ХІІ-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

«Мудрий той, хто знає те, що треба, а не багато дечого»
Есхіл

Усна командна олімпіада

Молодша ліга

1. Скільки існує пар натуральних чисел (a, b), де $a \le b$, для яких $(a, b) = 2$ та $[a, b] = 60$?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Позначимо ці числа $a = 2x$ та $b = 2y$, де числа x, y – взаємно прості. Але тоді $60 = [a, b] = 2xy$, тобто треба знайти усі пари взаємно простих чисел, чий добуток дорівнює 30. Значить вони не повинні мати однакових дільників і з числом 30. Тепер вже не важко виписати шукані значення $x \le y$: $x = 1$, $x = 7$, $x = 11$ та $x = 13$. Таким чином шуканих пар усього 4.

2. Є 2018 відрізків. Яка найбільша кількість рівносторонніх трикутників може утворитися з вершинами в точках перетину цих відрізків, у яких кожна сторона лежить на одному з даних відрізків?

Відповідь: $673 \cdot 673 \cdot 672 = 304368288$.
Розв'язання. Розглянемо деякий a відрізок. Далі виділимо в одну групу усі відрізки, які лежать на прямих що паралельні a, або на прямих що утворюють кут $60°$ з прямою a. Одразу зазначимо, що жоден інший відрізок не може з відрізком a та ще з якимось з відрізків утворювати рівносторонній трикутник. Так вчинимо з усіма іншими відрізками. Таким чином, усі відрізки розбиваються на k груп. Нехай в цих групах відповідно $n_1, \ldots, n_k$ відрізків.

Розглянемо першу групу в якій рівно n_1 відрізок. Вони розбиваються в свою чергу за трьома паралельними напрямами. Кожний рівносторонній трикутник має по одній стороні кожного напряму. Максимальна кількість таких трикутників в групі можу утворитися, якщо кожні два непаралельні відрізки перетинаються. Нехай кожного напряму є відрізків x_1, y_1, z_1. Якщо їх зробити достатньо довгими, щоб перетинались кожні два непаралельні, то кількість правильних трикутників складає $x_1 y_1 z_1$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $x_1 \ge y_1 \ge z_1$. Якщо $x_1 - z_1 \ge 2$, то розглянемо групу в якій $x_1 - 1, y_1, z_1 + 1$ відрізків. Тоді загальна кількість правильних трикутників

$$(x_1 - 1) y_1 (z_1 + 1) = x_1 y_1 z_1 - y_1 z_1 + x_1 y_1 - y_1 = x_1 y_1 z_1 + y_1 (x_1 - z_1 - 1) > x_1 y_1 z_1$$

збільшиться. Таким чином кількість трикутників кожного напряму не має відрізнятися більше ніж на 1.
Аналогічно, якщо в нас в двох групах x_1, y_1, z_1 відрізків, а в іншій – x_2, y_2, z_2. То загалом маємо, що буде $x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2$ правильних трикутників. А якби ми зробили одну групу з кількістю відрізків в групах $x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2$, то там правильних трикутників стане

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)(z_1 + z_2) > x_1 y_1 z_1.$$

Таким чином максимальна кількість трикутників можлива, коли в нас усі відрізки входять в одну групу, тобто лежать або на паралельних прямих, або на прямих, що перетинаються під кутом $60°$. При цьому в кожній групі кількість відрізків різного напряму не відрізнялися більше ніж на 1.

Таким чином, оскільки $2018 = 672 \cdot 2 + 2$, то ці три групи мають мати по 673, 673 та 672 відрізки. Тоді загальна кількість правильних трикутників $673 \cdot 673 \cdot 672 = 304368288$.

3. Доведіть, що для дійсних чисел a, b, c, що задовольняють умову $1 \geq a \geq b \geq c$, справджується нерівність: $a + bc \geq b + ac \geq c + ab$. За яких умов обидві нерівності стають рівностями?

Відповідь: (t, t, t), $t \leq 1$ та $(1, 1, t)$, $t \leq 1$.

Розв'язання. Нерівність $a + bc \geq b + ac$ рівносильна такій $(a - b)(1 - c) \geq 0$, що очевидно. Аналогічно друга нерівність зводиться до $(b - c)(1 - a) \geq 0$.

Рівності можливі, якщо

1) $a - b = b - c = 0 \Rightarrow a = b = c \leq 1$.
2) $a - b = 1 - a = 0 \Rightarrow a = b = 1 \geq c$.
3) $b - c = 1 - c = 0 \Rightarrow b = c = 1 \leq a$ – цей варіант вже є у випадку 1), бо з нього випливає, що $a = 1$.
4) $1 - c = 1 - a = 0 \Rightarrow a = c = 1 \Rightarrow b = 1$ – і знову маємо раніше знайдений розв'язок.

4. На площині задані прямі m, n та точка O. Побудуйте трикутник, у якого висоти лежать на прямих m, n, а у точці O розташований центр описаного кола побудованого трикутника.

Розв'язання. Нехай ΔABC задовольняє умови задачі, вершина A лежить на прямій m, B – на прямій n. Нехай пряма p – серединний перпендикуляр відрізку BC, зрозуміло, що вона проходить через точку O та паралельна m. Тоді точка C лежить на прямій n' – образі прямої n при симетрії відносно прямої p. Так само C лежить на прямій m' – образі прямої m при симетрії відносно прямої q – серединний перпендикуляр відрізку AC. Таким чином знаходимо точку $C = m' \cap n'$. Далі неважко побудувати і інші вершини шуканого ΔABC – або через симетрії відносно прямих p та q, або через описане коло з центром у точці O та радіусом OC.

5. Нехай ABC трикутник, в якому $\angle CAB = 2\angle ABC$. Точка D вибрана всередині ΔABC таким чином, що $AD = BD$ та $AC = CD$. Доведіть, що $\angle ACB = 3\angle DCB$.

Відповідь: 7.

Розв'язання. Позначимо через E – точка перетину серединного перпендикуляра до відрізку AB та сторони BC (рис. 1) та $\beta = \angle ABC$, тоді $\angle ACB = 180° - 3\beta$. За побудовою, $AE = BE$, тому $\angle BAE = \beta$ та $\angle EAC = \beta$. Побудуємо коло з центром у точці C та радіусом AC, позначимо другу точку перетину з цим колом прямої AE. Оскільки ΔACF – рівнобедрений, то $\angle AFC = \beta$. Оскільки $\angle AFC = \angle FAB$, то $CF \parallel AB$. Тому $\angle BCF = \beta$ і ΔCEF – рівнобедрений. З того, що $CE = FE$, то DE також серединний перпендикуляр до CF. Але тоді $DF = DC = CF$ і ΔCDF – рівносторонній. Звідси $\angle DCB = 60° - \beta$, а оскільки $\angle ACB = 180° - 3\beta$, то твердження доведене.

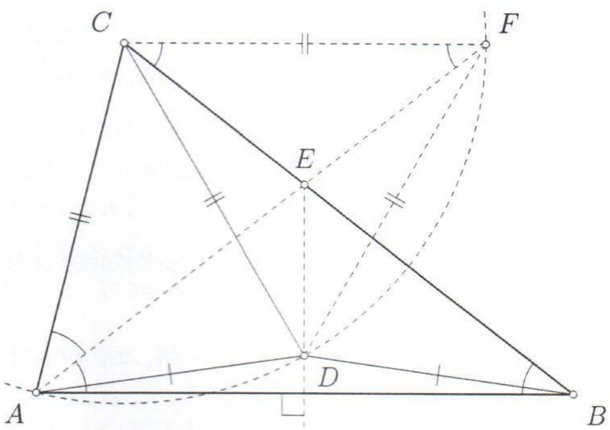


Рис. 1

6. На якому з проміжків $(\frac{k}{100}, \frac{k+1}{100})$, $k = \overline{1, 99}$ розташоване число

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{30}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}?$$

Відповідь: $S\in\left(\frac{49}{100},\ \frac{50}{100}\right)$.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$S=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{30}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{1\cdot3}+\frac{4}{1\cdot3\cdot5}+\frac{6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{60}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}\right)=.$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3-1}{1\cdot3}+\frac{5-1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{7-1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{61-1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{1\cdot3\cdot}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot}+\frac{1}{1\cdot3\cdot5}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot59}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}\right).$$

Оскільки $0<\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}<\frac{1}{100}$, то $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot61}\right)<\frac{49}{100}<S<\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$, то звідси маємо наведену відповідь.

7. Нехай $m,\ n$ – натуральні числа, для яких $m-n$ – непарне число. Доведіть, що число $(m+3n)(5m+7n)$ не є точним квадратом цілого числа.

Розв'язання. Методом від супротивного, нехай $(m+3n)(5m+7n)$ – квадрат цілого числа. Якщо $d=(m,\ n)$, то достатньо скоротити вираз на d^2: $(m+3n)(5m+7n)=d^2(x+3y)(5x+7y)$ і вираз, що залишився після скорочення так само має бути точним квадратом. При цьому якщо $m-n$ – непарне, то й $x-y$ – непарне. Таким чином вважаємо, що $(x,\ y)=1$.

Нехай тепер $(x+3y,\ 5x+7y)=c$. З умови задачі $x+3y$ та $5x+7y$ – непарні числа, тому й c – непарне число. Крім того

$$c\mid(5(x+3y)-(5x+7y))=8y \text{ та } c\mid(3(5x+7y)-7(x+3y))=8x\ \Rightarrow\ c\mid x \text{ та } c\mid y.$$

З взаємної простоти чисел $x,\ y$ випливає, що $c=1$. Але тоді з умови, що $(x+3y)(5x+7y)$ – точний квадрат випливає тоді, що кожний з множників має бути точним квадратом, бо вони взаємно прості.

$$x+3y=a^2 \text{ та } 5x+7y=b^2.$$

Оскільки $a,\ b$ – непарні натуральні, то $a^2-b^2\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 8)\ \Rightarrow$ $a^2-b^2=-4(x-y)$ – число не кратне 8 – одержана суперечність завершує доведення.

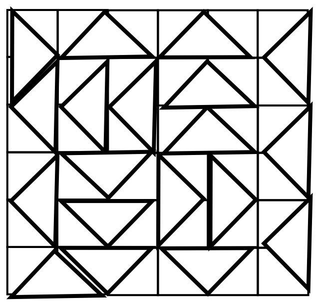


Рис. 2

8. Квадрат $n\times n$ поділений на одиничні квадратики. Ми маємо розташувати на ньому прямокутні рівнобедрені трикутники з гіпотенузою 2 таким чином, щоб вони мали вершини в вершинах утвореної сітки з одиничних квадратів, а також, щоб кожний одиничний відрізок сітки належав (всередині чи на межі) рівно одному з таких трикутників. Для яких n це можна здійснити?

Відповідь: $n=6k$ або $n=6k-4,\ k\in N$.

Розв'язання. Зрозуміло, що такий трикутник може покривати рівно 3 таких відрізки – один всередині та два на гіпотенузі. Таким чином загальна кількість цих відрізків має бути кратною 3. Усього таких відрізків $2n(n+1)$, тому має виконуватися умова $2n(n+1)\,\vdots\,3$, тому $n\equiv0,\ 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$.

Так само неважко зрозуміти, що зовнішня межа квадрату $n\times n$ має лежати на межі трикутників, а тому на гіпотенузі, тому кількість відрізків на кожній стороні має бути парною, тобто і n має бути парним.

Таким чином, поєднуючи ці дві умови, маємо, що $n \equiv 0,\ 2\ (\mathrm{mod}\ 6)$, тобто $n = 6k$ або $n = 6k - 4,\ \ k \in N$. Залишається показати, що для кожного з таких варіантів відповідне розтушування трикутників існує.

Покриття 2×2 – очевидна, 6×6 показане на рис. 2, на рис. 3 показане як існуюче покриття квадрату $n\times n$ можна збільшити до $(n+6)\times(n+6)$.

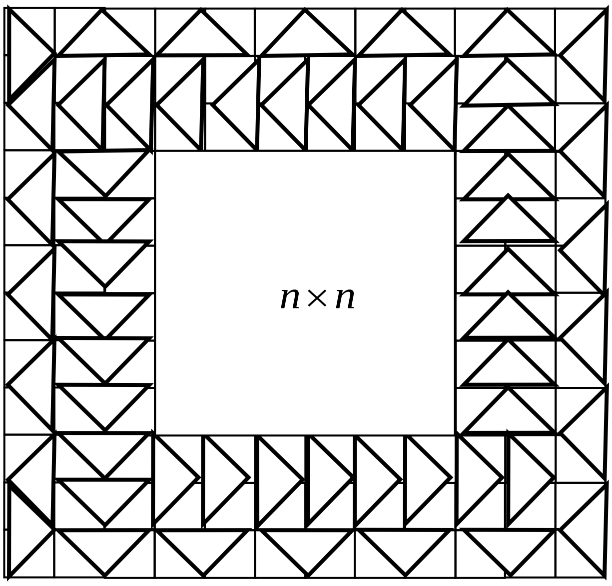


Рис. 3

Середня ліга

1. Розв'яжіть в цілих чисалх рівняння: $2^a + a^2 = 4^b + b^2$?

Відповідь: $a = b = 0$.

Розв’язання. Ліва частина не ціла при від'ємних a, права частина – при від'ємних b. Якщо вони одночасно від'ємні, то для рівності дробових частин має справджуватися умова $a = 2b$, але тоді з рівності цілих частин має виконуватися рівність $a = b$, що суперечить їхній від'ємності.

Таким чином $a,\ b \ge 0$. Очевидно, що якщо $a = 0$, то й $b = 0$ та навпаки.

Тому $a,\ b > 0$. Якщо $a \le b$, то $2^a + a^2 \le 2^b + b^2 < 4^b + b^2$ – суперечність.

Звідси $a > b$, тому $4^b > 2^2 \ \Rightarrow\ 2b > a$. Тоді з умов задачі:

$$0 < a^2 - b^2 = 4^b - 2^a \ \vdots\ 2^a \text{ або } a^2 > 2^a.$$

Для останньої нерівності легко довести, що вона не справджується при $a \ge 4$. Тому залишається безпосередньо переконатися, що $a = 1,\ 2,\ 3$ – розв’язків не існує.

2. В країні є одне місто, що розташоване в центрі кола та ще n міст, що розташовані по колу. Кожне з міст на колі з’єднане з двома сусідніми та з містом, що розташоване в центрі. На кожній з $2n$ доріг встановлений односторонній рух, таким чином, що з кожного міста є виїзд і в кожне місто є в'їзд. Доведіть, що з кожного міста можна дістатися до кожного іншого, не порушуючи напрямок руху по дорогах.

Розв’язання. Будемо доводити твердження у два кроки – спочатку покажемо, що з кожного міста $A \ne O$, де O – центральне місто, можна дістатися до міста O. Якщо в нас є $A \to O$, то твердження доведене. Якщо $A \leftarrow O$, то рухаємося з A в напрямі, якому можна рухатися: $A = A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_k$. Якщо хоч для одного з міст $A_i \to O$ – твердження доведене. Інакше – цикл завершується тим, що $A = A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to A_1$. Але тоді маємо суперечність з тим, що в O не заходить жодний шлях.

Аналогічно доводиться, що з O можна дістатися до будь-якого міста $A \ne O$.

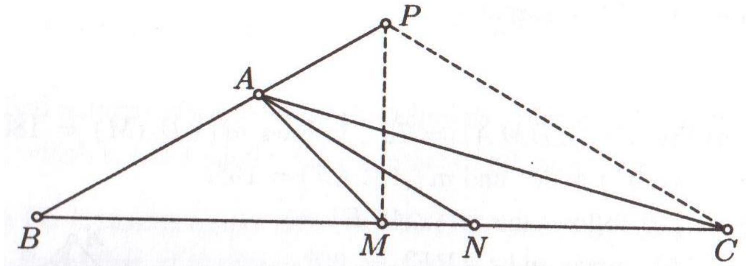


Рис. 4

3. У трикутнику ABC відомо, що $\angle ABC = 30°$, $\angle ACB = 15°$, точка M -- середина сторони BC. На стороні BC вибираємо точку N, для якої $AB = CN$. Доведіть, що AN – бісектриса $\angle MAC$.

Розв'язання. Нехай серединний перпендикуляр до сторони BC перетинає пряму BA у точці P (рис. 4). Тоді $\angle PBC = 30°$, $\angle PCA = 15°$ та $\angle MPC = 60°$. З властивостей бісектриси маємо, що $\frac{AP}{AB} = \frac{CP}{CB}$. З умов задачі звідси випливає, що $\frac{AP}{NC} = \frac{BP}{CB} \Rightarrow AN \parallel PC$. Оскільки $PC = 2PM$, то $\frac{AP}{AB} = \frac{CP}{CB} = \frac{2PM}{2BM} = \frac{PM}{BM}$, тому MA – бісектриса прямого кута BMP.

Як зовнішній кут $45° = \angle AMB = \angle ANB + \angle NAM = 30° + \angle NAM \Rightarrow \angle NAM = 15°$. Тому $\angle BAN = \angle BPC = 120°$ та $\angle BAC = 135° \Rightarrow \angle NAC = \angle NAM = 15°$, звідки і випливає, що AN – бісектриса $\angle CAM$.

4. Для додатніх чисел x, y, z, що задовольняють умову $xyz = 1$, доведіть, нерівність:

$$(x^4 + \tfrac{z^2}{y^2})(y^4 + \tfrac{x^2}{z^2})(z^4 + \tfrac{y^2}{x^2}) \ge (\tfrac{x^2}{y} + 1)(\tfrac{y^2}{z} + 1)(\tfrac{z^2}{x} + 1).$$

Розв'язання. Скористаємось нерівностями між середніми:

$$\sqrt{x^4 + \tfrac{z^2}{y^2}} \cdot \sqrt{y^4 + \tfrac{x^2}{z^2}} \ge (x^2 y^2 + \tfrac{z}{y} \cdot \tfrac{x}{z}) = x^2 (y^2 + \tfrac{1}{xy}),$$

випишемо аналогічні дві нерівності і перемножимо їх:

$$(x^4 + \tfrac{z^2}{y^2})(y^4 + \tfrac{x^2}{z^2})(z^4 + \tfrac{y^2}{x^2}) \ge x^2 y^2 z^2 (x^2 + \tfrac{1}{zx})(y^2 + \tfrac{1}{xy})(z^2 + \tfrac{1}{yz}) =$$

$$= (\tfrac{x^2}{y} + \tfrac{1}{xyz})(\tfrac{y^2}{z} + \tfrac{1}{xyz})(\tfrac{z^2}{x} + \tfrac{1}{xyz}) = (\tfrac{x^2}{y} + 1)(\tfrac{y^2}{z} + 1)(\tfrac{z^2}{x} + 1),$$

що й треба було довести.

5. Задача № 6 () молодша ліга.

6. Задача № 7 () молодша ліга.

7. Дано рівнобедрений трикутник ABC з вершиною в точці A, інцентром у точці I та описаним колом Γ. Прямі BI та CI вдруге перетинають Γ у точках M та N відповідно. Точка D лежить на $\cup BC$ кола Γ, що не містить точки A. E, F – точки перетину прямої AD з прямими BI та CI відповідно, $P = DM \cap CI$ та $Q = DN \cap BI$.

а) Доведіть, що точки D, I, P, Q – лежать на деякому колі Ω.

б) Доведіть, що прямі CE та BF перетинаються в точці, що лежить на колі Ω.

Розв'язання. ***а)*** Позначимо через $\beta = \angle CBA$, $X = BF \cap CE$ (рис. 5). Усі прописані кути вважатимемо орієнтованими. Тоді маємо:

$$\angle QIP = \angle BIC = 180° - \angle ICB - \angle CBI =$$
$$= 180° - \tfrac{1}{2}\beta \cdot 2 = 180° - \beta.$$

З іншого боку

$$\angle PDQ = \angle MDA + \angle ADN =$$
$$= \angle MBA + \angle ACN = \tfrac{1}{2}\beta \cdot 2 = \beta.$$

Останнє випливає з того, що A, M, C, D, B та N лежать на одному колі. З одержаного випливає, що D, I, P, Q – циклічні.

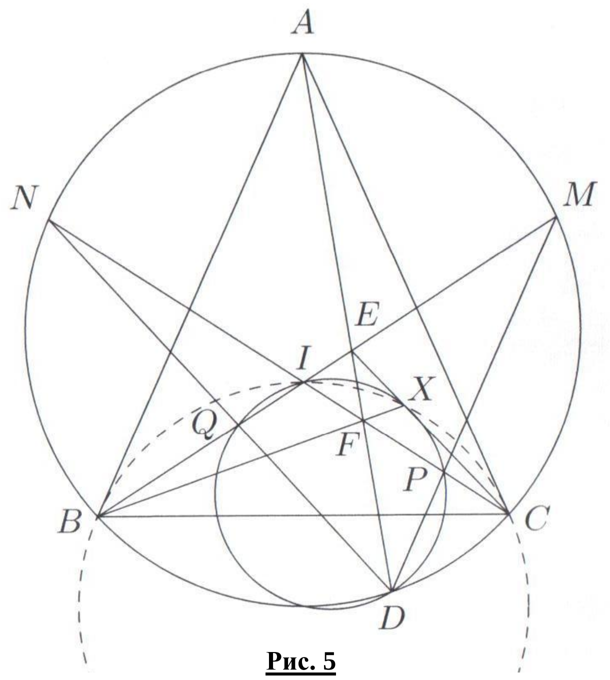


Рис. 5

б) Оскільки B, I, F, D – циклічні, то

$$\angle BIF = \angle BIC = 180^\circ - \beta,$$

оскільки $\angle FDB = \angle ADB = \angle ACB = \beta$. Оскільки $\angle BCD = \angle BMD$, то $\angle ICB = \frac{1}{2}\beta = \angle MBA = \angle MDA = \angle MDE$. Якщо розглянути ΔDEM, то

$$\angle IED = \angle MDE + \angle EDM = \angle IBC + \angle BCD = \angle ICD,$$

звідки й випливає циклічність I, E, C, D.

З умови $\angle ECI = \angle EDI$ випливає, що вписаним є $ECDI$, з рівності $\angle FDI = \angle FBI$ випливає циклічність $FDBI$, з цього $\angle XCI = \angle XBI$, звідки циклічним є $IXCB$.

З рівності $\angle IXD = \angle IPD$, циклічності $IXCB$ маємо, що $\angle EXI = 180^\circ - \angle IXC = \angle CBI = \frac{1}{2}\beta$, ми також зможемо знайти, що $\angle BXC = \angle BIC = 180^\circ - \beta$, оскільки $\angle CDF = \beta$. Звідси випливає, що $DXFC$ – циклічний та $\angle DFC = \angle DXC$. З ΔDFP маємо, що

$$\angle IPD = 180^\circ - \angle PDF - \angle DFC = 180^\circ - \frac{1}{2}\beta - \angle DXC = 180^\circ - \angle EXI - \angle DXC = \angle IXD,$$

що й треба було довести.

8. Задана упорядкована пара натуральних чисел (x, y), у якої рівно одна компонента парне число. З цією парою можна робити такі перетворення: $(x, y) \to (\frac{1}{2}x, y + \frac{1}{2}x)$, якщо компонента x – парна, або $(x, y) \to (x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}y)$, якщо парне y. Доведіть, що для кожного непарного $n > 1$, існує парне натуральне $b < n$ така, що за скінченну кількість кроків $(n, b) \to (b, n)$.

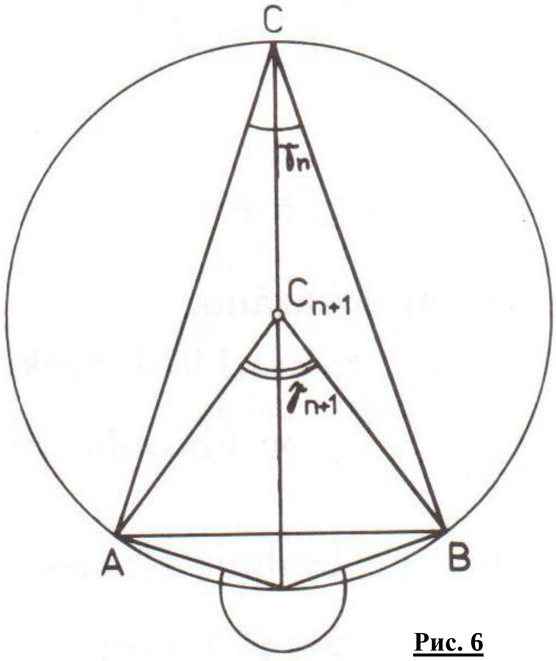
<u>Розв'язання</u>. Позначим пару, що утворилася після k-го кроку (x_k, y_k), очевидно, що сума $x_k + y_k = s = n + b$ є інваріантом. Оскільки $2(x + \frac{1}{2}y) \equiv x \pmod{x+y}$, то $2x_k \equiv x_{k-1} \pmod{s}$. ММІ отримаємо, що $2^k x_k \equiv x_0 = n \pmod{s}$. Оскільки $(s, 2^k) = 1$, то достатньо довести існування непарного s, для якого $n < s < 2n$ такого, що для декого k, справджується рівність $2^k b \equiv n \pmod{s}$, тобто $(2^k + 1)n \equiv 0 \pmod{s}$. Таким чином ми можемо просто вибрати $s = 2^r + 1$ та $k = r$, де $2^{r-1} < n < 2^r$, $r \in N$, тоді $b = 2^r + 1 - n$.

<u>Старша ліга</u>

1. Задача № 1 () середня ліга.

2. Задача № 2 () середня ліга.

3. На площині задані дві точки A, B. На серединному перпендикулярі до відрізку AB вибираємо точку C і будуємо послідовність точок $C_1 = C$, C_2, …, C_n, C_{n+1}, …, де C_{n+1} – центр описаного кола ΔABC_n. При якому розташуванні точки C точка C_n потрапить на відрізок AB (і тоді наступні точки послідовності вже не визначні)? При якому розташуванні точки C точка $C_n = C$?



<u>Рис. 6</u>

Відповідь: $\gamma_1 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$, $k = \overline{0;\ 2^{n-1}-1}$ та $\gamma_1 = \dfrac{2k\pi}{2^{n-1}-1}$, $k = \overline{1;\ 2^{n-1}-1}$.

Розв'язання. Очевидно, що усі точки C_n лежать на серединному перпендикулярі до відрізку AB. Позначимо через $\gamma_n = \angle AC_nB$. Будемо казати про кути, що $\alpha \sim \beta + 2\pi k$, $k \in Z$. З відомих властивостей центра описаного кола $\gamma_{n+1} \sim 2\gamma_n$ (рис. 6).

Якщо обидві точки над відрізком AB, то $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$, якщо обидві під відрізком AB, то $2\pi - \gamma_{n+1} = 2(2\pi - \gamma_n)$, або $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$. І нарешті, якщо C_n под., а C_{n+1} над відрізком AB, то знову вийде $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n - 2\pi$, якщо навпаки, то $\gamma_{n+1} = 2\gamma_n$. З введеного позначення:

$$\gamma_n \sim 2\gamma_{n-1} \sim 2^2\gamma_{n-2} \sim \ldots \sim 2^{n-1}\gamma_1. \qquad (1)$$

Потрапляння точки C_n означає, що $\gamma_n = \pi$, але тоді при $\gamma_1 \in (0;\ \pi)$ матимемо, що $\gamma_1 = \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n-1}}$, $k = \overline{0;\ 2^{n-1}-1}$.

Спів падіння точок $C_n = C_1$ означає, що $\gamma_1 \sim \gamma_n \sim 2^{n-1}\gamma_1$. Тоді $\gamma_1 + 2\pi k = 2^{n-1}\gamma_1 \Rightarrow$ $\gamma_1 = \dfrac{2k\pi}{2^{n-1}-1}$, $k = \overline{1;\ 2^{n-1}-1}$.

4. Яке найбільше значення може приймати вираз $(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$ за умови, що дійсні числа $x,\ y,\ z$ задовольняють умову: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

Розв'язання. Позначимо через $f(x,\ y,\ z) = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$. Тоді з рівності $f(x,\ y,\ 0) = -x^3y^3$ випливає, що шуканий максимум додатний. Внаслідок того, що f симетрична по $x,\ y,\ z$ та $f(x,\ y,\ z) = f(-x,\ -y,\ -z)$ можемо вважати без обмеження загальності, що $x \ge y \ge z$, $x + y + z \ge 0$ та $x^2 - yz > 0$.

Якщо f досягають максимуму на наборі $x,\ y,\ z$, то

$$f(x,\ y,\ z) - f(x,\ -y,\ -z) = -2x(x^2 - yz)(y^3 + z^3) \ge 0.$$

Тоді $y^3 + z^3 \le 0$. Очевидно, що $z = 0$ умову не задовольняє, бо тоді і $y = 0$. Тому $z < 0$ та $x^2 - yz > 0$. Але тоді $y^2 - zx > 0$. Тому $z^2 - xy > 0$. З нерівності між середніми:

$$\sqrt[3]{f(x,\ y,\ z)} = \sqrt[3]{(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)} \le \tfrac{1}{3}((x^2 - yz) + (y^2 - zx) + (z^2 - xy)) =$$

$$= \tfrac{1}{3}(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(x + y + z)^2) \le \tfrac{1}{2}, \text{ або } f(x,\ y,\ z) \le \tfrac{1}{8}.$$

При цьому $f(x,\ y,\ z) = \frac{1}{8}$ при $x + y + z = 0$.

5. Знайдіть усі такі функції $f,\ g : R \to R$, які $\forall x,\ y \in R$ задовольняють умову:

$$f(x - 2f(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x).$$

Відповідь: $f(x) = ax + 2a^2$, $g(x) = (1 - 2a)a(x + 2a)$, $\forall a \in R$.

Розв'язання. Покажемо, що функція f приймає значення 0.

Якщо $f(0) = 0$, то все очевидно.

Якщо $f(0) = b \ne 0$, то підставимо при $x = 0$ $f(-2f(y)) = -yb + g(0)$. У правій частині лінійна функція, яка обов'язково приймає значення 0.

Нехай тепер $f(c)=0$. Покладемо в умові $y=c$, тоді $f(x)=-cf(x)+g(x) \Rightarrow g(x)=(c+1)f(x)$. Звідси початкове рівняння набуває вигляду

$$f(x-2f(y))=xf(y)+(c+1-y)f(x).$$

Нехай $a=f(c+1)$, покладемо $y=c+1$, звідки $f(x-2a)=xa$, тому при $t=x-2a$ матимемо, що $f(t)=(t+2a)a=at+2a^2$. Оскільки $f(c)=0$, то $ac+2a^2=0$.

При $a=0$ матимемо, що $f=g\equiv 0$ – розв'язок.

При $a\neq 0$ матимемо, що $c=-2a$. Тоді $g(x)=(1-2a)a(x+2a)$.

6. Задача № 7 () середня ліга.

7. Задача № 8 () середня ліга.

8. Добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ записан на дошці. Для яких натуральних $n\geq 2$ ми можемо додати знак оклику до деяких множників, тобто змінити їх на факторіали так, що весь цей добуток стане повним квадратом?

Відповідь. Усі складені $n\geq 4$.

Розв'язання. Позначимо $v_p(n)$ найвищу степінь простого числа p, на яку ділиться ціле додатне n. Ця функція має такі властивості:

- Для усіх простих p і натуральних n число $v_p(n)$ ціле невід'ємне.
- Для усіх натуральних m, n та усіх простих p справджується рівність: $v_p(mn)=v_p(m)+v_p(n)$.
- Для усіх простих p має місце рівність: $v_p(p!)=v_p(p)=1$.
- Для усіх простих p мають місце рівності: $v_p((p+1)!)=v_p(p)=1$. $v_p(p+1)=0$.
- Для усіх простих p та усіх натуральних $n<p$ справджується рівність: $v_p(n!)=v_p(n)=0$.
- Натуральне n є повним квадратом тоді і тільки тоді, коли $v_p(n)$ є парним (включаючи 0) для усіх простих p.

Позначимо $S=n!$ початкове значення добутку на дошці та S' кінцеве значення після додавання факторіалів. Можна легко побачити з властивостей v_p, що для n, рівного будь-якому простому числу p, отримуємо $v_p(S)=v_p(p!)=1$ та $v_p(S')=1$, тому що додавання факторіалів не змінює кількість входжень в добуток простого числа $p=n$ і кінцевий добуток на дошці. Число $v_p(S')$ у такому випадку непарне, а отже S' не є повним квадратом.

Припустимо, що n складене число (отже $n\geq 4$) звідси й надалі. Ми покажемо, що ми зможемо додати факторіали таким чином, що кінцевий добуток

$$S'=f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdot \ldots \cdot f_n,$$

буде точним квадратом, де f_k або k, або $k!$ для усіх k. Це еквівалентно тому, що $v_p(S')$ парне для усіх простих p. Оскільки n не просте, лише прості числа менші за n з'являються у добутку S'. Оскільки кожне таке просте число p не входить у множники $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$ та просте число p з'являється у f_p лише один раз, кінцевий степінь $v_p(S')$ такий самий, як і у «скороченому» добутку

$$p\cdot f_{p+1}\cdot f_{p+2}\cdot \ldots \cdot f_n. \qquad \textbf{(1)}$$

Як ми можемо забезпечити, щоб кожне просте число $p < n$ з’являлось у відповідному добутку **(1)** лише парну кількість разів? Оскільки у другому добутку f_{p+1} з **(1)** просте число p з’являється або один раз (у випадку $f_{p+1} = (p+1)!$) або не з’являється зовсім (якщо $f_{p+1} = p+1$), ми можемо забезпечити потрібну кількість p, обираючи f_{p+1} залежно від наступних значень $f_{p+2}, \ldots, f_n$ (це виконується також для простого $p = n-1$, де множник $f_{p+1} = f_n$ це останній множник у **(1)**; у такому випадку ми обираємо $f_n = n!$).

Попередній аналіз дає нам спосіб вибору необхідних факторіалів. Спочатку, ми обираємо $f_k \in \{k, k!\}$ довільно для усіх $k \leq n$ так, що $k-1$ не просте. Інші f_k, це f_{p+1}, де довільне просте число p менше за n, будемо обирати у зворотному порядку, з найбільшого такого простого p до найменшого простого $p = 2$ (вибір f_3 буде останнім, це відповідає найменшому простому $p = 2$). Для найбільшого необраного f_{p+1} ми знаходимо $v_p(f_{p+2} \ldots f_n)$, у непарному випадку ми обираємо $f_{p+1} = p+1$, у парному випадку ми обираємо $f_{p+1} = (p+1)!$ і так далі.

Це завершує будівництво S' та також розв’язання проблеми.