Математичний індивідуальний занзібар для учнів 4–6 класів

"Людині притаманно помилятися,
а ще більше – звинувачувати в тому інших."
Закон Мерфі про життя

Розв'язання задач

4 клас

1. Іван 8 років тому був утричі меншим ніж зараз. Скільки йому років зараз?

Відповідь: 12.
Розв'язання. Якщо Івану 8 років тому було x років, то зараз для його віку можна записати таку рівність: $8+x=3x$, звідки $x=4$ і його вік зараз $8+x=12$.

2. Скільки є трицифрових чисел, у яких перша цифра дорівнює сумі двох інших?

Відповідь: 54 числа.
Розв'язання. Якщо перша цифра 1, то таких чисел 2 – 101 та 110. Якщо перша цифра 2, то таких чисел 3 – 202, 211 та 220. І взагалі, як легко бачити – для першої цифри k таких чисел $k+1$. Таким чином усього таких чисел $2+3+\ldots+10=54$.

3. Знайдіть усі двоцифрові числа $\overline{ab}$ такі, що при додаванні до них числа 36 утворюється число $\overline{ba}$.

Відповідь: $15, 26, 37, 48, 59$.

Розв'язання. Запишемо рівність: $\overline{ab}+36=\overline{ba}$ або $10a+b+36=10b+a$. Далі маємо, що $9a+36=9b \Rightarrow a+4=b$. Таким чином маємо співвідношення між цифрами. Оскільки число двоцифрове, тому $a>0$. Оскільки $b\le 9$, то $a\in\{1, 2, \ldots, 5\}$ і відповідно маємо п'ять відповідей: $15, 26, 37, 48, 59$.

4. Квадрат з периметром 416 розрізаний на 8 однакових прямокутників, як це показане на рис. 1. Чому дорівнює периметр прямокутника?

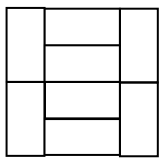
Рис. 1

Відповідь: 156.
Розв'язання. З рис. 1 бачимо, що можна позначити сторони прямокутника як x та $2x$. Тоді маємо таку рівність для периметру квадрата: $16x=416$, звідки $x=26$. Таким чином периметр одного прямокутника дорівнює $6x=156$.

5. В олімпіаді взяли участь 100 учасників, при цьому першу задачу розв'язали 90 учасників, другу – 80 та третю – 70. Скільки щонайменше учнів розв'язали усі три задачі?

Відповідь: 40.
Розв'язання. Припустимо, що учні кожну правильно розв'язану задачу здавали на окремому аркуші паперу. Тоді було здано усього $90+80+70=240$ аркушів. Тоді щонайменше $240-100\cdot 2=40$ здали по 3 аркуші.

6. Андрій та Іван мали по 64 монети. Кожного дня протягом 6 днів вони кидають монету і хто виграє, той отримує половину монет супротивника. По завершенні цієї гри, виявилося, що у Андрія 61 монета. А у Івана – 67. Скільки днів із цих 6 днів Андрій віддавав половину своїх монет Іванові?

Відповідь: 2 рази.

Розв'язання. Очевидно, що задачу треба розв'язувати з кінця, тобто розпочати з ситуації, коли в Андрія 61 монета, а в Івана – 67. В таких ситуаціях неважко зрозуміти, що щоб опинитися в цій ситуації, монети мав передавати той, в кого їх менше. Бо якщо припустити, що монети перед цим передавав Іван, то в нього лишилася половина його монет, а інша половина та ще власні монети мали бути у Андрія, тому в нього напевно було б більше 67 монет. А тепер неважко скласти табличку передавань у зворотному порядку (рис. 2).

Як легко бачити Андрій передавав Іванові монети рівно 2 рази з 6.

Дні	6	5	4	3	2	1	0
Андрій	61	122	116	104	80	32	64
Іван	67	6	12	24	48	96	64

Рис. 2

7. Буквам А, Б, В та Г відповідають певні цифри, різним буквам – різні цифри. Якій цифрі відповідає буква Г, якщо справджуються такі умови: $АБ+ВА=ГА$ та $АБ-ВА=А$?

Відповідь: 9.

Розв'язання. Цифри $А$, $Б$ такі, що $А+Б$ закінчується на $А$. Це означає, що $Б=0$, тоді з другої умови $А=5$. Оскільки різниця чисел – одноцифрове число, то перші цифри відрізняються рівно на 1. Таким чином $В=4$, тому $АБ=50$ та $ВА=45 \Rightarrow ГА=95 \Rightarrow Г=9$.

8. Відомо, що сторона кожного з дев'яти малих квадратів дорівнює 9. Чому дорівнює площа сірих частин, що потрапили всередину зображеного на рис. 3 ромба.

Відповідь: 162.

Розв'язання. Неважко обчислити, що сірі частини ромба в кутових квадратах складають половину площі малого квадрату. Таким чином сірі частини мають площу двох малих квадратів. Тому їхня площа – $2\cdot9\cdot9=162$.

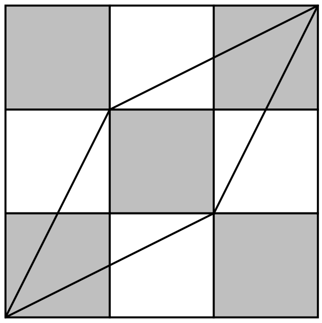

Рис. 3

9. У футбольній першості грали 14 команд в одне коло, тобто кожна команда грала з кожною іншою рівно 1 раз. За перемогу команда здобуває 3 очки, за нічию – 1 очко і за поразку очок не нараховується. Реал набрав 29 очок. Скільки разів Реал переміг, якщо відомо, що у нього два значення з трьох – кількість перемог, нічиїх та поразок – співпадають? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 9.

Розв'язання. Якщо співпадає кількість перемог та поразок, то нехай їх було по x. Тоді нічиїх було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $3x+(13-2x)=29 \Rightarrow x=16$ – суперечність.

Нехай тепер по x було перемог та нічиїх. Тоді поразок було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $4x=29 \Rightarrow x$ – не ціле, знову суперечність.

Нехай тепер по x було поразок та нічиїх. Тоді перемог було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $3(13-2x)+x=29 \Rightarrow x=2$, тому перемог було 9.

10. У Андрійка у мішку лежать 1 жовтий кубик, 2 – зелених, 3 – синіх, 4 –

червоних, 5 – білих, 6 – чорних та 7 фіолетових кубиків. Він дістає з мішка по одному кубику, не бачачи якого він кольору, та викладає їх на стіл. Яку найменшу кількість кубиків йому треба витягнути з мішка, щоб гарантовано серед витягнутих були 3 одного кольору?

Відповідь: 14.
Розв'язання. Він може витягнути кожного кольору не більше двох кубиків, тобто $2\cdot6+1=13$ кубиків. Тому серед 13 кубиків може не виявитися трьох однокольорових. Але при витяганні 14-го там обов'язково будуть 3 однакового кольору, що випливає з принципу Діріхле.

11. Чому дорівнює сума найменшого числа, що має суму цифр 30 та найменшого п’ятицифрового числа, що записане п'ятьма різними парними цифрами?

Відповідь: 24467.
Розв'язання. Перше число дорівнює 3999, дійсно, менше чотирьох цифр бути не може, оскільки $3\cdot9=27<30$. З цієї ж нерівності випливає, що перша цифра не менше 3. Звідси й знаходимо шукане число.
З усіма різними парними цифрами найменшим буде число 20468.
Таким чином шукане число $3999+20468=24467$.

12. Розріжте квадрат 4×4 (рис. 4) на 4 однакові частині, в кожній з яких буде різна кількість темних квадратиків 1×1.

Відповідь: Приклад зображений на рис. 5.

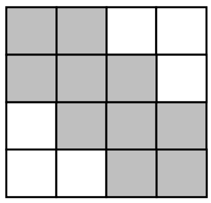
Рис. 4

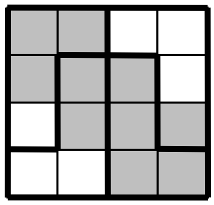
Рис. 5

5 клас

1. На першому курсі факультету кібернетики навчалося 200 студентів, яких примушували відвідувати лекції з БЖД. Вони були настільки цікавими, що студенти там постійно позіхали. При цьому відбувалася така закономірність, якщо у певний момент позіхав якийсь студент, то через 5 секунд починають позіхати 2 інших студента. На останній лекції Маруся через 1 секунду після початку лекції позіхнула. Через скільки секунд буде позіхати весь курс?

Відповідь: 41.
Розв'язання. Через $1+5=6$ секунд будуть позіхати вже $2\cdot1=2$ студенти, через $6+5=11$ секунд позіхатимуть $2\cdot2=4$ студенти. Далі маємо такі відповідності між часом та кількість тих, хто позіхає: $11+5=16\to4\cdot2=8$, $16+5=21\to8\cdot2=16$, …, $31+5=36\to64\cdot2=128$ і нарешті після $36+5=41$ секунди мають позіхати $128\cdot2=256$ студентів, тобто весь курс.

2. На участь в чемпіонаті України з хокею подали заявки декілька команд. Планувалося що кожна команда зіграє з кожною іншою рівно 1 раз, але після трьох турів (тур – це етап змагання, де команди розбиваються на пари і кожна пара грає одну гру) 2 команди знялися зі змагань. Скільки усього команд з самого початку планувалися для участі, якщо усього було зіграно рівно 24 зустрічі?

Відповідь: 8 команд.
Розв'язання. Нехай у чемпіонаті планувалося n команд. Тоді вони мали зіграти усього $\frac{1}{2}n(n-1)$ ігор. Але 2 команди зіграли замість $n-1$ гри тільки 3. Таким чином усього насправді було

зіграно $\frac{1}{2}((n-2)(n-1)+6)=\frac{1}{2}(n^2-3n)+4=24 \Rightarrow n^2-3n=40 \Rightarrow (n-8)(n+5)=0$. Звідси $n=8$.

3. Скільки існує таких трицифрових чисел $\overline{abc}$, що при додаванні до них числа 99 утворюється число $\overline{cba}$? Цифри a, b, c не обов'язкові різні.

Відповідь: 80.

Розв'язання. Запишемо рівність: $\overline{abc}+99=\overline{cba}$ або

$$100a+10b+c+99=100c+10b+a \Rightarrow 99a+99=99c \Rightarrow a+1=c.$$

Тепер порахуємо кількість таких чисел. Для цифри a є 8 варіантів: $1, 2, ..., 8$, цифра c при цьому вибирається однозначно і дорівнює $a+1$. Цифра b може бути будь-якою з 10 можливих. Таким чином усього 80 таких чисел.

4. Є рівносторонній трикутник ABC, точки D, E, F – середини його сторін AB, AC та BC відповідно. Скільки усього існує трикутників з вершинами в точках A, B, C, D, E та F (трикутники ABC та DEF також рахуються)?

Відповідь: 17.

Розв'язання. Спочатку не рахуємо трикутники ABC та DEF.

Усі інші трикутники мають 3 вершини, за принципом Діріхле рівно 2 з них, або співпадають з вершинами ΔABC, або з вершинами ΔDEF.

Зі стороною AB таких трикутників 2 – ABE та ABF, тому разом аналогічних трикутників – 6.

З стороною AD таких трикутників

Зі стороною DE таких трикутників 3 – BDE, ADE та CDE.

Таким чином аналогічних трикутників буде 9.

Таким чином усього трикутників стане $2+6+9=17$.

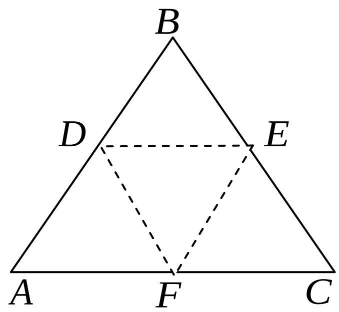

Рис. 6

5. Задача № 5 4 класу.

6. Задача № 6 4 класу.

7. Задача № 7 4 класу.

8. Задача № 8 4 класу.

9. У футбольній першості грали 14 команд в одне коло, тобто кожна команда грала з кожною іншою рівно 1 раз. За перемогу команда здобуває 3 очки, за нічию – 1 очко і за поразку очок не нараховується. Реал набрав 19 очок. Скільки разів Реал переміг, якщо відомо, що у нього два значення з трьох – кількість перемог, нічиїх та поразок – співпадають? Вкажіть усі можливі відповіді

Відповідь: 5 або 6 перемог.

Розв'язання. Якщо співпадає кількість перемог та поразок, то нехай їх було по x. Тоді нічиїх було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $3x+(13-2x)=19 \Rightarrow x=6$ – кількість перемог.

Нехай тепер по x було перемог та нічиїх. Тоді поразок було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $4x=19 \Rightarrow x$ – не ціле, суперечність.

Нехай тепер по x було поразок та нічиїх. Тоді перемог було $13-2x$ і для набраних очок маємо рівність: $3(13-2x)+x=19 \Rightarrow x=4$, тому перемог було 5.

10. Задача № 10 4 класу.

11. Задача № 11 4 класу.

12. Відомо, що остача при діленні числа 758 на число a дорівнює 29. Які значення може приймати число a?

Відповідь: $81, 243, 729$.

Розв'язання. Запишемо, що $758=qa+29 \Rightarrow 729=3^6=qa$. Таким чином можливі значення для a – це 1, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$ та $3^6=729$. Оскільки крім того $a>29$, залишаються випадки $3^4=81$, $3^5=243$ та $3^6=729$.

6 клас

1. Вінні та П'ятачок їли одночасно мед з одного горщика. Виявилося, що якби Вінні їхав зі швидкістю П'ятачка, то вони закінчили б їжу на 4 хвилини раніше, а якби П'ятачок їхав зі швидкістю Вінні, то упоралися б на 1 хвилину раніше. За який час вони з'їли весь мед насправді?

Відповідь: $t=\frac{8}{3}$.

Розв'язання. Нехай швидкість поїдання Вінні – це u, а П'ятачка – v. Тоді час поїдання меду насправді $t=1:(u+v)$. При цьому з умов задачі випливає, що $t+4=1:(2v)$ та $t-1=1:(2u)$. Тоді матимемо, що $u=\frac{1}{2(t-1)}$ та $v=\frac{1}{2(t+4)}$ $\Rightarrow$ $t(u+v)=1$ $\Rightarrow$ $t(\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+4)})=1$ $\Rightarrow$ $t(2t+8+2t-2)=4(t-1)(t+4) \Rightarrow 4t^2+6t=4t^2+12t-16 \Rightarrow t=\frac{8}{3}$.

2. Задача № 2 5 класу.

3. Є будинок, у якому рівно 99 квартир. Розділимо квартири на групи, в одну групу включаємо усі ті, чиї номери мають однакову суму цифр. Скільки таких квартир в найбільшій за кількістю групі?

Відповідь: 10 квартир.

Розв'язання. Розіб'ємо квартири на такі групи: $1-9$, $10-19$, $20-29$, …, $90-99$. Для зручності вважатимемо, що в першій групі ще є квартира з номером 0, яка очевидно не впливає на результат. В першій групі суми цифр по одній з множини $\{0; 1; \ldots; 9\}$, у другій – з множини $\{1; 2; \ldots; 10\}$, у третій – $\{2; 3; \ldots; 11\}$, …, у десятій – $\{9; 10; \ldots; 18\}$. Легко бачити, що тільки сума цифр 9 зустрічається в кожній групі, тому їх найбільша кількість.

4. Задача № 4 5 класу.

5. Знайдіть значення суми: $1+2+2+3+3+4+4+\ldots+98+98+99+99+100$.

Відповідь: 9999.

Розв'язання. Додамо до виписаної суми $1+100$. Тоді кожного доданку буде рівно по два. Згрупуємо їх таким чином:

$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(49+51)+(50+50)+(51+49)+\ldots+(100+1)=$
$=101\cdot 100=10100$.
Таким чином шукана сума $10100-101=9999$.

6. Задача № 6 4 класу.

7. Знайдіть два трицифрових числа, сума яких кратна 498, а їхня частка – ціле число, що кратне 5.

Відповідь: 166 та 830.
Розв'язання. З другої умови зрозуміло, що числа можна позначити як x та $5x$. Бо якщо частка чисел не дорівнює 5, то вона щонайменше дорівнює 10, а це вже означає, що обидва числа трицифровими не можуть бути. Таким чином $6x$ кратне 498. Розглянемо можливі варіанти.
$6x=498 \Rightarrow x=83$ – не трицифрове число.
$6x=2\cdot 498 \Rightarrow x=166$, $5x=830$ – шукана відповідь.
$6x=3\cdot 498 \Rightarrow x=249$, $5x=1245$ – не трицифрове число. Зрозуміло, що й усі інші варіанти даватимуть, що більше число буде лише збільшуватися, тобто трицифровим бути не може..

8. Задача № 8 4 класу.

9. Задача № 9 5 класу.

10. Детектив вважає, що хтось з 5 людей: А, Б, В, Г чи Д скоїв злочин. На допиті невинний завжди каже правду, а злочинець завжди бреше. Ось, що вони сказали на допиті.
А: Злочинець Б, Г або Д.
В. Винний А або Д.
Д. Якщо Б злочинець, то А невинний.
З'ясуйте, хто злочинець за таких відповідей, якщо це можливо.

Відповідь: A.
Розв'язання. Якщо А сказав правду, то злочинець Б, Г або Д. Але тоді В сказав правду, тому злочинець Д, але він сказав правду. Отже суперечність. Тому неправду мав сказати А, але це рівносильне, що він злочинець. Усі інші твердження істинні.
Якщо Б, Г або Д злочинець, то А сказав правду і знову отримаємо суперечність.
Якщо В злочинець, то А невинний і сказав правду – суперечність.

11. На дошці зліва направо у вказаному порядку записані усі натуральні числа 1, 2, …, 1000. Петрик декілька разів робить таку операцію – він витирає перше зліва записане число і далі усі через одне поки не дійде до кінця рядку чисел. Далі повертається до лівого краю і повторює цю операцію доти, доки не будуть витерті усі записані числа. Яке число він витре останнім?

Відповідь: 512.
Розв'язання. Неважко збагнути, що на першому кроці він витирає усі непарні числа, тобто залишаються лише числа, що кратні 2. На другому кроці не витираються усі числа, що не кратні 4. І так далі. Тобто залишиться останнім число, яке дорівнює найбільшій степені числа 2 серед записаних. Оскільки $2^9=512<1000<1024=2^{10}$, то останнім буде витерте число 512.

12. Задача № 12 5 класу.