Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

1 тур

21 березня 2017 року

«Не надо инсценировать раздумья…».
Наталья Резник

м. Чернігів

8 клас

8–1. Бізнесмен має декілька синів та наймолодшу дочку. Він вирішив на Новий рік подарувати їм разом 1000000 доларів. Розподілив він цю суму таким чином: спочатку старшому синові він виписав чек на деяку ненульову суму a_1, а потім ще на $\frac{1}{11}$ суми, що лишилася (тобто від $1000000 - a_1$). Далі, другому синові він виписав чек на деяку суму a_2, а потім ще на $\frac{1}{10}$ суми, що лишилася, третьому – відповідно на суму a_3, а потім ще на $\frac{1}{9}$ суми, що лишилася, і так далі. Решту суми він віддав дочці. Виявилось, що усі діти отримали у подарунок однакову суму грошей. Яку найбільшу кількість синів може мати бізнесмен, та яку початкову суму a_1 у цьому випадку міг отримати старший син?

<u>Відповідь</u>: 9 синів, при цьому $a_1 = 10000$.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо для спрощення перетворень $S = 1000000$. Тоді старший син отримає суму $x_1 = a_1 + \frac{1}{11}(S - a_1) = \frac{1}{11}S + \frac{10}{11}a_1$. Оскільки усі діти отримали однакову суму, то з нерівності $11x_1 = S + 10a_1 > S$ випливає, що дітей в нього могло бути не більше 10. Покажемо, що насправді він міг мати 9 синів та дочку.

Для цього достатньо, щоб $x_1 = \frac{1}{11}S + \frac{10}{11}a_1 = \frac{1}{10}S \Rightarrow S = 100a_1 \Rightarrow a_1 = 10000$.

Неважко переконатись, що усі умови виконуються.

Наприклад, розглянемо k-го сина. Після видачі суми попередньому синові залишилася така сума: $S_k = S - \frac{k-1}{10}S = \frac{11-k}{10}S$. Тоді він отримає таку суму:

$$x_k = a_k + \frac{1}{12-k}(S_k - a_k) = \frac{1}{12-k}\cdot\frac{11-k}{10}S + \frac{11-k}{12-k}a_k.$$

$$x_k = \frac{1}{10}S \Leftrightarrow \frac{11-k}{12-k}a_k = \frac{1}{10}S - \frac{1}{12-k}\cdot\frac{11-k}{10}S = \frac{(12-k)-(11-k)}{10(12-k)}S = \frac{1}{10(12-k)}S \Rightarrow a_k = \frac{S}{10(11-k)} > 0.$$

8–2. На дошці намальовано n комірок, що перенумеровані зліва направо числами $1, 2, \ldots, n$. У кожній комірці записано знак «$+$». Андрійко має зробити n ходів. Першим ходом він міняє знак на протилежний у одній довільній комірці на свій вибір. Другим ходом -- у двох довільних сусідніх комірках, далі -- у трьох сусідніх, і так далі. Передостаннім ходом він міняє знак у $(n-1)$-ній комірці, що стоять поспіль, і останнім ходом змінює знак в усіх n комірках. Чи зможе Андрійко наприкінці отримати в усіх комірках знак « $-$ », якщо

а) $n = 2017$;   ***б)*** $n = 2018$?

(Богдан Рубльов)

<u>Відповідь</u>: ***а)*** так, ***б)*** ні.

<u>Розв'язання</u>. Дивись розв'язання **задачі 9-2**.

8–3. Знайдіть усі пари натуральних чисел a, b, для яких справджується рівність:

$$[a, b + 2017] = [b, a + 2017].$$

Тут через $[x, y]$ позначене найменше спільне кратне чисел x, y.

(Богдан Рубльов)

<u>Відповідь</u>: $(n; n)$, де n - довільне натуральне число.

Розв'язання. Очевидно, що пари однакових чисел умову задовольняють. Покажемо, що інших розв'язків немає. Без обмеження загальності вважатимемо, що $a > b$. Через $(x;\, y)$ будемо позначати найбільший спільний дільник натуральних чисел $x;\, y$.

За допомогою відомої рівності $(x;\, y)\cdot[x,\, y] = xy$, що справджується для довільних натуральних чисел $x;\, y$, перепишемо задану рівність таким чином:

$$[a,\, b+2017] = \frac{a(b+2017)}{(a,\, b+2017)} = [b,\, a+2017] = \frac{b(a+2017)}{(b,\, a+2017)}. \qquad \textbf{(1)}$$

Оскільки $ab + 2017a > ab + 2017b$, то $(a,\, b+2017) > (b,\, a+2017) \geq 1$. Таким чином, існує просте число p, для якого $a \,\vdots\, p$ та $b+2017 \,\vdots\, p$. Але тоді, із заданої умови рівності двох найменших спільних кратних, випливає, що оскільки $[a,\, b+2017] \,\vdots\, p$, то $[b,\, a+2017] \,\vdots\, p$. Оскільки p – просте число, то має справджуватись, що $b \,\vdots\, p$ або $a+2017 \,\vdots\, p$.

У першому випадку, з умов $b \,\vdots\, p$ та $b+2017 \,\vdots\, p$ випливає, що $2017 \,\vdots\, p \Rightarrow p = 2017$.

Аналогічно, у другому випадку з умов $a+2017 \,\vdots\, p$ та $a \,\vdots\, p$ випливає, що $2017 \,\vdots\, p \Rightarrow p = 2017$.

Таким чином, маємо, що $a \,\vdots\, 2017$ та $b+2017 \,\vdots\, 2017$. Тоді, $b \,\vdots\, 2017$. Позначимо $a = 2017x$, $b = 2017y$.

Тоді рівність (1) можна переписати таким чином:

$$\frac{2017x(2017y+2017)}{(2017x,\, 2017y+2017)} = \frac{2017y(2017x+2017)}{(2017y,\, 2017x+2017)} \Rightarrow \frac{2017^2 x(y+1)}{2017(x,\, y+1)} = \frac{2017^2 y(x+1)}{2017(y,\, x+1)} \Rightarrow \frac{x(y+1)}{(x,\, y+1)} = \frac{y(x+1)}{(y,\, x+1)}.$$

З припущення $a > b \Rightarrow x > y \Rightarrow xy + x > xy + y$. Тому з останньої рівності випливає, що $(x,\, y+1) > (y,\, x+1) \geq 1$. Позначимо через q -- простий дільник числа $(x,\, y+1)$. Тоді одночасно маємо такі подільності: $x \,\vdots\, q$ та $y+1 \,\vdots\, q$. Але тоді $y \,\vdots\, q$ або $x+1 \,\vdots\, q$.

У першому випадку з умов $y \,\vdots\, q$ та $y+1 \,\vdots\, q$ випливає, що $q = 1$ – суперечність.

Аналогічно у другому випадку: $x+1 \,\vdots\, q$ та $x \,\vdots\, q$ випливає, що $q = 1$ – суперечність

Таким чином, припущення $a > b$ призводить до суперечності.

8–4. Всередині прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB взято точку K таку, що $\angle AKC = 90°$ та $\angle CKB = 2\angle CAB$. На відрізку KB знайшлась така точка T, що $\angle KTC = \angle CAK$. Пряма AK перетинає відрізок BC у точці P. Доведіть, що $\angle TPA = \angle ABC$.

(Данило Хілько)

Розв'язання. Нехай M – середина гіпотенузи AB, а точка D – така, що K є серединою відрізка AD. Помітимо, що в ΔACD відрізок CK є висотою та медіаною, а тому цей трикутник -- рівнобедрений. Звідси (рис. 1),

$$\angle CTK = \angle CAK = \angle CDK$$

і чотирикутник $KTDC$ вписаний. Тоді

$$\angle DTB = \angle DCK = \angle KCA = \angle APC = \angle DPB,$$

тобто $DPTB$ також є вписаним. Отже, $\angle TPA = \angle TBD$ і достатньо довести, що $\angle ABC = \angle TBD$. Як відомо, $\angle CMB = 2\angle CAB$. Тоді, оскільки $\angle CKB = 2\angle CAB$, чотирикутник $CKMB$ є вписаним. Позначимо $\angle ABC = \beta$. Тоді $\angle CKM = 180° - \beta$, а тому

$$\angle AKM = 360° - 90° - (180° - \beta) = 90° + \beta.$$

Відрізок KM є середньою лінією ΔADB, отже $90° + \beta = \angle AKM = \angle ADB$. Також

$$\angle DKB = \angle CKB - 90° = 2\cdot(90° - \beta) - 90° = 90° - 2\beta.$$

Насамкінець, з ΔKDB знаходимо

$$\angle KBD = 180° - \angle ADB - \angle DKB = 180° - (90° + \beta) - (90° - 2\beta) = \beta,$$

що і треба було довести.

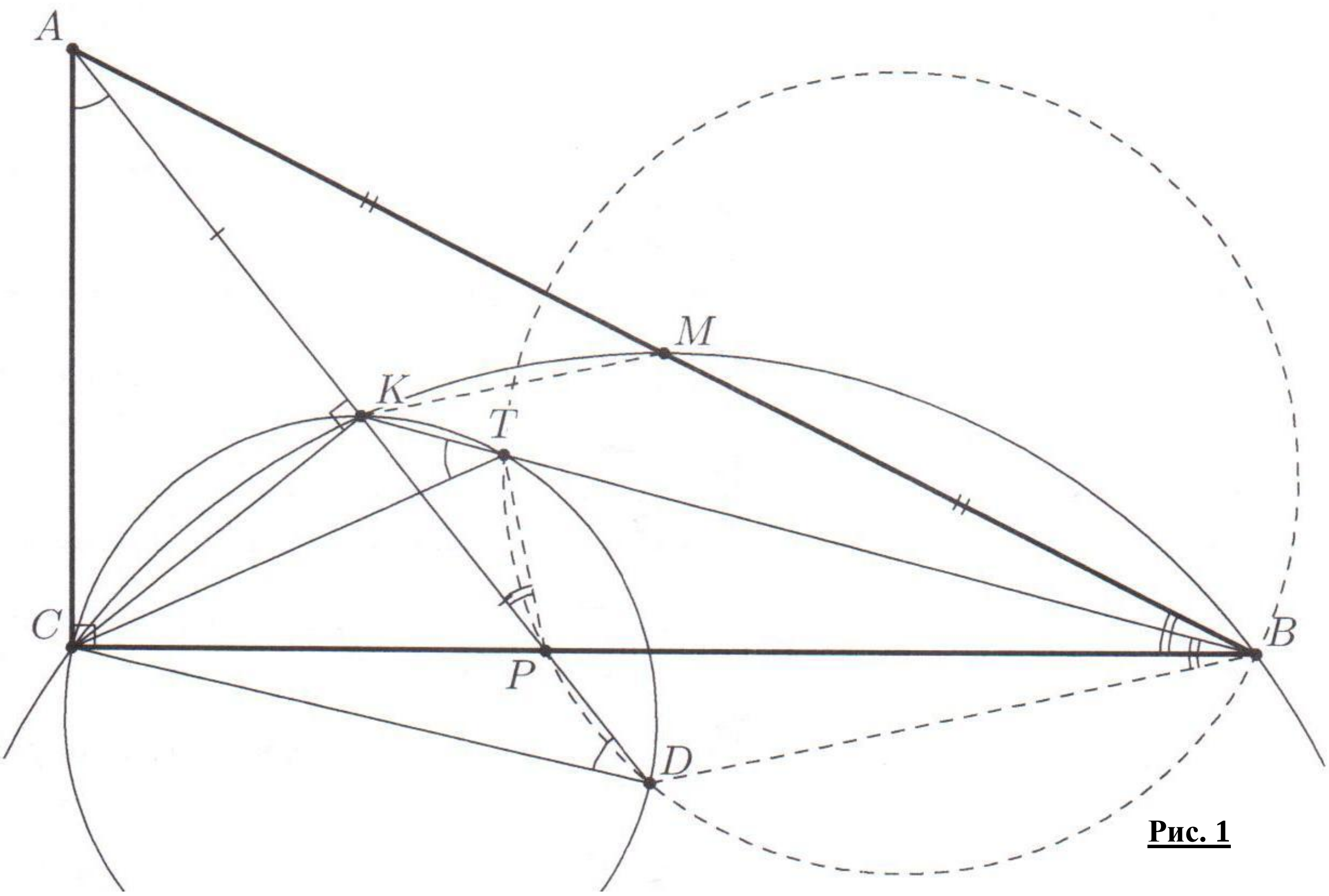

Рис. 1

9 клас

9–1. Додатні числа a, b задовольняють умову: $ab = 1$. Доведіть, що справджується нерівність: $\frac{3a+1}{b+1} + \frac{3b+1}{a+1} \ge 4$. Для яких пар (a, b) можлива рівність?

(Митрофанов Вадим)

***Відповідь*:** рівність можлива для $a = 1, b = 1$.

Розв'язання. Домножимо ліву та праву частини нерівності на $(a+1)(b+1)$, а далі зробимо рівносильні перетворення:

$$(3a+1)(a+1) + (3b+1)(b+1) \ge 4(a+1)(b+1) \Leftrightarrow$$

$$3a^2 + 4a + 1 + 3b^2 + 4b + 1 \ge 4ab + 4a + 4b + 4 \Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 \ge 6$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \ge 2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0.$$

9–2. На дошці намальовано n комірок, що перенумеровані зліва направо числами $1, 2, ..., n$. У кожній комірці записано знак «+». Андрійко має зробити n ходів. Першим ходом він міняє знак на протилежний у одній довільній комірці на свій вибір. Другим ходом -- у двох довільних сусідніх комірках, далі -- у трьох сусідніх, і так далі. Передостаннім ходом він міняє знак у $(n-1)$-ній комірці, що стоять поспіль, і останнім ходом змінює знак в усіх n комірках. При яких n Андрійко зможе по завершенні процесу отримати в усіх комірках знак « – »?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: при $n=4k$ та $n=4k+1$.

Розв'язання. Розглянемо, які остачі може давати n при діленні на 4. Якщо $n=4k$, то Андрійко може отримати в усіх комірках « $-$ » за допомогою такої послідовності ходів (очевидно, що порядок ходів не грає ролі). Спочатку поміняємо знак в усіх комірках. Тепер останню (n-ту) комірку більше не чіпаємо – вона залишиться із знаком « $-$ ». А в усіх інших $(n-1)$-й комірках будемо міняти знаки такими парами ходів: $(n-1)+0$, $(n-2)+1$, $(n-3)+2$, …, $\frac{n}{2}+(\frac{n}{2}-1)$ (рис. 2). Тоді наприкінці у кожній комірці, окрім n-ї, знак буде змінено рівно $1+\frac{n}{2}=2k+1$ разів, тобто непарну кількість. Тому і знак зміниться на протилежний.

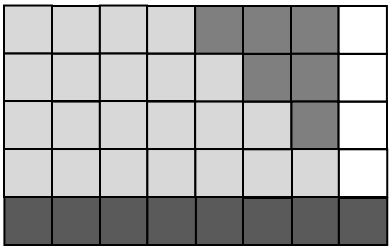

Рис. 2

Для випадку $n=4k+1$ знову покажемо послідовність ходів, за допомогою якої досягається потрібна зміна знаків. Спочатку міняємо знак в усіх комірках, а далі міняємо знаки такими парами ходів в усіх n комірках: $(n-1)+1$, $(n-2)+2$, $(n-3)+3$, …, $\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}$ (рис. 3). Неважко підрахувати, що знак у кожній комірці буде змінено рівно $\frac{n-1}{2}+1=2k+1$ раз, тобто в усіх комірках знак зміниться на « $-$ ».

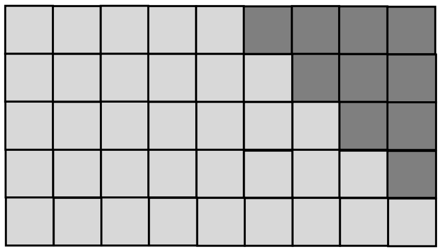

Рис. 3

Для всіх інших n покажемо неможливість досягнення зміни знаків у кожній комірці.

Для випадку $n=4k+2$ маємо парну кількість комірок, тому для досягнення бажаного сумарна кількість змін знаків повинна бути парною (парна кількість непарних доданків), але сумарно ми маємо змінити знак

$$1+2+3+\ldots+(4k+2)=\underbrace{(1+2)+(3+4)+\ldots+((4k+1)+(4k+2))}_{2k+1}$$

тобто непарну кількість разів. Отримали суперечність.

Зрозуміло, що наведену суму можна знайти безпосередньо:

$$1+2+3+\ldots+(4k+2)=\tfrac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3).$$

Аналогічно для випадку $n=4k+3$ маємо непарну кількість комірок, тому сумарна кількість змін знаків повинна бути непарною (непарна кількість непарних доданків), але сумарно ми маємо змінити знак

$$1+2+3+\ldots+(4k+2)=\underbrace{(1+2)+(3+4)+\ldots+((4k+1)+(4k+2))}_{2k+1}+(4k+3)$$

тобто парну кількість разів. Знову отримали суперечність.

9–3. Для якого найбільшого натурального $n\geq 3$ існує

а) опуклий n-кутник,

б) довільний n-кутник,

кути якого задовольняють такі умови:

- вони вимірюються цілим числом градусів;
- відношення будь-яких двох кутів (більшого до меншого) є натуральним числом більшим за одиницю?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: ***а)*** $n=3$, ***б)*** $n=5$.

Розв'язання. Упорядкуємо градусні міри кутів за зростанням: $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$. Усі ці числа цілі. Крім того, позначимо через $m_k=\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$, $k=\overline{1,n-1}$. За умовою числа $m_k\geq 2$ цілі. Тоді має справджуватись така рівність:

$$S=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\alpha_1+\alpha_1 m_2+\alpha_1 m_2 m_3+\ldots+\alpha_1 m_2 m_3 \ldots m_n=180(n-2).$$

Для довільного багатокутника має справджуватись нерівність $\alpha_n \le 359$, а для опуклого $\alpha_n \le 179$. Тоді можемо записати такий ланцюг оцінок:

$$180(n-2)=S=\alpha_n+\alpha_{n-1}+\ldots+\alpha_1 \le \alpha_n+\tfrac{1}{2}\alpha_n+\ldots+\tfrac{1}{2^{n-1}}\alpha_n=\tfrac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1}{2^{n-1}}\alpha_n<2\alpha_n.$$

Звідси, для довільного багатокутника маємо, що $180(n-2)\le 718$ або $n \le 5$. Для опуклого багатокутника маємо, що $180(n-2)\le 358$ або $n\le 3$. Залишається навести відповідні приклади п'ятикутника та трикутника, що задовольняють умові. Покажемо, як ці приклади можна побудувати:

а) $\alpha_1+\alpha_1 m_2+\alpha_1 m_2 m_3=180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$.

Покладемо $\alpha_1=1$. Маємо, що $m_2+m_2 m_3=179$ – просте число, а тому розв'язку в натуральних числах, більших за 1, не існує.

Покладемо $\alpha_1=2$. Маємо, що $m_2+m_2 m_3=89$ – просте число, а тому розв'язку в натуральних числах, більших за 1, не існує.

Покладемо $\alpha_1=3$. Маємо, що $m_2+m_2 m_3=59$ – просте число, а тому розв'язку в натуральних числах, більших за 1, не існує.

Покладемо $\alpha_1=4$. Маємо, що $m_2+m_2 m_3=44=2\cdot 2\cdot 11$.

Якщо $m_2=2$, то $1+m_3=22$, звідки $m_3=21$.

Таким чином, маємо такий розв'язок: $\alpha_1=4$, $\alpha_2=8$, $\alpha_3=168$.

б) $\alpha_1+\alpha_1 m_2+\alpha_1 m_2 m_3+\alpha_1 m_2 m_3 m_4+\alpha_1 m_2 m_3 m_4 m_5=180\cdot 3=2^2\cdot 3^3\cdot 5$.

Покладемо $\alpha_1=1$. Маємо, що

$m_2+m_2 m_3+m_2 m_3 m_4+m_2 m_3 m_4 m_5=2^2\cdot 3^3\cdot 5-1=539=7\cdot 7\cdot 11$.

Якщо $m_2=7$, то $1+m_3+m_3 m_4+m_3 m_4 m_5=77$. Тобто $m_3+m_3 m_4+m_3 m_4 m_5=76=2\cdot 2\cdot 19$.

Якщо $m_3=2$, то $1+m_4+m_4 m_5=38$ або $m_4+m_4 m_5=37$ – просте число, а тому розв'язку в натуральних числах, більших за 1, не існує.

Якщо $m_3=4$, то $1+m_4+m_4 m_5=19$ або $m_4+m_4 m_5=18=2\cdot 3\cdot 3$.

Якщо $m_4=2$, то $1+m_5=9$ та $m_5=8$.

Перевіримо цей розв'язок: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=7$, $\alpha_3=28$, $\alpha_4=56$ та $\alpha_5=448$ – але тоді останній кут більший за $360°$, і цей випадок неможливий.

Якщо $m_4=3$, то $1+m_5=6$ та $m_5=5$.

Перевіримо цей розв'язок: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=7$, $\alpha_3=28$, $\alpha_4=84$ та $\alpha_5=420$ – але тоді останній кут більший за $360°$, і цей випадок неможливий.

Якщо $m_4=6$, то $1+m_5=3$ та $m_5=2$.

Перевіримо цей розв'язок: $\alpha_1=1$, $\alpha_2=7$, $\alpha_3=28$, $\alpha_4=168$ та $\alpha_5=336$. Очевидно, існує п'ятикутник з такими кутами.

Аналогічно можна знайти, наприклад, такі розв'язки:
$\alpha_1=1$, $\alpha_2=11$, $\alpha_3=33$, $\alpha_4=165$ та $\alpha_5=330$; $\alpha_1=4$, $\alpha_2=8$, $\alpha_3=24$, $\alpha_4=168$ та $\alpha_5=336$; $\alpha_1=12$, $\alpha_2=24$, $\alpha_3=72$, $\alpha_4=144$ та $\alpha_5=288$.

9–4. Відрізок AB – діаметр кола w, CD – деяка хорда цього кола, що перпендикулярна AB. Точка O – центр кола w. Через точку E – середину відрізка CO – проведено пряму AE, яка вдруге перетинає коло w у точці F. Відрізок BC перетинає відрізок AF у точці M, а відрізок DF – у точці L. Описане коло ΔDLM вдруге перетинає коло w у точці K. Доведіть, що $KM=MB$.

(С. Жидков, Д. Хілько)

Розв'язання. Оскільки точки C та D симетричні відносно прямої AB, то

$$\angle(EF,\,FL)=\angle(AF,\,FD)=\angle(AB,\,BD)=\angle(CB,\,BA)=\angle(CB,\,BO)=\angle(EC,\,CL),$$

звідки чотири точки $E,\,C,\,F,\,L$ лежать на одному колі (рис. 4). Звідси отримуємо

$$\angle(EL,\,LC)=\angle(EF,\,FC)=\angle(AF,\,FC)=\angle(AB,\,BC)=\angle(AB,\,LC),$$

тому $EL\,||\,OB$. Таким чином, відрізок EL – середня лінія трикутника OCB, а тому L – середина BC.

Нехай пряма KM вдруге перетинає коло w у точці F_1. З того, що чотири точки $K,\,M,L,\,D$ лежать на одному колі, маємо

$$\angle(DL,\,BC)=\angle(DL,\,LM)=\angle(DK,\,KM)=\angle(DK,\,KF_1)=\angle(DF,\,FF_1)=\angle(DL,\,FF_1),$$

звідки $BC\,||\,FF_1$.

Зазначимо тоді, що OL – серединний перпендикуляр відрізків BC і FF_1.

Очевидно, що $AB=2AO$. Тоді з теореми Менелая для ΔOBC та прямої AE:

$$\frac{OA}{AB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CE}{EO}=1.$$

Отже $MB=2CM$. Розглянемо точку N – середину відрізку MB. Тоді $CM=MN=NB$. Очевидно, що $\angle MFB=90^\circ$. Тоді $MN=NB=NF$, а також $ML=LN$. Тоді точки M та N, а також F та F_1 симетричні відносно OL. Отже відрізки FN та MF_1 також симетричні, а тому й рівні. Таким чином, маємо, що $CM=MF_1$. Залишається помітити, що $\angle BMF_1=\angle KMC$ та $\angle MF_1B=\angle KCM$, звідки $\Delta BMF_1=\Delta KMC$, отже $BM=KM$.

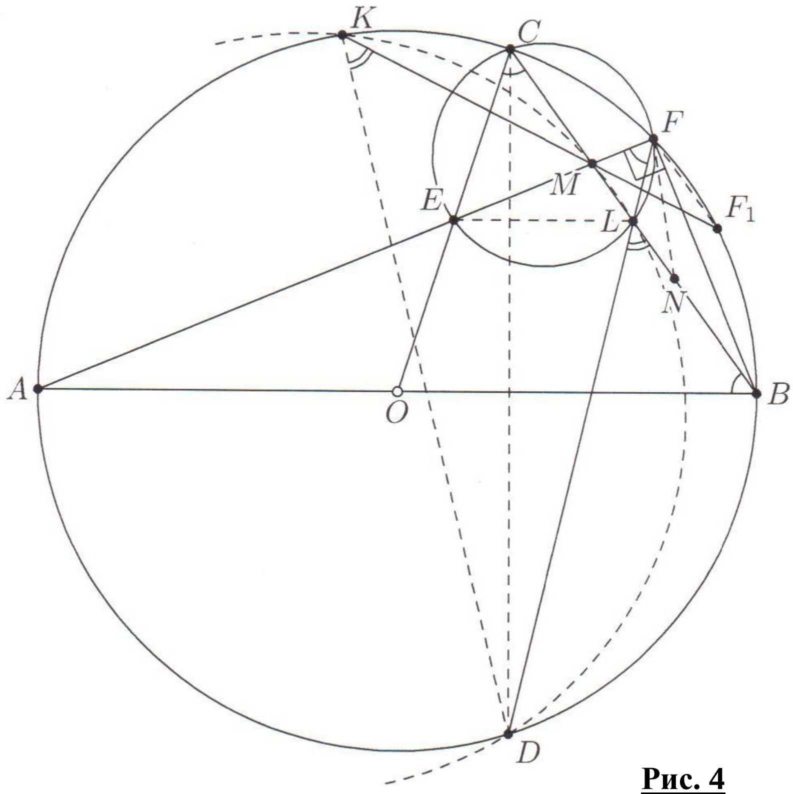

Рис. 4

10 клас

10–1. Чи існують такі 8 попарно різних цілих чисел $a,b,c,d,e,\,f,\,g,h$, для яких коренями рівнянь $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$, $x^2+ex+f=0$ та $x^2+gx+h=0$ є числа $a,b,c,d,e,\,f,\,g,\,h$ у деякому порядку?

Відповідь: не існують.

Розв'язання. Якщо перемножити ці многочлени, то матимемо многочлен

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)(x^2+gx+h)=x^8+u_7x^7+\ldots+u_1x+u_0=$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g)(x-h).$$

Неважко зрозуміти, що з одного боку $u_0=bdfh$, а з іншого – $u_0=abcdefgh$. Якщо серед чисел $b,\,d,\,f,\,h$ немає нульових, тоді $aceg=1$, що неможливо для попарно різних цілих чисел.

Якщо, наприклад, $b=0$, то перше рівняння набуває вигляду $x^2+ax=0$, яке має корені 0 та $(-a)$. Тоді рівність многочленів набуває такого вигляду:

$$x(x+a)(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)(x^2+gx+h)=x^8+u_7x^7+\ldots+u_1x=$$
$$=x(x-a)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)\ \Rightarrow$$
$$(x+a)(x^2+cx+d)(x^2+ex+f)(x^2+gx+h)=x^7+u_7x^6+\ldots+u_1=$$
$$=(x-a)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)\ \Rightarrow$$
$$u_1=adfh=-acdefgh\ \Rightarrow\ ceg=-1,$$

що неможливо для попарно різних цілих чисел.

10–2. Дана дошка 8×8. *Справжньою* діагоналлю цієї дошки будемо називати таку діагональ, що містить принаймні три клітинки. Андрій та Олеся грають на цій дошці у гру. Вони по черзі (починає Андрій) виставляють на дошку однакові фішки. Ставити дві фішки в одну клітинку забороняється. Якщо після чергового ходу виявляється, що у кожній горизонталі та вертикалі стоїть принаймні одна фішка, то перемагає Олеся. Якщо ж після чергового ходу у кожній зі справжніх діагоналей опиняється принаймні одна фішка, то перемагає Андрій. У разі, коли після деякого ходу одночасно настає перемога Андрія та Олесі, оголошується нічия. Чи може хтось з гравців забезпечити собі перемогу, якщо кожен прагне перемогти?

(Богдан Рубльов)

***Відповідь*:** Олеся.

Розв'язання. Використаємо для зручності шахову нумерацію клітин дошки. Розглянемо «відмічені» діагоналі, тобто такі, що відмічені прямими (рис. 5): $a6-c8$, $a5-d8$, $a4-d1$, $a3-c1$, $e1-h4$, $f1-h3$, $e8-h5$ та $f8-h6$. Вони не мають спільних клітин, тому Андрієві для перемоги потрібно, щоб на кожній з них стояло принаймні по одній фішці. Таким чином, якщо Олеся не буде ставити фішки в ці діагоналі, Андрієві для перемоги знадобиться принаймні 8 тільки своїх ходів. Олеся буде ходити у «чорні» клітини, тобто такі, що відмічені чорними квадратиками: $a8$, $b5$, $c6$, $d7$, $e2$, $f3$, $g4$ і $h1$.

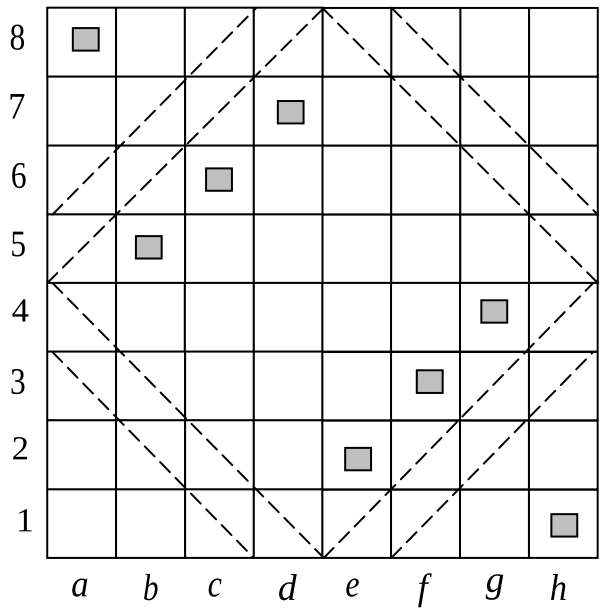

Рис. 5

Якщо Андрій свій перший хід робить не в одну з клітин відмічених діагоналей, то далі Олеся, не зважаючи на ходи Андрія, робить ходи у чорні клітини і перемагає. В іншому випадку, без обмеження загальності, будемо вважати, що Андрій своїм першим ходом поставив фішку у квадрат $a-d-5-8$. Тоді на хід Андрія в поле з номером k, $1\le k\le 6$, Олеся робить хід в друге поле з таким самим номером (рис. 6). Після виставлення перших двох фішок виявляється, що Андрію, щоб перемогти, треба виставити ще принаймні 7 фішок, а Олесі – тільки 6. Тобто вона завжди зможе перемогти.

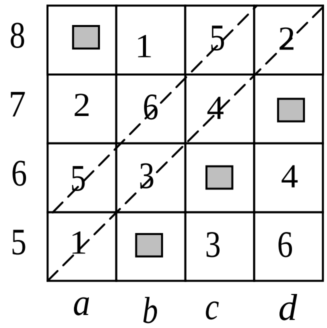

Рис. 6

10–3. У гострокутному трикутнику ABC виконано: $\angle ACB=45°$, M – точка перетину медіан, O – центр описаного кола. Відомо, що $OM=1$ та $OM\parallel BC$. Знайдіть довжину сторони BC.

(Максим Чорний)

Відповідь. 12.

Розв'язання. З властивостей прямої Ейлера випливає, що $OH = 3$ і $OH \parallel BC$, де H – ортоцентр ΔABC. Надалі точка M використовуватися не буде (рис. 7).

Нехай AA_1, BB_1 – висоти ΔABC, B_2 – середина сторони BC. Оскільки $\angle C = 45^\circ$, то $BB_1 = B_1C$ і $AA_1 = A_1C$. Тому точки B_1, O, B_2 лежать на серединному перпендикулярі до відрізка BC, звідки $B_1B_2 \perp BC$, тобто $B_1B_2 \parallel HA_1$. Аналогічно доводимо, що $A_1O \parallel BB_1$. Оскільки $OH \parallel BC$, то сторони ΔHA_1O паралельні сторонам ΔB_2B_1B, отже нескладно переконатись, що ΔHA_1O є серединним для ΔB_2B_1B. Звідси

$$BC = 2BB_2 = 4OH = 12.$$

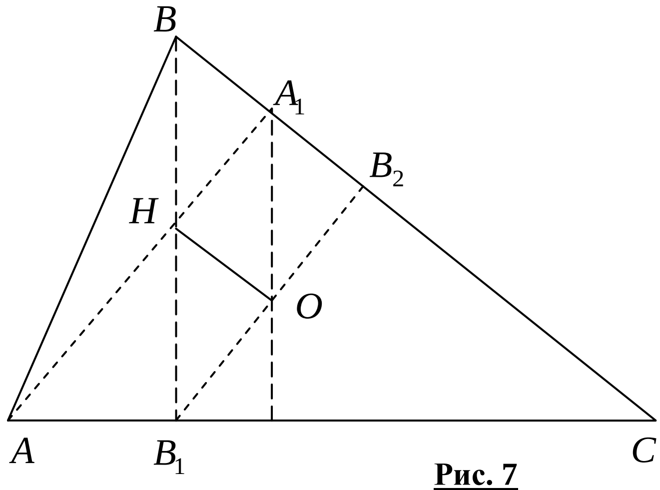

Рис. 7

10–4. Нехай d – натуральний дільник натурального числа m, (a_i) та (b_i) -- дві арифметичні прогресії з натуральними членами. Відомо, що існують такі індекси i та j, для яких $(a_i, b_j) = 1$, а також такі індекси k та l, для яких $(a_k, b_l) = m$. Доведіть, що можна підібрати такі індекси t та s, для яких $(a_t, b_s) = d$.

Тут через (x, y) *позначений найбільший спільний дільник чисел* x, y.

(Олександр Голованов)

Розв'язання. Нехай u та v – різниці прогресій (a_i) та (b_i): $a_i = a_0 + ui$, $b_i = b_0 + vi$. З умови випливає, що $(u, v, m) = 1$. Дійсно, якщо $(u, m) \vdots p > 1$, то усі члени прогресії (a_i) кратні p, оскільки $a_k = a_0 + ku \vdots m \vdots p$, тому й $a_0 \vdots p$. З аналогічних міркувань, якщо p ділить одночасно v та m, то на p діляться усі члени прогресії (b_i), але тоді не існує пари взаємно простих членів a_i, b_j. Для доведення твердження нам достатньо показати, що якщо $(a_i, b_j) = m$ для деяких i, j, то для довільного простого дільника p числа m можна підібрати такі α, β, що $(a_\alpha, b_\beta) = \frac{m}{p}$. Дійсно, якщо почати послідовно ділити число m на його прості дільники, ми зможемо отримати будь-який його дільник d.

Нехай $(a_k, b_l) = m$. Принаймні одне з чисел $\frac{a_k}{p}$ чи $\frac{b_l}{p}$ не кратне m, бо інакше $(a_k, b_l) \vdots mp > m$. Без обмеження загальності, нехай це $\frac{a_k}{p}$. Розглянемо два випадки: коли v не ділиться на p та коли v ділиться на p.

Випадок 1. Нехай v не ділиться на p. В якості шуканих членів прогресії з НСД $\frac{m}{p}$ підійде a_k та $b_{l+\frac{a_k}{p}} = b_l + \frac{a_k v}{p}$. Те, що вони обидва кратні $\frac{m}{p}$, очевидно. Якщо деякий степінь q^s простого числа $q \neq p$ ділить обидва цих числа, то він ділить також $\frac{a_k v}{p}$ і, тому, b_l, а тому й $\frac{m}{p}$. Що стосується дільника p, він входить у a_k та b_l в не меншому степені, ніж у m, а в $\frac{a_k v}{p}$ – у меншому, тому максимальний степінь p, на який ділиться $(a_k, b_l + \frac{a_k v}{p})$ такий самий, як в числі $\frac{a_k v}{p}$ або, що те ж саме, в $\frac{m}{p}$.

Випадок 2. Коли v ділиться на p, на p не ділиться u. Оскільки $b_l \vdots m$, то його можна розділити на деякий степінь p^n числа p так, щоб ціле число $\frac{b_l}{p^n}$ ділилося на $\frac{m}{p}$, але не на m. Тоді НСД чисел $a_{k+\frac{b_l}{p^n}} = a_k + \dfrac{b_l u}{p^n}$ та b_l дорівнює $\frac{m}{p}$. Дійсно, як і в першому випадку, обидва цих числа кратні $\frac{m}{p}$. При цьому, будь-який степінь q^s простого числа $q \neq p$, що ділить обидва цих числа, має ділити й a_k, тому й $\frac{m}{p}$, а число p входить в НСД цих чисел в найменшому з трьох степенів, в яких воно є в числах a_k, b_l та $\frac{b_l u}{p^n}$, тобто у тому самому степені, що й в $\frac{m}{p}$.

11 клас

11–1. Задано додатні дійсні числа a, b, c. Яке найбільше значення може приймати вираз

$$| ax + by - cz | + | ax - by + cz | + | -ax + by + cz |,$$

якщо $x, y, z \in [0; 1]$.

<u>Відповідь</u>: $3 \cdot \max\{a, b, c\}$.

<u>Розв'язання</u>. Позначимо $A = ax$, $B = by$ та $C = cz$. Тоді заданий вираз матиме такий вигляд:

$$S = | A + B - C | + | A - B + C | + | -A + B + C |.$$

Розглянемо деякі $x, y, z \in [0; 1]$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $C \le B \le A$. Тоді

$$S = (A + B - C) + (A - B + C) + | -A + B + C | = 2A + | -A + B + C |.$$

Далі можливі два випадки.

Випадок 1. Якщо $A \ge B + C$, тоді

$$S = 2A - (-A + B + C) = 3A - B - C.$$

Щоб значення виразу було найбільшим треба, щоб A будо найбільшим можливим, а B, C -- найменшими. Це досягається при $x = 1,\ y = z = 0$. Тоді $S = 3a$.

Випадок 2. Якщо $A < B + C$, тоді

$$S = 2A + (-A + B + C) = A + B + C.$$

Очевидно, що найбільше значення цього виразу при $x = y = z = 1$, при тому, що $a < b + c$.

Оскільки $A + B + C \le 3A$, то шукане найбільше значення – це $3 \cdot \max\{a, b, c\}$.

11–2. В країні є n міст, причому між кожними двома з них є пряме транспортне сполучення. Вартості переїзду між парами міст складають $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{1}{2}n(n-1)$, тобто є попарно різними для кожної пари міст. Маршрутом називається такий шлях, що починається в деякому місті, проходить рівно по одному разу через кожне інше місто країни та повертається в початкове місто. Олеся здійснює свій маршрут за таким правилом: з кожного міста вона вирушає у те місто, у якому ще не бувала раніше (якщо таких вже немає, то вона повертається у своє початкове місто), але вибирає з них таке, вартість проїзду до якого найменша. Андрій навпаки – з кожного міста вирушає у те місто, вартість проїзду до якого найбільша з можливих. Чи могло так статися, що їх маршрути коштували однаково? Починати свої маршрути вони можуть як з одного, так і з різних міст.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: так.
Розв'язання. Позначимо міста A_1, A_2, …, A_n. Нехай вартості проїзду між містами впорядковані таким чином:

$$A_1A_2 < A_1A_3 < \ldots < A_1A_{n-1} < A_2A_3 < A_2A_4 < \ldots < A_2A_n <$$
$$< A_3A_4 < A_3A_5 < \ldots < A_3A_n < A_4A_5 < A_4A_6 < \ldots < A_4A_n < \ldots <$$
$$< A_{n-2}A_{n-1} < A_{n-2}A_n < A_{n-1}A_n < A_1A_n .$$

Розглянемо маршрути Олесі та Андрія, якщо вони обидва розпочинають свій шлях з міста A_1.
Олеся: $A_1 \to A_2 \to A_3 \to \ldots \to A_{n-1} \to A_n \to A_1$.
Андрій: $A_1 \to A_n \to A_{n-1} \to A_{n-2} \to \ldots \to A_3 \to A_2 \to A_1$.
Як бачимо, вони проходять по однакових відрізках, а тому і вартість маршрутів однакова.

11–3. Задача 10–4.

11–4. Жив якось на площині Трикутник Боб, у якого ортоцентр належав вписаному колу. Одного дня розбишака Богдан похазяйнував на тій площині. Після цього на ній лишились намальованими лише вписане коло Трикутника Боба, пряма, що містить одну із його сторін, та його ортоцентр. Допитливий Максим хоче за цими даними відновити Трикутник циркулем та лінійкою. Допоможіть йому це зробити.
Дослідження можливості побудови робити не потрібно.

(Б. Ківва, М. Чаудхарі)

Розв'язання. *Аналіз*. Нехай I – інцентр, H – ортоцентр та O – центр описаного кола Трикутника Боба (рис. 8). Позначимо радіуси описаного та вписаного кіл R, r . Розглянемо ΔIOH . За умовою $IH = r$. Крім того, як відомо, $OI^2 = R^2 - 2Rr$ та медіана, проведена з вершини I до OH, дорівнює $\frac{1}{2}R - r$ (середина OH - центр кола Ейлера трикутника Боба, а це коло, як відомо, має радіус $\frac{1}{2}R$ та дотикається до вписаного). Тоді, застосувавши формулу для довжини медіани $IM^2 = \dfrac{1}{4}(2IH^2 + 2IO^2 - HO^2)$, знаходимо $OH^2 = R^2 - 2r^2$. Отже, степінь точки H відносно описаного кола Трикутника Боба дорівнює $R^2 - OH^2 = 2r^2$.

Побудова. Перейдемо до побудови. За умовою радіус вписаного кола відомий, та якщо побудувати точку H_1 - симетричну H відносно прямої, що містить сторону трикутника (нехай це буде AC), отримаємо точку перетину висоти та описаного кола Боба. Але маючи цю точку та знаючи степінь H відносно описаного кола, ми можемо побудувати відповідну цій висоті вершину. Дійсно, якщо B - відповідна вершина та H_1 точка перетину кола з висотою, то $BH \cdot HH_1 = R^2 - OH^2 = 2r^2$. Після цього проводимо з побудованої вершини B дотичні до вписаного кола та знаходимо дві невідомі вершини, як точки перетину цих дотичних із прямою AC з умови.

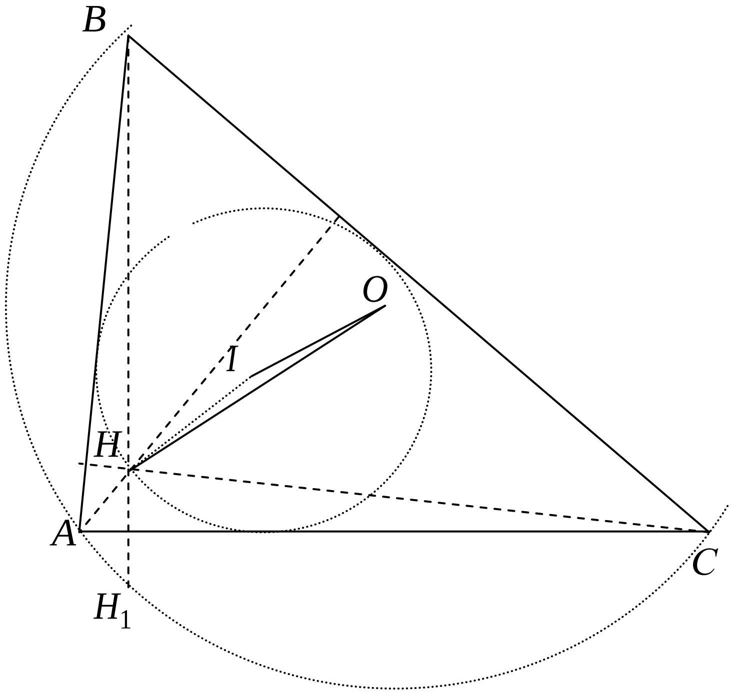

Рис. 8