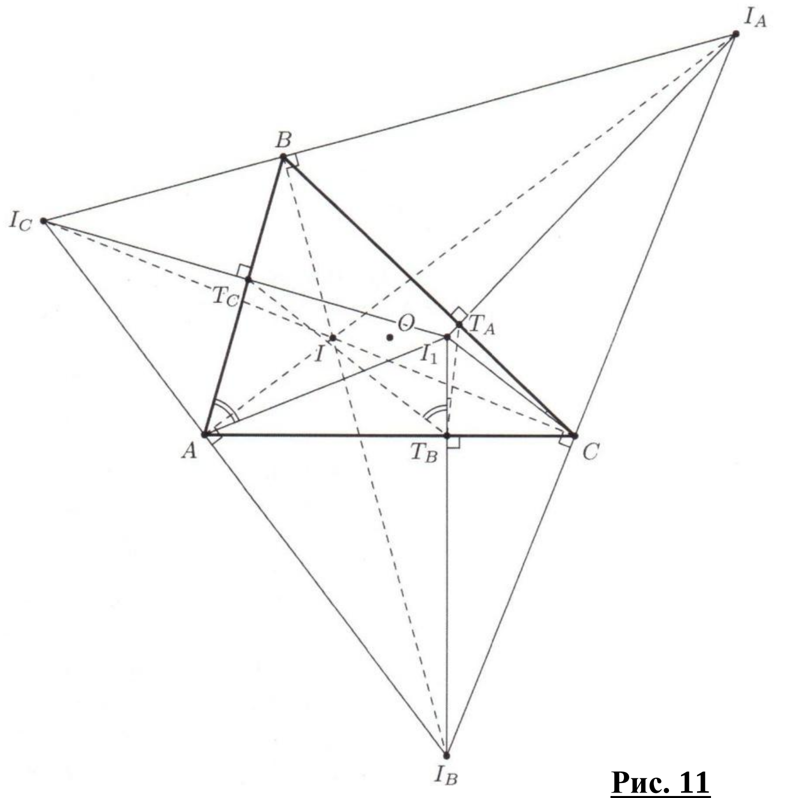


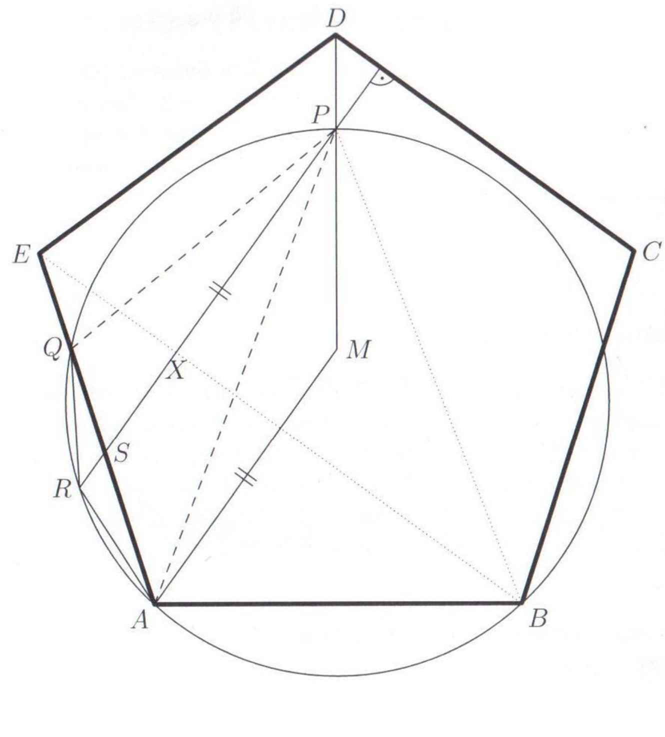
Рис. 11

Зрозуміло, що AII_1C – трапеція. Точки I, I_1 симетричні відносно серединного перпендикуляру AC, оскільки $II_1 \parallel AC$. Тоді AII_1C – рівнобічна трапеція і $\angle AI_1C = AIC = 90° + \frac{1}{2}\angle ABC$. Помітимо також, що чотирикутники $I_1T_CAT_B$ і $I_1T_ACT_B$ – вписані. Тоді:

$$\angle T_A T_B T_C = \angle T_C T_B I_1 + \angle I_1 T_B T_A = \angle I_1 AB + \angle I_1 CB = \angle AI_1 AC - \angle ABC = 90° - \tfrac{1}{2}\angle ABC.$$

4. Задача 4 для 9 класу.

3.1. Нехай $ABCDE$ правильний пятикутник з центром M. Точка $P \neq M$ обрана на відрізку MD. Описане коло ΔABP перетинає вдруге пряму AE у точці Q, а пряму, що перпендикулярна CD та проходить через P, вдруге у точці R. Доведіть, що $AR = QR$.



Розв'язання. Позначимо через $S = RP \bigcap AE$ (рис. 12). Неважко порахувати кути: $\angle BAE = 108°$, $\angle ABE = \angle AEB = 36°$. Оскільки $BE \parallel CD$, $RP \perp BE$, то з чотирикутника $ABXS$ маємо:

$\angle ASX = 360° - 90° - 144° = 126°$.

Рис. 12

Далі маємо, що $\angle QSP = \angle ASR = 54°$. З цього матимемо, що

$$\angle SPA = 54° - \angle SAP = \angle PAB - 54° = 126° - \angle AQP = 126° - \angle SQP = \angle SPQ.$$

Звідси $ABPQ$ – вписаний, і надалі легко бачити, що SP – бісектриса $\angle APQ$, з чого й випливає рівність відрізків $AR = QR$.

4.1. Послідовність натуральних чисел a_1, a_2, a_3,… визначається таким чином: $a_{n+1} = a_n^2 + 2018$, де a_1 – деяке натуральне число. Доведіть, що в цій послідовності не більше ніж одне число може бути кубом натурального числа.

Розв'язання. Припустимо, що там є не менше одного куба натурального числа. Нехай a_k – найменше із можливих кубів. Тоді за модулем 9 воно дорівнює $0, \pm 1$, тому $a_k^2 \equiv 0, 1 \pmod 9$. Далі усі числа виписуємо саме за модулем 9. Розглянемо ці випадки.

$a_k^2 \equiv 0$ та $a_{k+1} \equiv 2 \Rightarrow a_{k+1}^2 \equiv 4$ та $a_{k+2} \equiv 6 \Rightarrow a_{k+2}^2 \equiv 0$ та $a_{k+3} \equiv 2$ і кубів більше не може бути.

$a_k^2 \equiv 1$ та $a_{k+1} \equiv 3 \Rightarrow a_{k+1}^2 \equiv 0$ та $a_{k+2} \equiv 2$ і кубів більше не може бути.

11 клас

1. Знайдіть додатні числа $a_1, a_2, ..., a_{2019}$, що задовольняють умову:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019} = a_1 a_2 \ldots a_{2019} = \sqrt[2018]{2019^{2019}}.$$

(Мороз Микола)

Відповідь: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2019} = \sqrt[2018]{2019}$.

Розв'язання. З нерівності між середніми маємо, що

$\frac{1}{2019}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019}) \ge \sqrt[2019]{a_1 a_2 \ldots a_{2019}}$ або $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019})^{2019} \ge 2019^{2019} a_1 a_2 \ldots a_{2019}$.

З умови задачі випливає, що

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2019})^{2019} = (\sqrt[2018]{2019^{2019}})^{2019} = (2019 \cdot \sqrt[2018]{2019})^{2019} =$$
$$= 2019^{2019} \cdot \sqrt[2018]{2019^{2019}} = 2019^{2019} a_1 a_2 \ldots a_{2019},$$

Тобто в нерівності між середніми справджується рівність, а це можливо лише за умови, що

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2019} = \frac{1}{2019} \cdot 2019 \cdot \sqrt[2018]{2019} = \sqrt[2018]{2019}.$$

2. Задача 2 для 10 класу.

3. Пряма l перпендикулярна стороні AC гострокутного трикутника ABC і перетинає цю сторону в точці K, а описане коло ΔABC у точках P та T (точка P по той бік від прямої AC, що й вершина B). Позначимо через P_1 та T_1 – проекції точок P та T на пряму AB, при цьому вершини A, B належать на відрізку P_1T_1. Доведіть, що центр описаного кола ΔP_1KT_1 лежіть на прямій, що містить середню лінію ΔABC, яка паралельна стороні AC.

(Тригуб Антон)

Відповідь: таких чисел не існує.

Розв'язання. Позначимо через B_1 – проекцію вершини B на пряму l (рис. 13), тоді чотирикутники BB_1PP_1 та $TKAT_1$ вписані з діаметрами BP та AT. Тоді маємо такі рівності кутів:

$$\angle P_1B_1K = \pi - \angle P_1B_1P = \pi - \angle P_1BP = \angle ABP = \pi - \angle ATP = \pi - \angle ATK =$$
$$= \pi - \angle AT_1K = \pi - \angle P_1T_1K,$$

Звідси випливає, що чотирикутник $P_1B_1KT_1$ – вписаний, тому центр кола, що описаний навколо ΔP_1KT_1, лежить на серединному перпендикулярі до відрізку B_1K. Але зрозуміла, що саме на цьому перпендикулярі і лежить середня лінія ΔABC, що паралельна стороні AC, що й треба було довести.

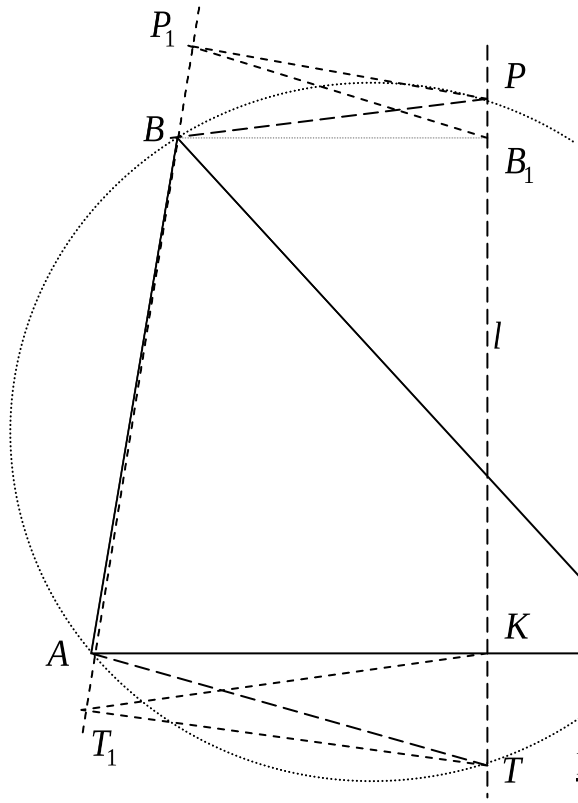


Рис. 13

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m,\ n)$, що задовольняють рівнянню

$$m!+n! = m^n + 1.$$

Тут через $k!$ *для натурального числа* k *позначений добуток* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$

(Чорний Максим)

Відповідь: $(1;\ 1),\ (2;\ 1),\ (5;\ 3)$.

Розв'язання. Перебираючи тривіальні випадки $m=1,\ n=1$ та $n=2$, знаходимо перші два з наведених розв'язків. Надалі вважатимемо, що $m \geq 2$ та $n \geq 3$.

Крок 1. Доведемо, що $m > n$.

Якщо припустити, що $n \geq m$, то маємо, що числа $m!,\ n!$ та m^n кратні m, а отже, йому кратне і число $m!+n!-m^n = 1$ – суперечність. Зокрема з цього випливає, що $m \geq 4$.

Крок 2. Тепер покажемо, що $n > \frac{1}{2}m$.

З відомої нерівності $m! > m^{\frac{1}{2}m}$, що випливає з нерівності між середніми, маємо що $m^n + 1 = m!+n! > m^{\frac{1}{2}m} + 1$.

Крок 3. Покажемо, що m просте.

Якщо це не так, то m має простий дільник p, що не перевищує $\frac{1}{2}m$ і, відповідно, n. У такому випадку p є дільником числа $m!+n!-m^n = 1$ – суперечність.

Крок 4. Доведемо, що $m-1$ – або просте число, або квадрат простого. Припустимо, що це не відповідає дійсності. У такому випадку ми можемо розкласти $m-1$ як добуток двох дільників $a \neq b$, менших за $\frac{1}{2}m$ і тому менших за n. Звідси маємо, що $m!$ та $n!$ діляться на $n-1=ab$, оскільки $n!$ містить у своєму розкладі обидва множники), а $m^n + 1 = ((m-1)+1)^n + 1$ дає при діленні $m-1$ на остачу 2. Отже, $m-1$ є дільником 2, але це неможливо, оскільки за припущенням ми завжди маємо $m \geq 4$.

З результатів *Кроків 3 і 4* та з міркувань парності випливає, що єдиним можливим випадком є $m=5$. Справді, оскільки $m\geq 4$ – просте, то воно непарне, тому $m-1$ – парне і може бути кваратом простого числа, якщо то число є 2. З результатів *Кроків 1 і 2* маємо, що розв'язками можуть бути лише такі пари $(5;\ 3)$ та $(5;\ 4)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що тільки перша з них задовольняє початкове рівняння.

3.1. Відомо, що у трикутнику ABC найменшою стороною є BC. Нехай X, Y, K та L – точки на сторонах AB, AC та на променях CB, BC відповідно такі, що $BX=BK=BC=CY=CL$. Пряма KX перетинає пряму LY у точці M. Доведіть, що точка перетину медіан ΔKLM співпадає з центром вписаного кола ΔABC.

Розв'язання. Оскільки $\angle ABC$ зовнішній кут рівнобедреного ΔXKB з вершиною B (рис. 14), пряма KX паралельна бісектрисі кута $\angle ABC$.

Відношення $LB:LK=2:3$ означає, що бісектриса $\angle ABC$ проходить через центроїд ΔKLM. Якщо ми позначимо LL_1 його медіану та L_2 її перетин з бісектрисою $\angle ABC$, ми отримаємо з подібності $\Delta LBL_2 \sim \Delta LKL_1$ (за двома кутами) рівність

$$\frac{LL_2}{LL_1}=\frac{LB}{LK}=\frac{2}{3}.$$

Отже, точка L_2 ділить медіану LL_1 у такому самому співвідношенні, як і центроїд, а значить вона і є центроїдом ΔKLM.

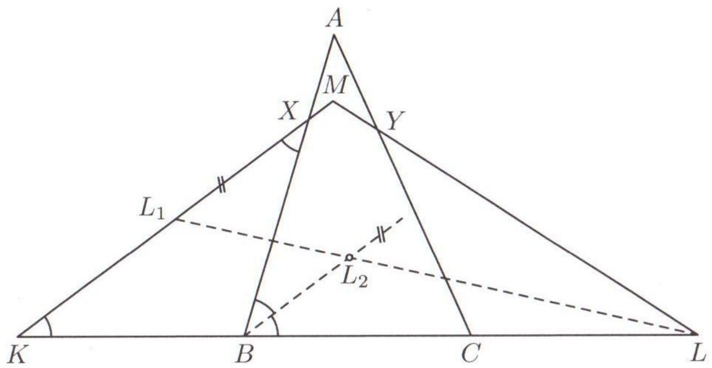


Рис. 14

Аналогічно, бісектриса $\angle BCA$ проходить через центроїд трикутника ΔKLM. А отже, факт, що перетин бісектрис є інцентром трикутника, доводить твердження задачі.

4.1. Для яких натуральних $n\geq 2$ існують n непарних не обов'язково різних чисел a_1, a_2, …, a_n, для яких вираз $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$ є квадратом натурального числа?

Відповідь: для усіх чисел n, що мають вигляд $8k+r$, де k – натуральне та $r\in\{0,1,4\}$.

Розв'язання. Добре відомо, що квадрат цілого числа має остачі 0, 1 або 4 при діленні на 8. Таким чином лише для чисел n, що дорівнюють $8k+r$, де $r\in\{0,1,4\}$, відповідні числа можуть існувати. Покажемо, як їх можна підібрати.

$n=4t$, $a_1=\ldots=a_{n-1}=1,\ a_n=(2t-1):\ a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(4t-1)\cdot 1^2+(2t-1)^2=(2t)^2$.

$n=8t+1,\ a_1=\ldots=a_{n-1}=1,\ a_n=(2t-1):\ a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(8t)\cdot 1^2+(2t-1)^2=(2t+1)^2$.