Командна усна олімпіада

"Якщо здається, що роботу зробити легко, то буде обов'язково складно.
Якщо на вигляд вона складна, то виконати її абсолютно неможливо."
Теорема Стокмайера

Наймолодша ліга

1. Чи можна на колі розставити 20 жовтих та 20 синіх точок, таким чином, щоб утворилося 20 діаметрів, кінцівки яких є різнокольоровими і жодні дві сусідні точки не були одночасно синіми?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Оскільки точок однакова кількість, то єдиний варіант їх розставити з виконанням умови – це сині та жовті точки мають чергуватися. Якщо дві жовті стоять поруч, то між якимись сусідніми жовтими точками будуть принаймні дві синіх, тобто будуть сусідні сині. Але тоді, якщо проведемо довільний діаметр, то він з'єднує жовту та синю точки. Тоді по кожний бік від нього має бути однакова кількість синіх точок, але їх лишилося лише 19 – одержана суперечність завершує доведення.

2. Нехай p – просте число, для якого $3p+10$ є сумою квадратів шести послідовних натуральних чисел. Доведіть, що $36 \mid p-7$.

Розв'язання. За умовою

$$3p+10=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=6n^2+6n+19 \Rightarrow$$
$$p=2n^2+2n+3=2n(n+1)+3.$$

Якщо $n=3k$ або $n=3k-1$, то $p \,\vdots\, 3$, тобто не є простим. Таким чином $n=3k+1$, тому

$$p=2n(n+1)+3=(6k+2)(3k+2)+3=18k^2+18k+7 \Rightarrow p-7=18k(k+1) \,\vdots\, 36,$$

що й треба було довести.

3. Доведіть, що якщо дійсні числа x, y, z задовольняють умову $(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=1$, то справджується нерівність: $xy+yz+zx<0$.

Розв'язання. Задана умова переписується таким чином:

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

Тоді, наприклад, $y=-x$, звідки $xy+yz+zx=-x^2<0$.

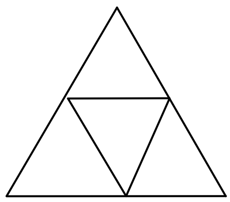

Рис. 1

4. Рівносторонній трикутник T покритий п'ятьма однаковими рівносторонніми трикутниками. Доведіть, що достатньо чотирьох таких трикутників, щоб покрити T.

Розв'язання. З 6 точок на рис. 1 принаймні дві мають бути покритими одним трикутником. Але це означає, що сторона меншого трикутника не менше ніж половини сторони великого трикутника. Далі неважко показати шукане покриття.

5. На сторонах AB та AC ΔABC вибрані точки D та E відповідно таким чином, що $AD=AE$. Доведіть, що з відрізків BE, CD та BC можна скласти трикутник.

Відповідь: $30°, 50°, 100°$ та $40°, 60°, 80°$.

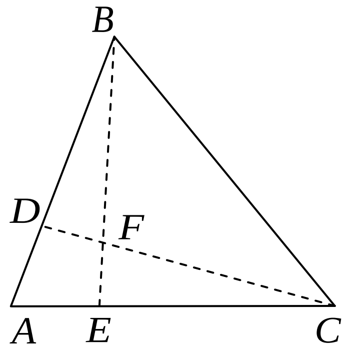

Рис. 2

Розв'язання. Позначимо через $F = BE \bigcap CD$ (рис. 2). Перевіримо, що справджуються усі три нерівності трикутника.

$BE + CD > BF + CF > BC$.

Доведемо, що $BE + BC > CD \Leftrightarrow AE + BE + BC > CD + AD$.

З нерівностей трикутника для існуючих трикутників маємо, що:

$AE + BE > AB,\ BD + BC > DC$. Крім того $AB = AD + DB \Rightarrow$

$$AE + BE + BC > AB + BC = AD + DB + BC > AD + DC,$$

що й треба було довести. Третя нерівність доводиться аналогічно другій.

6. Послідовність (a_n) задається умовами: $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_{2^k + j} = -a_j,\ 1 \le j \le 2^k$. Знайдіть значення виразу: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1990}$.

Відповідь: 5.

Розв'язання. За умовами $a_3 = a_{2^1+1} = -a_1 = -1,\ a_4 = a_{2^1+2} = -a_2 = -4$. Так само

$$a_1 + \ldots + a_{4\cdot 2^k} = a_1 + \ldots + a_{2\cdot 2^k} + a_{2\cdot 2^k+1} + \ldots + a_{4\cdot 2^k} = a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}} + a_{2^{k+1}+1} + \ldots + a_{2^{k+1}+2^{k+1}} =$$
$$= a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}} - (a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}) = 0.$$

Звідси випливає, що для кожного натурального m $a_1 + \ldots + a_{4m} = 0$. Далі просто маємо, що

$$a_1 + \ldots + a_{1990} = a_1 + \ldots + a_{1988} + a_{1989} + a_{1990} = a_1 + \ldots + a_{4\cdot 497} + a_{1989} + a_{1990} = a_{1989} + a_{1990} =$$
$$= -a_{965} - a_{966} = a_{453} + a_{454} = -a_{197} - a_{198} = a_{69} + a_{70} = -a_5 - a_6 = a_1 + a_2 = 5.$$

7. Чи існують цілі числа x, y, z, що задовольняють рівності: $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + yz = 31$.

Відповідь: не існують.

Розв'язання. Покажемо, що така рівність справджуватися не може:

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 + yz = 31 \Leftrightarrow 16x^2 + 32y^2 + 64z^2 + 16yz = 31\cdot 16 \Leftrightarrow$$
$$16x^2 + 32y^2 + 64z^2 + 16yz = 31\cdot 16 \Leftrightarrow 16x^2 + (8z + y)^2 = 31(16 - y^2).$$

Очевидно з останнього, що $16 \ge y^2$. Якщо розглянути конгруенції за модулем 31, то з подільності $a^2 + b^2 \vdots 31$ випливає, що $a, b \vdots 31$. Тому й $a^2 + b^2 \vdots 31^2$. Таким чином з останнього рівняння маємо, що $16 - y^2 \vdots 31$. З умови $0 \le 16 - y^2 \le 16$ випливає, що $y = \pm 4$. Далі маємо, що

$$16x^2 + (8z + y)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ та } 8z + y = 0.$$

Звідси маємо, що $x = y,\ z = \pm\frac{1}{2}$ і отримали суперечність.

8. В школі, в якій є чотири шостих класи, на шкільну олімпіаду для 6-го класу в одну аудиторію зібралося 20 дітей, кожен з яких – шестикласник чи п'ятикласник. Виявилось, що серед довільних 10 учасників олімпіади можна вибрати трьох однокласників. Відомо, що з 6"А" класу учасників була найбільша кількість (тобто ні з якого іншого класу не було більше учасників ніж з 6"А"). Яка найменша кількість учасників там могла бути з 6"А" класу?

Відповідь: 5.

Розв'язання. Наведемо приклад можливого розподілу. Нехай з кожного з чотирьох класів було по

5 учасників. Тоді якщо в деякій компанії немає 3 з одного класу, то ї не більше 8.

Покажемо, що менше 5 бути не може. Занумеруємо учасників номерами від 1 до 20. Тоді з перших 10 учасників виберемо 3-х однокласників, нехай це будуть $1, 2, 3$, і вони навчаються в класі "А". Приберемо їх, розглянемо учасників $4-13$, там так само є принамйні 3 однокласники, і вони моють бути з іншого клсу в порівнянні з $1-3$, бо інакше з цього класу було б щонайменше 6 однокласників – супеерчність. Таким чином нехай $4-6$ з класу "Б". Так само $7-9$ з класу "В" та $10-12$ з класу "Г". Якщо б існувала ще одна трійка, наприклад, $13-15$ з класу "Д", то достатньо зібрати по 2 учасникі з кожного з пяти класів "А" – "Д" і отримаємо суперечність.

Таким чином усі учасники $13-20$ не містять трійки з іншого класу. Крім того, там не може бути більше 1 учасника з пятого класу. Якщо б їх біло принаймні 2, то легко утворити шукані 10 учасників, де немає 3 з одного класу. Таким чином, навіть, якщо 13-й з пятого класу, інші 7 з класів "А" – "Г", з принципу Діріхле, там принаймні 2 з одного класу, а тому щонайменше буде 5 учасників з одного класу.

Молодша ліга

1. Задача № 2 **()** наймолодша ліга.

2. Доведіть, що число $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ – складене.

Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$\tfrac{5^{125}-1}{5^{25}-1} = 5^{100}+5^{75}+5^{50}+5^{25}+1 = x^4+x^3+x^2+x+1 =$$

$$= x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+3x+1)^2-5x(x+1)^2 = (5^{50}+3\cdot5^{25}+1)^2-5\cdot5^{25}(5^{25}+1)^2 =$$

$$= (5^{50}+3\cdot5^{25}+1-5^{13}(5^{25}+1))(5^{50}+3\cdot5^{25}+1\ \ +5^{13}(5^{25}+1)),$$

що й треба було довести.

3. З вершини B на бісектриси кутів $\angle BAC$ та $\angle BCA$ чи на їх продовження опущені перпендикуляри BK та BM відповідно. При цьому виявилося, що $BM = BK$. Доведіть, що ΔABC рівнобедрений.

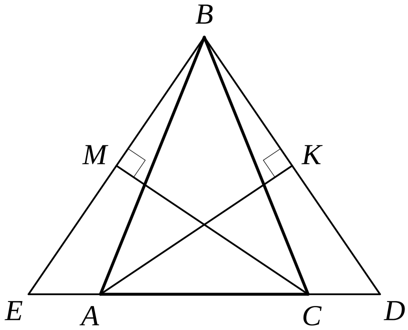

Рис. 3

Розв'язання. Продовжимо перпендикуляри BK та BM до перетину з прямою AC в точках D та E відповідно (рис. 3). Тоді в ΔABD відрізок AK – висота та бісектриса, тому цей відрізок і медіана і ΔABD трикутник рівнобедрений. Аналогічно рівнобедреним є ΔBCE. Тоді $BD = 2BK = 2BM = BE$. Тобто ΔBDE — рівнобедрений. Але тоді $\angle BDE = \angle BED = \varphi$. Звідси також $\angle ABD = \angle CBE = \varphi$, тому $\angle CBD = \varphi - \angle ABC = \angle ABE$. Тоді $\Delta BCD = \Delta BEA$ за стороною та двома кутам, при цій стороні. Тоді $BC = BA$, що й треба було довести.

4. Чи можна розрізаки квадрат 2020×2019 на куточки з 5 клітин (він утворюється вирізанням з квадрату 3×3 квадрата 2×2?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Зафарбуємо усі 2019 стовпчиків, кожний з яких містить по 2020 клітин, по черзі у чорний та білий колір. Тоді в кожному куточку клітин одного кольору рівно на 3 більше ніж іншого. Тому, якщо вдалося б належним чином розрізати на куточки, то кількість чорних клітин мала бути більшою, від кількості білих на число, що кратне 3, а їхня кількість відрізняється рівно на 2020, що не кратне 3. Суперечність, що завершує доведення.

5. У прямокутному трикутнику ABC на гіпотенузі AB вибрані такі точки ABC D, E, для яких справджуються рівності $AD = AC$ та $BE = BC$. Точки P та Q вибрані на катетах AC та BC відповідно таким чином, що $AP = AE$ та $BQ = BD$. Точка M – середина відрізку PQ. Знайдіть величину $\angle AMB$.

***Відповідь*:** $135°$.
Розв'язання. Покажемо, що M – інцентр ΔABC. Оскільки $\angle A + \angle B = 90°$, то для інцентру I (рис. 4):

$$\angle AIB = 180° - \tfrac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 135°.$$

Оскільки $AD = AC$, то точки D та C симетричні відносно бісектриси AI. Аналогічно Q та D симетричні відносно бісектриси BI. Звідси випливає, що $CI = DI = QI$. З аналогічних міркувань $CI = PI = EI$. Крім того, оскільки CI – бісектриса прямого кута, то $\angle PCI = \angle QCI = 45°$. Тому $\angle CIP = \angle CIQ = 90°$. Тобто точки P, Q, I – колінеарні та I – середина відрізка PQ. Таким чином $M = I$ і, відповідно, $\angle AMB = 135°$.

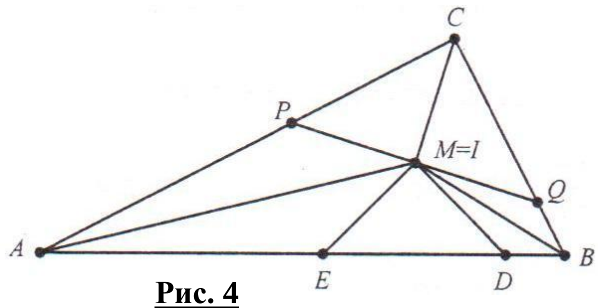

Рис. 4

6. Задача № 6 **()** наймолодша ліга.

7. Задача № 7 **()** наймолодша ліга.

8. Задача № 8 **()** наймолодша ліга.

Середня ліга

1. Для заданого непарного натурального числа n знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел x, y, для яких $(x, y) = n$ та $(xy + x, xy + y) = 2n$.

Відповідь: наприклад $x = n$, $y = 3n$.
Розв'язання. Розглянемо такі числа $x = n$, $y = kn$. Для довільного натурального k $(x, y) = n$. Обчислимо тепер значення другої пари чисел при $k = 3$: $xy + x = n(3n+1)$, $xy + y = n(3n+3)$. За побудовою парні числа $3n+1$ та $3n+3$ відрізняються на 2, тому їхній НСД 2, звідки остаточно маємо, що $(xy + x, xy + y) = 2n$.

2. У куточку шахівниці $n \times n$, $n \ge 4$ стоїть шахова фігура кінь. Перший гравець робить 2 звичайних ходи конем, після чого другий гравець робить 1 продовжений хід (3 клітини в одному напрямі та 1 у поперечному). І надалі вони грають за тим самим принципом – перший робить 2 ходи, а другий – 1 проводжений. Перший гравець переможе, якщо зможе попасти конем в протилежний кут шахівниці, другий переможе, якщо зможе завадити цьому. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

Відповідь: перший гравець.
Розв'язання. Покажемо, що кожним своїм ходом (тобто подвійним ходом шахового коня) перший гравець, може пересунути коня з клітини (k, k) у клітину $(k+1, k+1)$ або $(k+3, k+3)$ (якщо

на лінію $k+3$ – горизонталь чи вертикаль – спочатку потрапить кінь після ходу другого). Це робиться простим перебором можливих ходів другого гравця. Ну а першим ходом перший гравець пересуває коні з $(1,1)\to(4,4)$. Далі діє за описаним алгоритмом.

3. У трикутнику ABC провели висоти AD, BE та CF, що перетинаються в точці H. Відрізки EF та AD перетинаються в точці G. AK – діаметр описаного кола ΔABC і перетинає сторону BC у точці M. Доведіть, що $GM \parallel HK$.

Розв'язання. Позначимо кути ΔABC стандартним чином через α, β, γ. Оскільки ΔFBC прямокутний, то $\angle BCF = 90° - \beta$, тоді з прямокутного ΔCDH маємо, що $\angle DHC = \beta = \angle AHF$ (рис. 1).
З вписаного чотирикутника $ABKC$ $\angle AKC = \beta$ та $\angle AKB = \gamma$ Звідси випливає, що $\Delta AFH \sim \Delta ACK$, тому $\frac{AF}{AH} = \frac{AC}{AK}$. З вписаного чотирикутника $AHFE$ $\angle FEA = \beta = \angle AHF$, звідки $\Delta AFE \sim \Delta ABC$, тому $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$. Оскільки $\angle AFE = \gamma$, то $\angle HFE = 90° - \gamma$, а також $\angle HAE = \angle HFE = 90° - \gamma$. Тоді $\Delta AGE \sim \Delta AMB$ і $\frac{AG}{AE} = \frac{AM}{AB}$. З останніх трьох виразів $\frac{AG}{AH} = \frac{AM}{AK}$, звідки й випливає шукана паралельність.

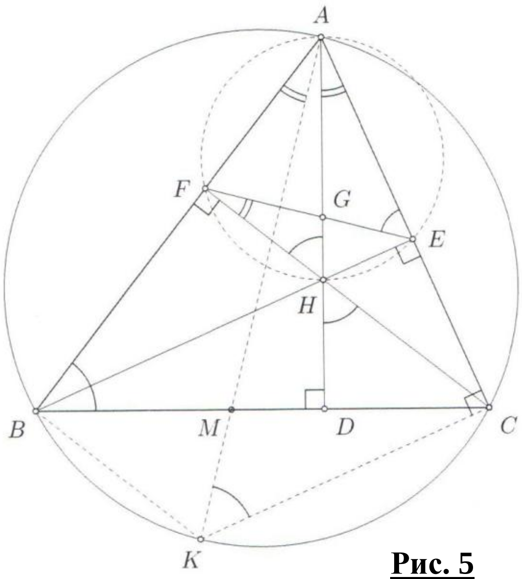

Рис. 5

4. Знайдіть найменше натуральне n, для якого існують цілі числа x_1, x_2, …, x_n та натуральні a_1, a_2, …, a_n, що задовольняють умови:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n > 0,\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n < 0.$$

Відповідь: $n = 3$.
Розв'язання. Спочатку наведемо приклад: $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = -1$ та $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 6$.

Для $n = 1$ матимемо, що $x_1 = 0$ і дві нерівності неможливі.

Для $n = 2$ матимемо, що $x_1 = -x_2 \neq 0$, тому $a_1x_1 - a_2x_1 > 0 \Rightarrow a_1 > a_2$. Але тоді $a_1^2x_1 > a_2^2x_2$ – суперечність.

5. Послідовність (a_n) задається умовами: $a_1 = 1$, $a_{2^k+j} = -a_j$, $1 \le j \le 2^k$. Доведіть, що послідовність (a_n) не періодична.

Розв'язання. За умовами для $j = 2^k$ маємо, що $a_{2^{k+1}} = -a_{2^k}$, звідси $a_{2^k} = (-1)^k$. Припустимо, що ця послідовність періодична з періодом p, то виберемо таке k, для якого $2^k \ge p$, тоді

$$a_{2^k+p} = a_{2^k} = (-1)^k,\ a_{2^{k+1}+p} = a_{2^{k+1}} = (-1)^{k+1}, \text{ отже } a_{2^{k+1}+p} \neq a_{2^k+p}.$$

Оскільки $p \le 2^k$, то $a_{2^k+p} = -a_p = a_{2^{k+1}+p}$ – одержана суперечність завершує доведення.

6. Розглядаємо усі трикутники, що мають вершини з цілими координатами. Скільки існує натуральних $n < 2017$, для яких можна намалювати прямокутний рівнобедрений трикутник, на межі якого розташоване точно n точок з обома цілими координатами, включно з вершинами?

Відповідь: 1008.

Розв'язання. Покажемо, що умови задовольняють усі такі n, що кратні 3 або 4.
Якщо $n = 3k$, то шуканим є трикутник з вершинами в точках $(0;\,0)$, $(k;\,0)$ та $(0;\,k)$.
Якщо $n = 4k$, то шуканим є трикутник з вершинами в точках $(0;\,0)$, $(k;\,k)$ та $(k;\,-k)$.
Покажемо, що для інших значень n це неможливо. Перенесемо трикутник таким чином, щоб вершина прямого кута співпала з початком координат. Тоді без обмеження загальності можемо вважати, що його інші дві вершини розташовані в точках з координатами $(a;\,b)$ та $(b;\,-a)$.
На відрізку з вершинами в цілих точках $(a;\,b)$ та $(c;\,d)$ розташовано рівно $НСД(a-c;\,b-d)-1$ точок, якщо не рахувати вершини. Тому для нашого трикутника ця величина дорівнює $N = 2НСД(a;\,b) + НСД(a-b;\,a+b)$.
Очевидно, що $НСД(a;\,b) \mid НСД(a-b;\,a+b)$. А $НСД(a-b;\,a+b) \mid (a+b)-(a-b) = 2b$ і аналогічно ділить $2a$. Тому $НСД(a-b;\,a+b) \mid 2 \cdot НСД(a;\,b)$. Таким чином $НСД(a-b;\,a+b) = НСД(a;\,b)$ або $НСД(a-b;\,a+b) = 2 \cdot НСД(a;\,b)$. Тому загальна кількість точок на межі такого трикутника складає $N = 3НСД(a;\,b)$ або $N = 4НСД(a;\,b)$.
Залишається порахувати відповідну кількість можливих значень n. З кожних 12 чисел рівно 6 ділиться чи на 3, чи на 4, тому з 2016 чисел рівно половина з них має таку властивість.

7. Точка O – центр описаного кола гострокутного ΔABC, у якого $AB < AC$. Перпендикуляри, що проведені через точки A та O до прямої BC перетинають її в точках A_1 та P відповідно. Прямі BO та CO перетинають пряму AA_1 у точках D та E відповідно. Описані кола ΔABD та ΔACE вдруге перетинаються в точці F. Доведіть, що бісектриса $\angle FAP$ проходить через центр вписаного кола ΔABC.

Розв'язання. Для доведення достатньо показати, що $\angle BAF = \angle CAP$. Оскільки $OP \perp BC$ та O – центр описаного кола ΔABC, то P – середина BC. Тому AP – медіана, то треба показати, що AF — сімедіана.
Нехай пряма AF перетинає пряму BC у точці X, а описані кола трикутників ABD та ACE перетинають пряму BC вдруге у точках Y та Z відповідно (рис. 6). Тоді з властивостей січних:

$$XB \cdot XY = XF \cdot XA = XZ \cdot XC.$$

Тоді

$$\frac{XB}{XC} = \frac{XZ}{XY} = \frac{XB+XZ}{XC+XY} = \frac{BZ}{CY}.$$

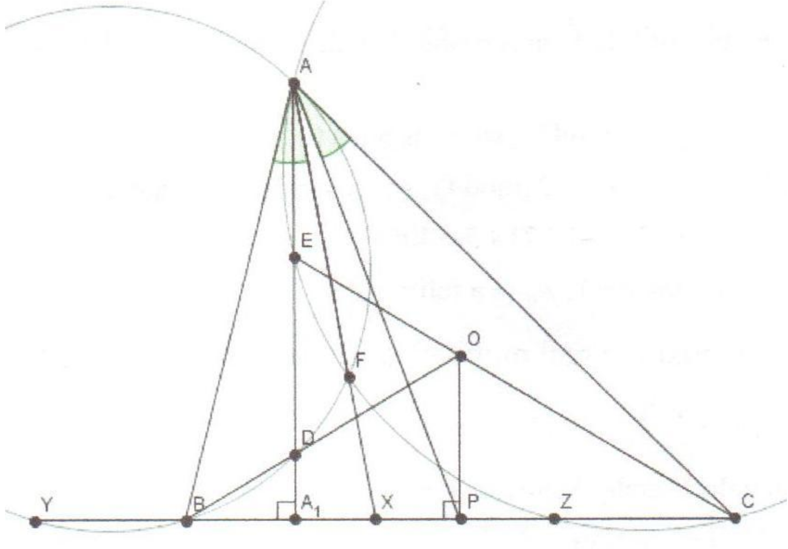

Рис. 6

$$\angle CAO = \angle ACO = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle AOC) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2\angle ABC) = 90^\circ - \angle ABC =$$
$$= 90^\circ - \angle ABA_1 = \angle BAA_1 = \angle BAE.$$

Звідси AB – дотична до описаного кола ΔACE. Аналогічно AC – дотична до описаного кола ΔABD. З теореми про дотичну: $BA^2 = BZ \cdot BC$ та $CA^2 = CB \cdot CY$.
З використанням усіх одержаних рівностей $\frac{BA^2}{CA^2} = \frac{BZ}{CY} = \frac{XB}{XC}$.
Тоді за відомою властивістю пряма AX - сімедіана, що й завершує доведення.

8. Для деякого натурального n у кожній комірці таблиці 17×17 записане одне з чисел $1, 2, \dots, n$ таким чином, що задовольняються умови: якщо у одному рядку дві комірки C_1 та C_2 містять однакові числа k (C_1 лівіше за C_2), то в стовпчику C_1 вище немає над цією коміркою чисел k. При якому найменшому n це можливе?

Відповідь: $n=9$.
Розв'язання. Покажемо, спочатку приклад належного розташування чисел (рис. 7).
Якщо деякий рядок містить принаймні двічі число k, то підкреслимо усі ті, окрім самого правого. Таким чином у кожному стовпчику є максимум одне підкреслене число, але тоді їх разом не більше 17. Крім того кожний рядок містить максимум одне не підкреслене k, тому разом цих чисел не більше 34.
Позначимо через x_k, $k\in\{1, 2, \dots, n\}$ – кількість входжень числа k в таблиці, за доведеним $x_k\le 34$, крім того $x_1+\ldots+x_n=17^2=289 \Rightarrow 17^2=x_1+\ldots+x_n\le 34n \Rightarrow n\ge\frac{17^2}{34}=\frac{17}{2}$, тобто $n\ge 9$. Остання оцінка завершує доведення.

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	1
2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	1	1
3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	1	1	2
								…								
9	9	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8

Рис. 7

Старша ліга

1. Задача № 1 **()** середня ліга.

2. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$ доведіть нерівність:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\le\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

Розв'язання. Запишемо нерівність Ієнсена для вгнутої функції $f(x)=\sqrt{x}$ та значень a, b, c:

$$a\sqrt{2b+1}+b\sqrt{2c+1}+c\sqrt{2a+1}\le\sqrt{a(2b+1)+b(2c+1)+c(2a+1)}=$$
$$=\sqrt{1+2(ab+bc+ca)}=\sqrt{2-(a^2+b^2+c^2)}.$$

3. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого в просторі існує опуклий многогранник, що має такі властивості:

- Він має принаймні 10 вершин.
- Кожні дві вершини можуть бути з'єднані принаймні 4 різними шляхами, кожен з яких не має спільних вершин.
- Він має принаймні n ребер.

Відповідь: $n=20$.
Розв'язання. Наведемо приклад багатогранника, що задовольняє умову(рис. 8).

Покажемо, що меншої кількості ребер бути не може. З кожної вершини може виходити принаймні 4 ребра, щоб існували 4 різних маршрути. Оскільки кожне ребро має рівно 2 вершини, то кількість ребер не менша від $V \geq \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$.

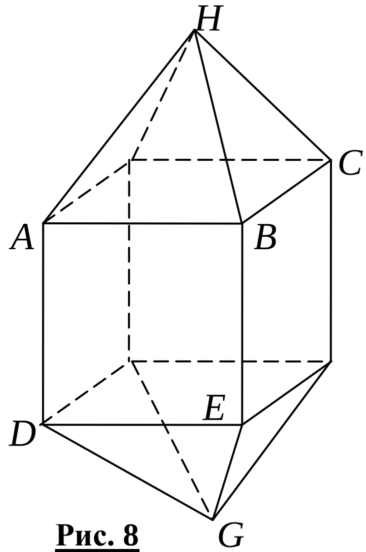

Рис. 8

4. Позначимо через $c(O, R)$ – описане коло гострокутного трикутника ABC зі сторонами $AB < AC < BC$. Коло $c_1(A, AC)$ перетинає коло c у точці D та продовження сторони BC у точці E. Пряма AE перетинає коло c у точці F, точка G симетрична точці E відносно точки B. Доведіть, що чотирикутник $FEDG$ вписаний.

Розв'язання. Оскільки $AFBC$ вписаний в коло c (рис. 9), то $\angle EFB = \angle ACB = \angle C$. З рівнобедреного ΔAEC $\angle AEC = \angle ACB = \angle C$.

Тому ΔBFE – рівнобедрений, $BE = BF$. Покладемо $\angle BCD = x$, тоді з кола c_1 $\angle EAD = 2x$, звідки $\angle EAB + \angle BAD = 2x$, а з кола c $\angle BAD = \angle BCD = x$. З останніх двох рівностей випливає, що $\angle BAD = \angle EAB = x$, тому AB – бісектриса рівнобедреного ΔEAD. Тому це є серединним перпендикуляром відрізку ED та $BE = BD$. Таким чином з рівності $BE = BD = BF = BG$, з чого й випливає, що усі точки E, D, F, G лежать на одному колі, що й треба було довести.

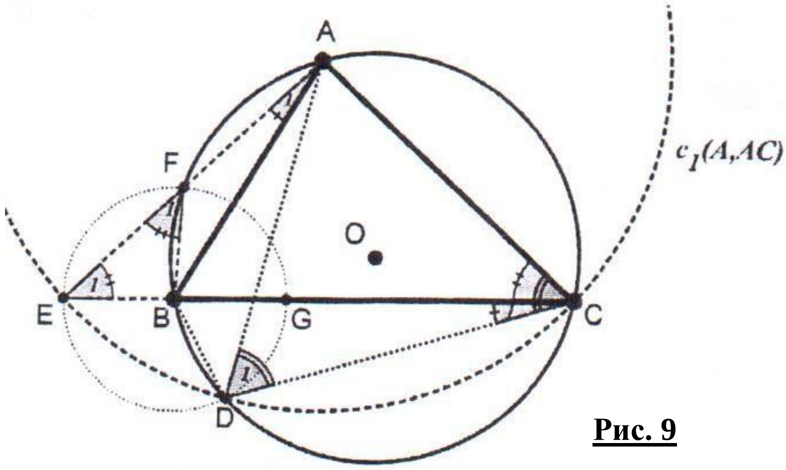

Рис. 9

5. Задача № 6 **()** середня ліга.

6. Задача № 7 **()** середня ліга.

7. Знайтіть усі многочлени P, які для кожного дійсного x задовольняє умову:

$$P(x^2) + 2P(x) = (P(x))^2 + 2.$$

Відповідь: $P(x) = 1$, $P(x) = 2$ та $P(x) = x^n + 1$.

Розв'язання. Перепишемо умову таким чином:

$$P(x^2) - 1 = (P(x))^2 - 2P(x) + 1 = (P(x) - 1)^2.$$

Покладемо $Q(x) = P(x) - 1$, тоді остання рівність набуває такого вигляду: $Q(x^2) = (Q(x))^2$. Якщо $Q(x) = const$, то $Q(x) = 0$ або $Q(x) = 1$. В іншому випадку, нехай Q – многочлен степені n, запишемо його у вигляді $Q(x) = a_n x^n + R(x)$, $\deg(R) = r < n$. Тоді з останньої рівності матимемо, що

$$Q(x^2) = a_n x^{2n} + R(x^2) = a_n^2 x^{2n} + 2a_n x^n R(x) + R^2(x) = (Q(x))^2 \Rightarrow$$

$$a_n = 1 \text{ та } R(x^2) = 2x^n R(x) + R^2(x).$$

Тоді ліворуч многочлен степеня $2r$, а праворуч $r + n > 2r$. Таким чином $R(x) = 0$ звідки й знаходимо три наведені відповіді.

8. Задача № 8 **()** середня ліга.