Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

# III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

# LXXVIII Київська міська олімпіада юних математиків

***Умови та вказівки до розв'язань задач***

*Київ, 5 лютого 2023 року*

*«Нам усім дуже важко,*
*але вже ніколи не буде соромно».*
*Валерій Залужний*

# 7 клас

**1.** Прямокутник розрізаний на 6 квадратів, як це показане на рис. 1. Сірий квадрат всередині має сторону, що дорівнює 1. Чому дорівнює площа прямокутника?

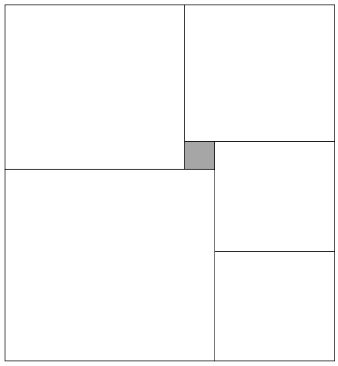


**Рис. 1**

***Відповідь:*** 143.

***Розв'язання*.** Позначимо сторону двох однакових квадратів через $a$, далі послідовно знаходимо сторони інших квадратів, використовуючи ці позначення (рис. 2). Таким чином $HI = IG = GF = FH = 1, ID = IJ = a \Rightarrow GB = GK = 2a - 1 \Rightarrow KF = FM = 2a - 2 \Rightarrow MH = HJ = 2a - 3$. Тепер запишемо двома варіантами довжину відрізка $HJ$:

$$HJ = 2a - 3 = HI + IJ = a + 1 \Rightarrow a = 4.$$

Залишається знайти сторони прямокутника:

$$AC = KF + HJ = 4a - 5 = 11,$$
$$AL = GB + FM = 4a - 3 = 13.$$

Таким чином шукана площа прямокутника дорівнює $13 \cdot 11 = 143$.

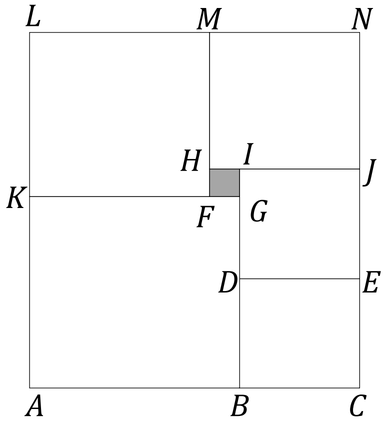



**Рис. 2**

**2.** Дано $n \geq 3$ попарно різних дійсних чисел. Доведіть, що серед них знайдеться або 3 числа з додатною сумою, або 2 числа з від'ємною сумою.

*(Михайло Штанденко)*

***Розв'язання*.** Якщо у заданому наборі немає жодного додатного числа, то там є не більше ніж одне число, що дорівнює нулю, а всі інші числа – від'ємні, значить є $n - 1$ від'ємне число. Тому в якості шуканого набору з 2-х чисел можна взяти довільні два числа. Інакше, тобто, якщо в цьому наборі є принаймні одне додатне число, відокремимо це число. Серед інших $n - 1$ числа, що залишилися, візьмемо довільні 2 числа. Якщо їхня сума від'ємна, то шуканий набір знайдений і задача розв'язана. Якщо вказана сума невід'ємна, то додамо до цих 2-х чисел з невід'ємною сумою відокремлене додатне число, тоді одержимо шукані 3 числа з додатною сумою.

**3.** Доведіть, що не існує натуральних чисел $n$ та $k$, які задовольняють рівності:

$$n^n + (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2} = 2023^k.$$

*(Михайло Штанденко)*

***Розв'язання*.** Розглянемо дану рівність за модулем 3. Права частина $2023^k = 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Серед трьох послідовних натуральних чисел $n, n+1, n+2$, одне ділиться на 3, одне дає остачу 1 при діленні на 3, і одне дає остачу 2. Якщо $x$ ділиться на 3, то $x^x$ теж ділиться, якщо $x$ дає остачу 1, то $x^x$ також дає остачу 1, а якщо $x$ дає остачу 2, то $x^x$ дає остачу 1 чи 2. Отже, $n^n + (n+1)^{n+1} + (n+2)^{n+2}$ дає остачу 2 чи 0 за модулем 3. Одержана суперечність завершує доведення.

**4.** Для натурального $n \geq 2$ розглянемо дошку $n \times n$. Позначимо $n^2$ точок, що є центрами кожного з квадратиків $1 \times 1$ цієї дошки. Яку найбільшу кількість з цих точок можна відмітити таким чином, щоб жодні три відмічені точки не були вершинами прямокутного трикутника?

*(Михайло Штанденко)*

***Відповідь:*** $2n - 2$.

***Розв'язання:*** Покажемо, що існує приклад, де відмічена така кількість точок, що задовольняє умови задачі. Для цього позначимо центри всіх клітинок першого рядка та першого стовпчика за виключенням центру клітинки на перетині першого рядку та першого стовпчику (рис. 3). Простим перебором легко переконатися, що жодні 3 точки з відмічених не є вершинами прямокутного трикутника.

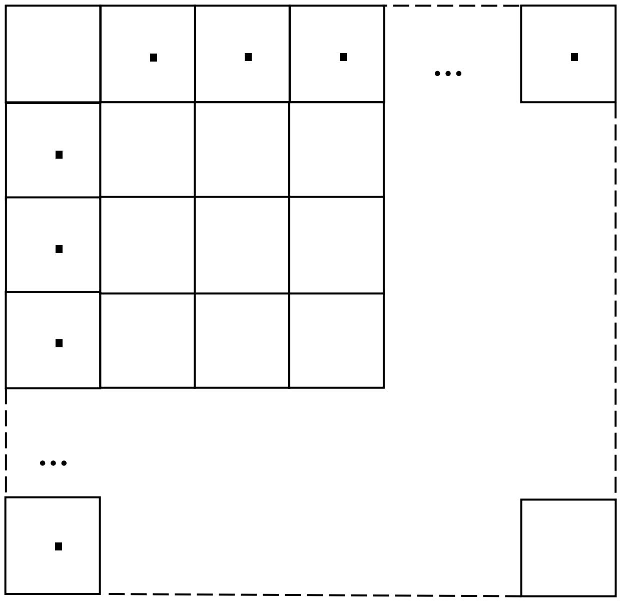


**Рис. 3**

Припустимо, що це не найбільше можливе значення для кількості точок., тобто, що можна відмітити $2n-1$ центр з позначених центрів таким чином, щоб жодні три з них не утворювали прямокутний трикутник. З цього випливає, що для кожної відміченої точки це єдина відмічена точка в рядку або в стовпчику з цією точкою.

Нехай в стовпчиках знаходиться $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ відмічених точок відповідно. Якщо для деякого $i$ маємо, що $a_i > 1$, то тоді для кожної з відмічених точок в $i$-му стовпчику ця точка є єдиною в своєму рядку, бо інакше утвориться прямокутник трикутник. Тому усього таких точок, для яких $a_i > 1$ є не більше ніж $n$ – сумарна кількість рядків. Але якщо таких точок рівно $n$, то всього відмічених точок також $n$, що не перевищує $2n-2$. В іншому випадку сума всіх $a_i$ що більші одиниці не перевищує $n-1$. З іншого боку, сума всіх $a_i$ що дорівнюють одиниці, також не більша $n$. Якщо їх рівно $n$, то знову усіх відмічених точок також $n$, що не перевищує $2n-2$. Таким чином сума всіх $a_i$ що дорівнюють одиниці не більше $n-1$. Таким чином обох типів відмічених точок не більше $n-1$, а тому разом їх не більше ніж $2n-2$. Таким чином більше цього значення їх бути не може.

**3.1.** Прості числа $p, q, r, s$ задовольняють умову: $5 < p < q < r < s < p+10$. Доведіть, що сума $p+q+r+s$ ділиться на $60$.

***Розв'язання.*** Простими числами мають бути чотири з п'яти таких чисел: $p$, $p+2$, $p+4$, $p+6$ та $p+8$. З трьох послідовних непарних чисел одне кратне 3, тому кратним 3 має бути $p+4$, бо інакше таких чисел тут виявиться 2. Тоді це число має ділитися також і на 5, бо інакше на 5 буде ділитися інше число і не зможе бути простим. Таким чином $p+4=15k \Rightarrow$
$p+q+r+s = p+(p+2)+(p+6)+(p+8) = 4p+16 = 4(15k-4)+16 = 60k,$
що й треба було довести.
Зауважимо що такі числа існують, наприклад, 11,13,17 та 19.

**4.1.** На колі задані $11$ точок. Петрик деяким чином їх занумерував числами $1, 2, \dots, 11$. Після цього були з'єднані відрізками такі пари точок: 1 та 2, 2 та 3, …, 10 та 11, 11 та 1. Яка найбільша можлива кількість точок перетинів цих відрізків могла утворитися? Самі задані $11$ точок в якості точок перетинів не рахуємо.

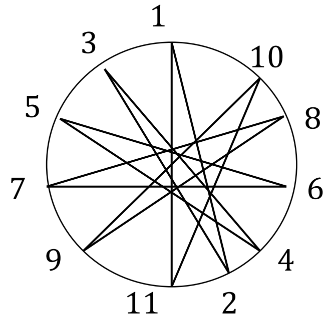



**Рис. 4**

***Відповідь:*** 44.
***Розв'язання.*** Розглянемо один з проведених відрізків. Він точно не може перетинатися сам з собою, а також з сусідніми з двох боків відрізків, наприклад, відрізок $3-4$ не перетинається з відрізками $2-3$, $3-4$ та $4-5$. Таким чином найбільша можливість точок перетину, якщо кожний з відрізків перетинає усі інші 8 не сусідніх відрізків. А це досягається, якщо нумерацію по колу зробити таким чином (рис. 4):

$$1-3-5-7-9-11-2-4-6-8-10-1.$$

Кількість точок перетину дорівнює $\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 8 = 44$.

## 8 клас

**1.** Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2-\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}-\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2.$$

***Відповідь:*** 4.
***Розв'язання.*** Зробимо такі перетворення заданого виразу:

$$\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2-\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}-\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)^2=$$
$$=\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}-\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}-\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}+\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)=$$
$$=\left(2\left(7+\sqrt{48}\right)^{2023}\right)\cdot\left(2\left(7-\sqrt{48}\right)^{2023}\right)=2^2(49-48)^{2023}=4.$$

Тобто вираз дорівнює 4.

**2.** Задані довільні натуральні числа $k$ та $n$, що задовольняють умову: $3 \le k \le n$. Доведіть, що серед $n$ попарно різних дійсних чисел знайдеться або $k$ чисел з додатною сумою, або $(k-1)$ число з від'ємною сумою.

*(Михайло Штанденко)*

***Розв'язання.*** Якщо у заданому наборі немає жодного додатного числа, то там є не більше ніж одне число, що дорівнює нулю, а всі інші числа – від'ємні, значить є $n-1$ від'ємне число. Тому в якості шуканого набору з $k-1 \ge 2$ чисел можна взяти довільний набір, що містить $k-1$ число. Інакше, тобто, якщо в цьому наборі є принаймні одне додатне число, відокремимо це число. Серед інших $n-1$ числа, що залишилися, візьмемо довільні $k-1$ число. Якщо їхня сума від'ємна, то шуканий набір знайдений і задача розв'язана. Якщо вказана сума невід'ємна, то додамо до цього набору з $k-1$ числа з невід'ємною сумою відокремлене додатне число, тоді одержимо шукані $k$ чисел з додатною сумою.

**3.** *Їжачком* будемо називати круг без межі, тобто круг без точок кола, що його обмежує. *Діаметром їжачка* назвемо діаметр цього круга. Будемо казати, що їжачок *сидить в точці*, в якій розташований центр відповідного круга. Нехай нам задано трикутник зі сторонами $a, b, c$, у вершинах якого сидять їжачки. Відомо, що всередині трикутника існує точка, з якої по прямій траєкторії можна дістатися до будь-якої сторони трикутника, не зачепивши жодного їжачка. Яке найбільше значення може приймати сума діаметрів цих їжачків?

*(Олексій Масалітін)*

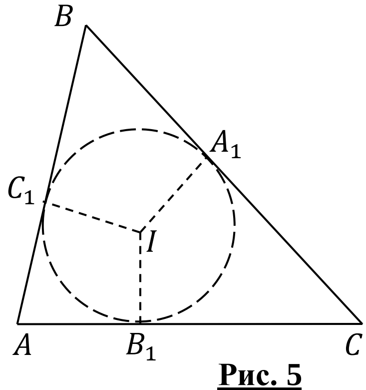


**Рис. 5**

***Відповідь:*** $a+b+c$.
***Розв'язання.*** Позначимо ширину трикутник через $ABC$, а їжачків через $d_a, d_b, d_c$ відповідно. Тоді нехай $d_a+d_b>2c$. Це значить, що будь-яка точка сторони $AB$ трикутника знаходиться всередині одного з їжачків, а значить до цієї сторони не можна дістатися. Тоді маємо $d_a+d_b \le 2c$, і аналогічно $d_a+d_c \le 2b$ та $d_b+d_c \le 2a \Rightarrow$ звідки $d_a+d_b+d_c \le a+b+c$.
Доведемо, що існує приклад, коли в цій нерівності досягається рівність.
Нехай $I$ – центр вписаного кола цього трикутника, а $A_1, B_1, C_1$ – його точки дотику до сторін трикутника (рис. 5). Тоді достатньо розглянути їжачків, що сидять в вершинах, і відповідні кола яких мають радіуси $AB_1=AC_1$, $BA_1=BC_1$ та $CA_1=CB_1$. Оскільки $IA_1 \perp BC$, $IB_1 \perp AC$ та $IC_1 \perp AB$, а це означає, що $IA_1, IB_1, IC_1$ – дотичні до їжачків, що сидять у відповідних вершинах, а тому не зачеплять жодного їжачка, що ми і хотіли довести.

**4.** Назвемо пару натуральних чисел $\overline{a_1a_2\dots a_k}$ та $\overline{b_1b_2\dots b_k}$ *$k$-схожими*, якщо усі цифри $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2., \dots, b_k$ – попарно різні, а також існують різні натуральні числа $m, n$, для яких справджується рівність:

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_k^m = b_1^n + b_2^n + \cdots + b_k^n.$$

Для якого найбільшого $k$ існують $k$-схожі числа?

*(Олексій Масалітін)*

***Відповідь:*** $k = 4$.

***Розв'язання.*** Розглянемо числа 1234 та 6789. Для них бачимо, що справджується така рівність:

$$6^1 + 7^1 + 8^1 + 9^1 = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2.$$

Таким чином ця пара чисел 4-схожі.

Очевидно, що для $k > 5$ не існує $k$-схожих чисел, бо різних цифр усього 10. Припустимо, що існує пара 5-схожих чисел $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ та $\overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$, для яких справджується рівність

$$a_1^m + a_2^m + a_3^m + a_4^m + a_5^m = b_1^n + b_2^n + b_3^n + b_4^n + b_5^n.$$

Парності чисел в обох частинах рівності однакові, а тому їх сума – парне число, оскільки ці числа – це усі 10 цифр, то сума їх також має бути парною, бо при піднесенні до натуральної степені парність числа не змінюється. Але сума усіх цифр $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ – непарна. Одержана суперечність показує, що максимальне значення $k = 4$.

**5.** Заданий квадрат $n \times n$. Центри деяких його $m$ клітин $1 \times 1$ відмічені. Виявилось, що не існує опуклого чотирикутника з вершинами в цих відмічених точках. Для кожного натурального $n \geq 3$ знайдіть найбільше значення $m$, для якого це можливо.

*Чотирикутник називається опуклим, якщо обидві його діагоналі лежать всередині цього чотирикутника.*

*(Олексій Масалітін, Федір Юдін)*

***Відповідь:*** $n + 2$.

***Розв'язання.*** Відмітимо дві точки у кутових клітинках лівого стовпчика, а також усі точки в деякому не крайньому рядку. Відміченими тоді стануть $n + 2$ точки, жодні 4 з яких не є вершинами опуклого чотирикутника (рис. 6).

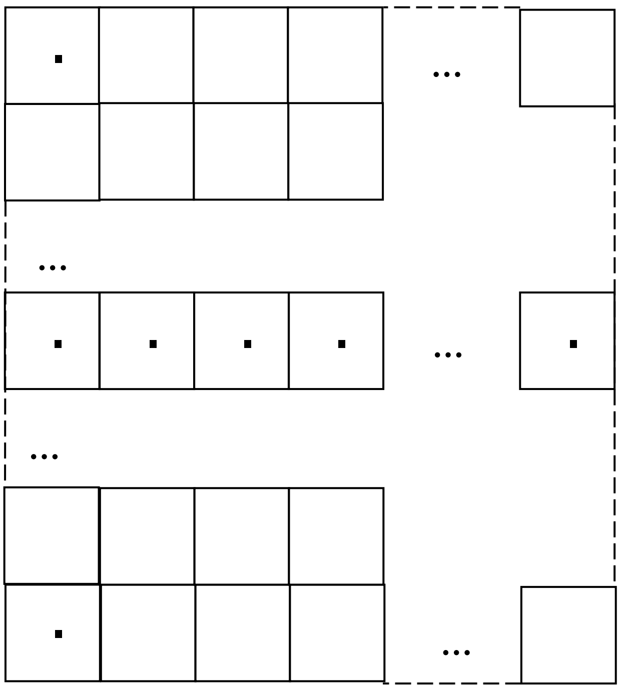



**Рис. 6**

Покажемо методом від супротивного, що більше ніж $n + 2$ точки відмітити не можливо. Нехай відміченими є принаймні $n + 3$ центри клітин. Зрозуміло, що якщо знайдуться два рядки, в кожному з яких відміченими є хоча б по 2 точки, то, взявши рівно по 2 точки з кожного з двох цих рядків, ми отримаємо опуклий чотирикутник. Інакше принаймні у $(n-1)$-му рядку не більше ніж 1 точка відмічена. Тоді знайдеться рядок, в якому відмічені принаймні 4 точки. Аналогічно знайдеться стовпчик, в якому відмічені хоча б 4 точки. Нехай цей рядок та цей стовпчик перетинаються в точці $A$. Легко побачити, що у цьому рядку є принаймні 2 точки, що лежать по один бік від точки $A$. аналогічні 2 точки знайдуться для стовпчика. Ці 4 точки й утворюватимуть опуклий чотирикутник.

**4.1.** Петрик розв'язав на тестуванні 33 задачі. За розв'язання меншої частини з них, серед яких була перша задача, він отримав $a$ балів, за розв'язання усіх інших він отримав $b$ балів. Відомо, що натуральні числа $a$ та $b$ задовольняють умову: $1 \leq b < a \leq 10$. По завершенні Петрик порахував середній бал за розв'язання усіх задач і він виявився цілим числом. За розв'язання скількох задач Петрик отримав $a$ балів?

***Відповідь:*** 11.
***Розв'язання.*** Нехай Петрик на бал $a$ розв'язав $n$ задач, а на бал $b$ розв'язав $(33-n)$ задач. Тоді середній результат Петрика дорівнював:

$$S=\frac{na+(33-n)b}{33}=\frac{n(a-b)+33b}{33}=\frac{n(a-b)}{33}+b.$$

Щоб це число було цілим треба, щоб $n(a-b) \vdots 11\cdot 3$. Оскільки $1\le a-b\le 8$, та $n<33$, то $n=11$ або $n=22$. Оскільки на бал $a$ він розв'язав меншу частину задач, то залишається можливим єдиний варіант $n=11$.

**5.1.** По колу стоять $n\ge 3$ дітей, кожний з яких має дві таблички, одну з цифрою 0, другу – з цифрою 1. У певний момент кожна дитина піднімає одну з табличок на свій розсуд. Далі через кожну хвилину кожна дитина, у якої число на табличці відрізняється від чисел на табличках обох її сусідів (ліворуч та праворуч), міняє свою табличку. Чи може тривати нескінченно довго ситуація, коли принаймні одна дитина міняє табличку?

***Відповідь:*** так, для парних $n$, ні – для непарних.
***Розв'язання.*** Для парного $n$ з самого початку діти підняли через один табличку з 0 та через один – з 1. Тоді кожної хвилини вони будуть міняти таблички на протилежні і так триватиме нескінченно довго. Для непарного $n$ такий розподіл не можливий. Якщо десь поруч стоїть дві однакові цифри, то вони такими лишаться назавжди. Такі таблички називатимемо *стабільними*. Усі нестабільні знаки змінюються кожної хвилини. Розглянемо довільну групу із стабільних цифр, що йдуть поруч. Розглянемо групу нестабільних знаків, що йдуть поруч. Вона складається із цифр, що йдуть по черзі: $0-1-0-1-\cdots$ (або в іншому порядку). Така група з кожного боку межує з стабільною групою, а тому втрачає два крайні елементи, які додаються до стабільної групи. Таким чином усі нестабільні групи за деякий час зникнуть і процес припиниться.

## 9 клас

**1.** Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$\left(\left(3+\sqrt{1}\right)^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{1}}\right)^{2023}\right)\cdot\left(\left(3+\sqrt{2}\right)^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)^{2023}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(3+\sqrt{3}\right)^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^{2023}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^{2023}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2023}\right).$$

***Відповідь:*** 0.
***Розв'язання.*** Розглянемо останній множник:

$$\frac{1}{3-\sqrt{8}}=\frac{3+\sqrt{8}}{9-8}=3+\sqrt{8}\ \Rightarrow\ \left(3+\sqrt{8}\right)^{2023}=\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2023},$$

тобто останній множник дорівнює 0, а тому й весь добуток дорівнює 0.

**2.** Ненульові дійсні числа $a,b,c$ задовольняють рівності: $ab+bc+ac=0$. Доведіть, що числа $a+b+c$ та $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ одного знаку.

*(Михайло Штанденко)*

***Розв'язання***. Якщо припустити, що $b+c=0$, то матимемо, що

$$ab+bc+ca=a(b+c)+ca=ca=0,$$

що суперечить умові. Таким чином $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$.

Оскільки

$$(a+b+c)(a+b)=a^2+ab+b^2+ab+bc+ac=a^2+ab+b^2,$$

то звідки $\frac{1}{a+b}=(a+b+c)\cdot\frac{1}{a^2+ab+b^2}$. Тоді, додаючи три аналогічні рівності, отримаємо, що

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}=(a+b+c)\left(\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{a^2+ac+c^2}\right).$$

Легко побачити, що кожний з виразів на кшталт $a^2+ab+b^2=\frac{a^2+(a+b)^2+b^2}{2}>0$, звідки й випливає наведене твердження.

***<u>Альтернативне розв'язання</u>***. Аналогічно попередньому розв'язанню пересвідчуємося, що задані вирази визначені коректно, тобто $(a+b)(b+c)(c+a)\neq 0$.

Із заданої рівності запишемо, що $c=-\frac{ab}{a+b}$ та підставимо цей вираз у добуток:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)=\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b-\frac{ab}{a+b}}+\frac{1}{a-\frac{ab}{a+b}}\right)=$$

$$=\left(\frac{(a+b)^2-ab}{a+b}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{b^2}+\frac{a+b}{a^2}\right)=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2b^2+(a+b)^2a^2+(a+b)^2b^2}{(a+b)a^2b^2}=$$

$$(a^2+ab+b^2)\cdot\frac{a^2b^2+(a+b)^2a^2+(a+b)^2b^2}{(a+b)^2a^2b^2}>0,$$

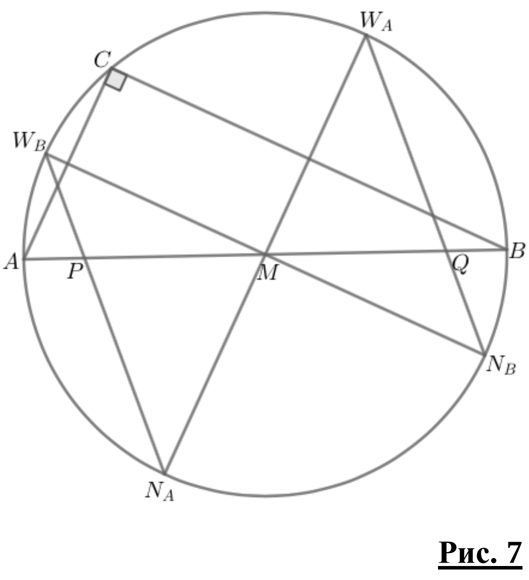
оскільки $a^2+ab+b^2=\frac{a^2+(a+b)^2+b^2}{2}>0$, а другий множник також очевидно додатній. Якщо добуток двох виразів завжди додатній, то вони одного знаку, що й треба було довести.

**3.** Дано прямокутний трикутник $ABC$ з прямим кутом $ACB$. Нехай $W_A$, $W_B$ відповідно – середини менших дуг $BC$ і $AC$ описаного кола $\Delta ABC$, а $N_A$, $N_B$ відповідно – середини більших дуг $BC$ і $AC$. Позначимо через $P$ і $Q$ відповідно точки перетину відрізку $AB$ з прямими $N_AW_B$ і $N_BW_A$. Доведіть, що $AP=BQ$.

*(Олексій Масалітін)*

***<u>Розв'язання.</u>*** Позначимо через $M$ середину гіпотенузи $AB$ трикутника $ABC$ (рис. 7). Зрозуміло, що $N_A\,W_BW_AN_B$ – прямокутник з центром $M$. Тому його сторони $N_AW_B$ та $N_BW_A$ є симетричними відносно $M$. Це і означає, що $AP=BQ$.

***<u>Зауваження</u>***. Також задачу можна розв'язати застосувавши Теорему про Метелика до чотирикутника $N_A\,W_BW_AN_B$.




**<u>Рис. 7</u>**

**4.** Задача **8.5.**

**5.** Чи існує на декартовій площині опуклий 2023-кутник з вершинами у точках, обидві координати яких є цілими числами, такий, що довжини усіх його сторін рівні?

*Многокутник називається опуклим, якщо усі його діагоналі лежать всередині цього многокутника.*

*(Антон Тригуб)*

***<u>Відповідь:</u>*** ні.

***Розв'язання.*** Припустимо, що такий 2023-кутник існує. Позначимо його сторону як $a$, тоді $a^2$ – ціле число, а вершини як $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{2023}, y_{2023})$. Розглянемо такий 2023-кутник з найменшим значенням $a^2$. Маємо $(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 = a^2$ для кожного $i$, де $x_{2024} = x_1, y_{2024} = y_1$.
Якщо $a^2$ кратне 4, то, оскільки якщо сума двох квадратів цілих чисел кратна 4, то обидва числа парні, маємо що $x_i \equiv x_{i+1} (\mathrm{mod}\, 2)$, $y_i \equiv y_{i+1} (\mathrm{mod}\, 2)$ для кожного $i$. Але тоді можна розглянути вдвічі менший багатокутник з вершинами $\left(\frac{x_i - x_1}{2}, \frac{y_i - y_1}{2}\right)$, в якого також всі вершини будуть в цілих точках, а довжина кожної сторони буде $\frac{a}{2}$, одержали суперечність.
Якщо $a^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$, то $x_i$ та $x_{i+1}$ різної парності для кожного $i$, що призведе до суперечності, оскільки ми отримаємо, що $x_1$ та $x_1$ різної парності.
Якщо $a^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$, то $x_i + y_i$ та $x_{i+1} + y_{i+1}$ різної парності для кожного $i$, що призведе до суперечності, оскільки ми отримаємо, що $x_1 + y_1$ та $x_1 + y_1$ різної парності.

**4.1.** Є 100 карток, на кожній з яких записане одне з чисел 1, 2, …, 100 так, що кожне число є рівно на одній картці. Картки складені у стопку так, що на них зверху до низу записані числа 1, 2, …, 100 у вказаному порядку. Петрик перекладає картки за такими правилами. Якщо перед його $k$-м ходом числа на картках зверху до низу записані таким чином: $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{100}$, то після його ходу вони розташовуються таким чином: $a_k, a_{k-1}, \dots, a_2, a_1, a_{k+1}, \dots, a_{100}$ (таким чином при $k = 1$ порядок карток не змінюється). Петрик робить по черзі ходи 1, 2, …, 100. Після чого він знову робить ходи 1, 2, …, 100 і так далі. Чи обов'язково після скінченної кількості ходів повториться початкове розташування карток зверху до низу з числами 1, 2, …, 100?

***Відповідь:*** так.
***Розв'язання.*** Розглянемо два таки ходи: $2k - 1$ та $2k$. Нехай перед першим з них було розташування карток $a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}, \dots, a_{100}$, тоді після двох ходів матимемо такі зміни:

$$a_{2k-1}, a_{2k-2}, \dots, a_1, a_{2k}, a_{2k+1}, \dots, a_{100} \to a_{2k}, a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}, a_{2k+1}, \dots, a_{100}.$$

Тобто після кожної пари ходів на перше місце висувається відповідне парне число. Таким чином після 100 ходів матимемо таке розташування карток: 100, 98, 96, …, 4, 2, 1, 3, 5, …, 97, 99. Назвемо таку пертурбацію *мегаходом*. Початкову позицію назвемо позицією $A_0$, після першого мегаходу стане позиція $A_1$, після другого – $A_2$ і так далі. Неважко зрозуміти, що якщо позиція $A_m$ утворилася з позиції $A_{m+1}$, то й навпаки, ні з якої іншої, окрім $A_m$ утворитися вона не може. таким чином розглянемо ситуацію після достатньо великої кількості мегаходів. Вони мають почати повторюватися, бо їх скінченна можлива кількість. Але якщо позиція повторилася, то й усі попередні співпадають. Таким чином і початкова позиція мала повторитися.

**5.1.** Знайдіть усі пари цілих невід'ємних чисел $x \geq y$, для яких числа $x + 3^y$ та $y + 3^x$ є двома послідовними цілими числами.

***Відповідь:*** $x = 1, y = 0$.
***Розв'язання.*** Очевидно, що $x > y$(тому що $x + 3^y \neq y + 3^x$). Спочатку доведемо таку лему.

*Лема.* Для кожного натурального числа $n > 1$ справджується нерівність: $3^n > n + 2$.

*Доведення.* Доведемо твердження ММІ, для $n = 2$ маємо, що $3^2 = 9 > 2 + 2 = 4$. Нехай це твердження справджується для деякого $n \geq 2$. Тоді

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot (n + 2) = 3n + 6 > n + 3 = (n + 1) + 2.$$

*Лема доведена.*

Зауважимо, що рівність $3^n = n + 2$ досягається тільки при $n = 1$.
Розглянемо різницю:

$$1 = y + 3^x - x - 3^y = 3^y(3^{x-y} - 1) - (x - y) \geq 1 \cdot \left((x - y) + 2 - 1\right) - (x - y) = 1.$$

Щоб справджувалася ця рівність усі проміжні нерівності так само мають бути рівностями, а тому мають справджуватися такі умови: $3^y = 1$ та $x - y = 1$, звідки й отримуємо наведену відповідь.
Якщо ж $1 = (x + 3^y) - (y + 3^x)$, то

$$3^x - 3^y = x - y - 1 \Rightarrow 3^y(3^{x-y} - 1) = x - y - 1 \Rightarrow 3^{x-y} - 1 \le x - y - 1 \Rightarrow 3^{x-y} \le x - y$$

Але ми довели, що для усіх натуральних чисел $n$, $3^n \ge n + 2 > n \Rightarrow 3^n > n$ й тоді ми отримаємо суперечність у цьому випадку.

## 10 клас

**1.** Знайдіть усі такі натуральні числа $n$, що задовольняють нерівностям:

$$-46 \le \frac{2023}{46 - n} \le 46 - n.$$

***Відповідь:*** 1 та 90.
***Розв'язання.*** Позначимо через $x = 46 - n$ і знайдемо відповідні цілі значення $x$, що задовольняють таку умову: $-46 \le \frac{2023}{x} \le x$. Розглянемо два випадки.
Випадок 1. $x > 0$. Ліва нерівність справджується для усіх зазначених $x$, права переписується таким чином:

$$2023 \le x^2 \ \Rightarrow\ x \ge 45 \ \Rightarrow\ 46 - n \ge 45 \ \Rightarrow\ n \le 1 \ \Rightarrow\ n = 1.$$

Випадок 2. $x < 0$. Нерівність переписується таким чином:

$$x^2 \le 2023 \le -46x \ \Rightarrow\ -44 \le x \le 44 \text{ та } x \le -44 \ \Rightarrow x = -44 \ \Rightarrow\ 46 - n = -44 \ \Rightarrow\ n = 90.$$

Неважко переконатися, що ці два значення задовілняють умові

**2.** Для довільних додатних чисел $a, b, c$ розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} ax^3 + by = cz^5, \\ az^3 + bx = cy^5, \\ ay^3 + bz = cx^5. \end{cases}$$

*(Олексій Масалітін, Богдан Рубльов)*

***Відповідь:*** $(0,\ 0,\ 0)$ та $(t,\ t,\ t)$, де $t = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$.
***Розв'язання.*** Припустимо, що $x < y < z$ (один із знаків може бути не строгим). Тоді віднімемо від першого рівняння третє: $a(x^3 - y^3) + b(y - z) < 0 \le c(z^5 - x^5)$ – суперечність.
Якщо припустити, що $x < z < y$ (один із знаків може бути не строгим). Тоді віднімемо від другого рівняння третє: $a(z^3 - y^3) + b(x - z) < 0 \le c(y^5 - x^5)$ – суперечність. Без обмеження загальності можна вважати, що усі випадки розглянуті, оскільки система рівнянь циклічна.
Таким чином лишається умова $x = y = z$. Для того треба розв'язати таке рівняння:

$$cx^5 - ax^3 - bx = 0.$$

Очевидно, що $x_1 = 0$, далі треба розв'язати рівняння $cx^4 - ax^2 - b = 0$. Оскільки $a^2 + 4bc > 0$ та $a - \sqrt{a^2 + 4bc} < 0$, то маємо, що $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2c}}$, інакше – інших розв'язків не існує.

**3.** Розглянемо на декартовій площині усі пари різних точок $(A, B)$, кожна з яких має обидві цілі координати. Серед цих пар точок знайдіть усі такі, для яких знайдуться дві різні точки $(X, Y)$ з обома цілими координатами, що чотирикутник $AXBY$ опуклий та вписаний.

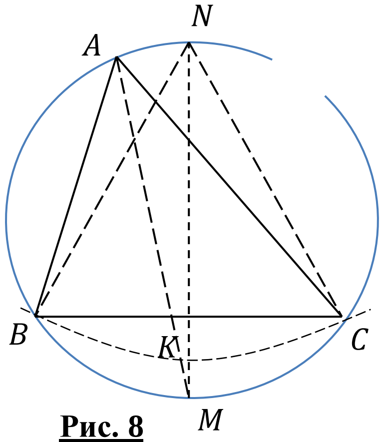


**Рис. 8**

*Чотирикутник називається опуклим, якщо обидві його діагоналі лежать всередині чотирикутника.*

*(Антон Тригуб)*

***Відповідь***: усі пари точок $(A, B)$ на відстані більшій ніж 1.
***Розв'язання.*** Спершу покажемо, що для точок на відстані 1 точок $(X, Y)$ не знайдеться. Дійсно, припустимо, що такі точки знайшлись. Тоді $\angle AXB + \angle AYB = 180°$, звідки принаймні один з цих кутів не менший за $90°$. Отже, принаймні одна з точок $X, Y$ має лежати всередині чи на межі кола з діаметром $AB$, але це коло не містить жодних цілочисленних точок, крім $A$ та $B$.

Тепер покажемо, що для всіх інших пар точок така пара $(X, Y)$ знайдеться. Нехай $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$. Якщо $a_1 \neq b_1, a_2 \neq b_2$, то можна взяти $X = (a_1, b_2), Y = (b_1, a_2)$, тоді $AXBY$ буде прямокутником, а отже вписаним чотирикутником. Інакше, без обмеження загальності, $a_2 = b_2 = t$, тобто $A = (a_1, t), B = (b_1, t)$, причому $|a_1 - b_1| > 1$. Без обмеження загальності, $a_1 < b_1$. Тоді достатньо взяти наступні точки: $X = (a_1 + 1, t - 1), Y = \big(a_1 + 1, t + (b_1 - a_1 - 1)\big)$. Неважко помітити, що відрізки $AB, XY$ перетинаються в точці $K = (a_1 + 1, t)$, причому $AK \cdot BK = XK \cdot YK = 1 \cdot (b_1 - a_1 - 1)$, тому чотирикутник $AXBY$ дійсно вписаний.

**4.** Задані натуральні числа $m, n$ такі, що число $mn$ ділиться на 9, але не ділиться на 27. Прямокутник $m \times n$ розрізали на куточки з трьох клітинок. В залежності від того, як орієнтовані ці куточки, поділимо їх на чотири типи, як це показане на рис. 9. Чи могло так статися, що кількості куточків для кожного типу є точними квадратами деяких натуральних чисел?

*(Олексій Масалітін)*

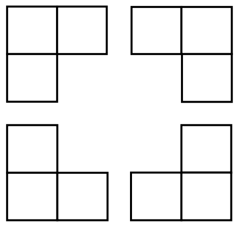


**Рис. 9**

***Відповідь***: ні.
***Розв'язання.*** Розмістимо куточок в квадрат $2 \times 2$. В залежності від того яка клітинка квадрату не зайнята позначимо чотири типи куточків. Нехай тип (1) це куточки, в яких відсутня верхня ліва клітинка, тип (2) – верхня права, тип (3) – нижня права, а тип (4) – нижня ліва клітинка. Нехай $a_i$ – це кількість куточків типу $(i)$. Занумеруємо стовпчики числами від 1 до $n$, а рядки – числами від 1 до $m$ (нехай при цьому ліва нижня клітинка дошки знаходиться в першому рядку і першому стовпчику), після чого в кожній клітинці напишемо суму її стовпчика та рядка. Ми знаємо, що $mn \,\vdots\, 3$, а значить дошку можна розбити на прямокутники $1 \times 3$, в кожному з яких сума чисел ділиться на 3, а тому сума чисел в усіх клітинках ділиться на 3. Помітимо, що в кожному куточку типів (1) та (3) сума чисел ділиться на 3. З іншого боку сума чисел в куточках типу (2) дає остачу 2 при діленні на 3, а типу (4) – остачу 1. Тоді сума чисел на дошці конгруентна числу $a_4 - a_2$ за модулем 3, а значить $a_2 \equiv a_4 (\mathrm{mod}\, 3)$. Аналогічно $a_1 \equiv a_3 (\mathrm{mod}\, 3)$ оскільки ми можемо зробити нумерацію, де права нижня клітинка знаходиться у першому рядку та першому стовпчику. Припустимо, що не всі $a_i$ діляться на 3. Без обмеження загальності, нехай $a_1$ не ділиться на 3. Якщо $a_1$ є квадратом, то $a_1 \equiv a_3 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Відомо, що $mn \,\vdots\, 9$, а тому кількість куточків ділиться на 3. Тобто $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \,\vdots\, 3$, а значить $a_2 \equiv a_4 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, а значить $a_2$ не є квадратом. У випадку коли всі $a_i$ діляться на 3, якщо вони є квадратами, то вони всі діляться на 9, але тоді кількість куточків ділиться на 9, звідки $mn \,\vdots\, 27$, що суперечить умові. Отже така ситуація неможлива.

**5.** Задача **9.5.**

**4.1.** У кімнаті є $n$ ламп та $2024$ перемикачі. Кожна лампа з'єднана рівно з $1000$ перемикачами. При натисканні на перемикач кожна з'єднана з ним лампа змінює свій стан – з «ON» на «OFF» та навпаки. Відомо, що натисканням на деякі з перемикачів можна досягти того, що усі лампи перейдуть в стан «ON». Доведіть, що цього можна досягнути натисканням на перемикачі сумарно не більше ніж $1012$ разів.

***Розв'язання.*** Очевидно, що кожний перемикач не варто натискати більше одного разу. Розіб'ємо усі перемикачі на 2 групи: група I – ті перемикачі, які треба натиснути, щоб перевести усі лампи в стан «ON», група II – усі інші перемикачі. Оскільки кожна лампа з'єднана з парною кількістю перемикачів, то якщо натиснути усі перемикачі групи II, то усі лампи також перейдуть в стан «ON». Дійсно виберемо лампу «A», якщо в групі I парна кількість перемикачів, що з'єднані з «A», то їх парна кількість і в групі II, при натисканні що там, що там, стан лампи «A» не зміниться. Аналогічно для непарної кількості.
Сумарно в групі I та II 2024 перемикачі. Значить принаймні в одній з них не більше 1012 перемикачі, що й доводить шукану відповідь.

**5.1.** Задача **9.5.1.**

## 11 клас

**1.** Яке з чисел більше, $A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}}$ чи $B = \log_{2023} 91125$?

***Відповідь:*** $A < B$.
***Розв'язання.*** Для цього покажемо, що справджуються такі нерівності: $A < \frac{3}{2} < B$.

$$A = \frac{1}{9} : \sqrt[3]{\frac{1}{2023}} = \frac{\sqrt[3]{2023}}{9} < \frac{13}{9} < \frac{3}{2}, B = \log_{2023} 91125 < \log_{2025} 45^3 = \log_{45^2} 45^3 = \frac{3}{2}.$$

**2.** Дано $n \geq 4$ додатніх чисел. Розглянемо всі $\frac{n(n-1)}{2}$ попарних сум цих чисел. Покажіть, що якісь дві суми відрізняються не більше, ніж в $\sqrt[n-2]{2}$ рази.

*(Антон Тригуб)*

***Розв'язання.*** Нехай ці числа в порядку зростання: $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Розглянемо суми $2x_1 \geq x_1 + x_2 \geq x_1 + x_3 \geq \cdots \geq x_1 + x_n > x_1$. Отже, якісь дві з сум $x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_1 + x_n$ відрізняються не більше ніж в $\sqrt[n-2]{2}$ разів.

**3.** Точка $I$ – інцентр трикутника $ABC$, $AB < AC$. На бісектрисі зовнішнього кута $ABC$ трикутника $ABC$ обрали таку точку $X$, що $IC = IX$. Нехай дотична до описаного кола $\Delta BXC$ у точці $X$ перетинає пряму $AB$ в точці $Y$. Доведіть, що $AC = AY$.

*(Олексій Масалітін)*

***Розв'язання.*** З того що $XY$ – дотична до описаного кола $\Delta BXC$ випливає рівність $\angle BXY = \angle BCX$. З цієї рівності, а також того, що $\angle YBX = \angle XBC$ випливає подібність $\Delta BXY \sim \Delta BCX$. Тоді справджується рівність $\frac{BX}{BC} = \frac{BY}{BX}$, тобто $BY = \frac{BX^2}{BC}$. Помітимо, що $\angle IBX = 90°$, а тому (рис. 9)

$$BY = \frac{BX^2}{BC} = \frac{IX^2 - BI^2}{BC} = \frac{CI^2 - BI^2}{BC}.$$

Нехай $K$ – точка дотику вписаного кола до сторони $BC$. Тоді

$$BY = \frac{CI^2 - BI^2}{BC} = \frac{(IK^2 + CK^2) - (IK^2 + BK^2)}{BC} = \frac{CK^2 - BK^2}{BC} = CK - BK.$$

Тепер позначимо відповідні сторони $\Delta ABC$ через $a, b, c$, а його напівпериметр – через $p$. Тоді отримаємо, що

$$AY = AB + BY = AB + CK - BK = c + (p - c) - (p - b) = b = AC,$$

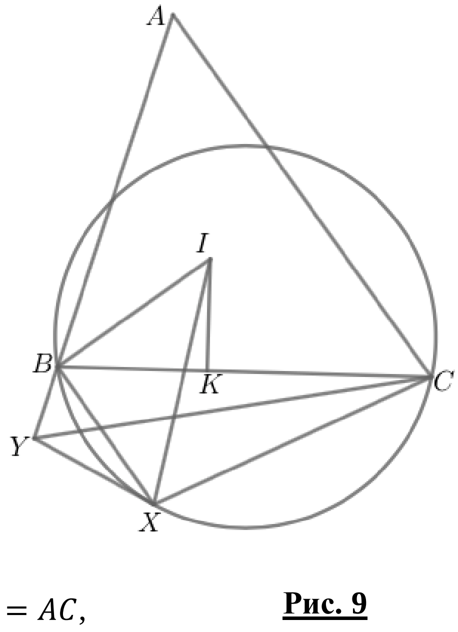



**Рис. 9**

що й треба було довести.

**4.** Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m,n)$, для яких $2^n - 13^m$ є кубом натурального числа.

*(Олексій Масалітін)*

***<u>Відповідь:</u>*** $(2;9)$
***<u>Розв'язання:</u>*** Нехай $2^n - 13^m = k^3$. Тоді $2^n \equiv k^3 (mod 13)$. Якщо $n$ не ділиться на 3, то $2^n$ можна подати у вигляді $4l^3$ або $2l^3$. Тоді або 4, або 2 є кубом деякого цілого числа за модулем 13. Але простим перебором можна зрозуміти, що кубом цілого числа за модулем 13 можуть бути лише остачі $0, \pm 1$ і $\pm 5$. Тоді $n$ ділиться на 3, тож нехай $n = 3t$. Умову можна переписати у вигляді

$$13^m = (2^t - k)(4^t + k \cdot 2^t + k^2).$$

Тоді обидві дужки є степенями числа 13, причому ліва менша за праву, тож $2^t - k$ ділить $4^t + k \cdot 2^t + k^2$. Оскільки $2^t \equiv k \left(\text{mod } (2^t - k)\right)$, маємо $4^t + k \cdot 2^t + k^2 \equiv 3 \cdot 4^t \left(\text{mod } (2^t - k)\right)$. Тоді $3 \cdot 4^t$ ділиться на число $2^t - k$, яке є степенем числа 13, тож $2^t - k = 13^0 = 1$ і $13^m = 3 \cdot 4^t - 3 \cdot 2^t + 1$. Припустимо, що $t \geq 4$. Тоді $13^m \equiv 1 (\text{mod } 16)$, звідки $m$ ділиться на 4. Таким чином $m = 4s$ і

$$(13^{2s} + 1)(13^{2s} - 1) = 3 \cdot 2^t \cdot (2^t - 1).$$

Але $13^{2s} + 1$ не ділиться на 4 і 3, тож $13^{2s} + 1$ ділить $2 \cdot (2^t - 1)$. Якщо ці числа не рівні, то

$$13^{2s} + 1 \leq 2^t - 1 < \sqrt{3 \cdot 2^t \cdot (2^t - 1)} < 13^{2s}.$$

Інакше $13^{2s} + 1 = 2 \cdot (2^t - 1)$ і $13^{2s} - 1 = 3 \cdot 2^{t-1}$. Віднімемо з першої рівності другу і отримаємо $2^{t-1} - 2 = 2$, тож $t = 3$, що суперечить припущенню $t > 3$. Для $t = 1, 2, 3$ звичайною перевіркою пересвідчуємося, що умові задовольняє лише $t = 3$. Таким чином, $n = 9$ і $m = 2$ буде єдиним розв'язком.

**5.** У далекій-далекій галактиці є $225$ заселених планет. Між деякими парами з заселених планет існує космічне сполучення в обидва боки, при цьому від кожної планети можна дістатися до кожної іншої (можливо з декількома пересадками). *Впливом* планети називається кількість інших планет, з якими у цієї планети є пряме сполучення. Відомо, що якщо дві планети не з'єднані прямим космічним рейсом, то вони мають різний вплив. Яка найменша кількість сполучень можлива за таких умов?

*(Арсеній Ніколаєв, Богдан Рубльов)*

***<u>Відповідь:</u>*** $1593$.
***<u>Розв'язання.</u>*** Переформулюємо цю задачу на мові графів. Планети – це є вершини графу, прямі рейси – ребра. Відомо, що у зв'язному графі будь-які дві вершини, що не з'єднані ребром, мають різний степінь. Запитання, скільки в такому графі може бути ребер, кількість вершин при цьому не важлива. Спочатку доведемо таку лему.

*<u>Лема 1</u>*: Для довільного натурального $k$ у графі не більше, ніж $k + 1$ вершина степені $k$.

*Доведення*. Методом від супротивного. Нехай для деякого $k$ є множина $M$ складається принаймні з $k + 2$ вершин, кожна з яких має степінь $k$. Якщо принаймні дві з вершин множини $M$ не з'єднані, то умова задачі порушена. Таким чином, кожні дві вершини з $M$ попарно з'єднані. Але тоді степінь кожної вершини не менше ніж $k + 1$, що суперечить умові. Одержана суперечність завершує доведення.
*Лема доведена*.

*<u>Лема 2</u>*: Для довільного натурального $k \geq 3$, якщо у зв'язному графі мінімальна кількість ребер, то в ньому не більше, ніж $k$ вершин степені $k$.

*Доведення*. Методом від супротивного. З попередньої леми таких вершин може бути не більше ніж $k + 1$. Якщо їх менше, то твердження доведене. Припустимо, що для деякого $k$ є $k + 1$ вершина степені $k$. Але тоді вони усі з'єднані поміж собою, а тому в цьому графі інших вершин немає. Таким чином маємо повний граф на $(k + 1)$-й вершині.

Але тепер розглянемо повний граф на $k$ вершинах і одну вершину, що зв'язана з однією з $k$ інших вершин. Тоді маємо, що по одній вершині степені 1 та $k$ і ще $k-1$ вершина степені $k-1$. Тобто вершини, що не зв'язані мають різні степені. Порахуємо кількість ребер для обох випадків. Для повного графу на $(k+1)$-й вершині – це є $\frac{1}{2}k(k+1)$, а для другого варіанту – повний граф на $k$ вершинах з додатковим одним ребром: $\frac{1}{2}(k-1)k+1$. Тоді

$$\frac{k(k+1)}{2} > \frac{(k-1)k}{2} + 1 \Leftrightarrow k^2 + k > k^2 - k + 2 \Leftrightarrow k > 1,$$

тобто кількість ребер зменшилася. Одержана суперечність завершує *доведення леми*.

Тепер побудуємо граф, що задовольняє умови задачі з найменшою кількістю ребер. Тут нам допоможуть такі прості міркування.

*<u>Лема 3</u>*. Якщо в графі зменшити степінь бодай однієї вершини, то сумарна кількість ребер зменшиться.

*Доведення*. Достатньо просто згадати формулу суми степенів усіх вершин $S$ та кількості ребер $R$. Зрозуміло, що $S = 2R$. Тому при зменшенні $S$ зменшується і $R$.
*Лема доведена*.

Таким чином, нехай в нас 225 вершин. Знайдемо таке значення $k$, для якого справджується нерівність:

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \leq 225 < 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Це значення $k = 20$. Нехай

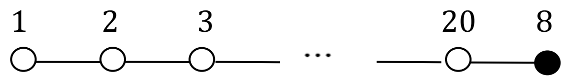
$$l = 225 - (1 + 2 + \cdots + k) = 225 - 210 = 15.$$

Тоді для мінімальної кількості ребер в нас має бути 1 вершина степені 1, 2 вершини степені 2, …, $k$ вершин степені $k$. Для решти $l$ вершин є такі варіанти. Найменша кількість ребер мала б бути, якщо усі ці вершини мали б степінь $k+1$. Але тоді сумарна кількість ребер, що виходять з кожної вершини, така:

$$L = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + 20 \cdot 20 + 15 \cdot 21 = 3185.$$

В такому підрахунку кожне ребро пораховане двічі, тому це число має бути парним. Оскільки це число непарне, то має бути мінімальним число ребер $\frac{1}{2}(L+1) = 1593$. Для цього випадку має бути 14 вершин степені 21 та 1 вершина степені 22. Залишається показати, що така ситуація можлива.

Таким чином в нас має бути 1 вершина степені 1, 2 вершини степені 2, …, 20 вершин степені 20, 14 вершин степені 21 та 1 вершина степені 22. Залишається побудувати приклад графа, що задовольняє умови задачі. Спочатку будуємо повні графи для вершин степені 2, 3, …, 20. Далі будуємо повний граф для 15 вершин, що лишилися. Таким чином умова зв'язності вершин з однаковим степенем виконана. Залишається зробити граф зв'язним і щоб жодна пара вершини не була з'єднана двічі. Залишилися не з'єднаними такі ребра: по 1 ребру у кожної вершини степеней від 1 до 20, а також з останньої групи з 15 вершин маємо 14 вершин степені 7 та одну вершину степені 8, при цьому останні вершини вже зв'язані. Це випливає з того, що вони з'єднані між собою 14 ребрами. Таким чином в першій групі $1 + 2 + \cdots + 20 = 210$ ребер, а в другій – $14 \cdot 7 + 8 = 106$ ребер. Далі ми з'єднуємо послідовно одним спільним ребром усі групи від степені 1 до степені 20, а останню групу з'єднуємо з вершиною степені 8 (рис. 11). Таким чином ми використали з 210 ребер першої групи 39 та 1 ребро з 106 ребер. І досягли того, що граф зв'язний. Залишається 105 ребер, що лишилися з'єднати з 105 ребрами першої групи, але так, щоб використовувати їх рівномірно, починаючи з груп з максимальної кількістю ребер. Очевидно, що далі решта ребер з'єднати доволі просто.



**<u>Рис. 11</u>**

**4.1.** Знайдіть усі натуральні числа $x, y, z$, які задовольняють рівності: $2^x + 21^y = z^2$.

***<u>Відповідь:</u>*** $x = 2$, $y = 1$ та $z = 5$.
***<u>Розв'язання</u>*.** Розглянемо два випадки для $x$.
Для непарного $x$ матимемо, що

$$z^2 \equiv 2^{2n+1} + 21^y \equiv 2 + 0 \equiv 2 \pmod 3,$$

розв'язків немає.
Нехай тепер $x = 2n$, тоді

$$21^y = z^2 - 2^{2n} = (z - 2^n)(z + 2^n).$$

Припустимо, що одне з двох простих чисел 3 або 7 ділить кожний з двох множників у правій частині. Тоді це просте ділить також і число $2z = (z + 2^n) + (z - 2^n)$, а тому й $z$. Але це суперечить рівності $2^x = z^2 - 21^y$, в якій права частина кратна відповідному простому числу, а ліва – ні. Звідси випливає, що ці множники взаємно прості. А тому можливі такі два випадки.

Випадок 1. $z - 2^n = 1$, $z + 2^n = 21^y \Rightarrow 2^{n+1} = 21^y - 1 \Rightarrow 2^{n+1} \equiv 6(\mathrm{mod}\ 7)$, а це суперечить тому, що $2^{n+1} \equiv 1{,}2{,}4(\mathrm{mod} 7)$.

Випадок 2. $z - 2^n = 3^y$, $z + 2^n = 7^y \Rightarrow z = 2^n + 3^y$ та $2^{n+1} = 7^y - 3^y$. Для $y = 1$ знайдемо, що $x = 2$ та $z = 5$, що нам дає перший розв'язок. Для $y \geq 2$ вираз $7^y - 3^y \equiv 0(\mathrm{mod}\ 8)$, що можливо лише для парних $y$. Якщо $y = 2m$, тоді $2^{n+1} = (7^m - 3^m)(7^m + 3^m)$. Але за таких умов $7^m + 3^m \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, при цьому воно більше за 4, а тому не може бути степенем числа 2.

**5.1.** Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 2$, для яких справджується таке твердження: якщо сума чисел у послідовності натуральних чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ дорівнює $2n - 1$, то існує блок послідовних членів цієї послідовності, що містить щонайменше два члени цієї послідовності, числа якого мають середнє арифметичне, що є цілим числом.

***Відповідь:*** $n \geq 4$.
***Розв'язання.*** Для $n = 2, 3$ контрприкладами є такі послідовності: $(1{,}2)$ та $(2{,}1{,}2)$.
Нехай $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – довільна послідовність, що задовольняє умови. Визначимо таку послідовність: $s_0 = 0$, $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k - 2k$, $k = \overline{1, n}$. Назвемо послідовність *гарною*, якщо вона не задовольняє умови задачі, тобто там не існує блоку з не менше ніж двох послідовних членів, які мають ціле середнє арифметичне. Назвемо парі $(i, j)$ – *подільною*, якщо для неї справджується умова: $(j - i) | (s_j - s_i)$. Легко зрозуміти, що послідовність $(a_1, \dots, a_n)$ – гарна тоді і тільки тоді, коли не існує жодної подільної пари, для якої $|j - i| \geq 2$.
Нехай $n \geq 4$, з умов задачі $s_n = -1$ і $\forall k = \overline{1, n}\ s_{k+1} - s_k = a_k - 2 \geq -1$. Розглянемо можливі випадки для значення $s_2$.
Якщо $s_2 \leq -2$, то оскільки $s_1 \geq s_0 - 1 = -1$ та $s_2 \geq s_1 - 1$, то $s_2 = -1$, $s_1 = -1$, звідки $n - 1 \mid s_n - s_1$.
Якщо $s_2 = -1$, то $n - 2 \mid s_n - s_2$.
Якщо $s_2 = 0$, то $2 - 0 \mid s_2 - s_0$.
Якщо $s_2 \geq 1$, то оскільки $s_n = -1$ та $s_{k+1} \geq s_k - 1$, то буде індекс, для якого $s_i = 0$, звідки $i - 0 \mid s_i - s_0$.
Таким чином ми показали, що серед пар $(1, n)$, $(2, n)$, $(0{,}2)$ та $(0, i)$, де $2 < i < n$, принамійні одна є подільною. Зрозуміло, що це завершує доведення для $n \geq 4$.