Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ІІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Київська міська онлайн олімпіада з математики

Умови та вказівки до розв'язань задач

Київ, 5 лютого 2023 року

«Нам усім дуже важко,
Але вже ніколи не буде соромно».
Валерій Залужний

7 клас

1. Три брати Петрик, Василь та Грицько пішли в крамницю купляти собі рюкзаки. Мама дала їм купони на знижку: Петрику – знижка на 40%, Василю – на 30% та Грицькові – на 20%. Їм сподобалися 3 рюкзаки: жовто-блакитний коштував 1000 грн, червоний – 900 грн, а чорний – 800 грн. Яке найменшу суму можуть витратити брати, щоб придбати ці три рюкзаки?

Відповідь: 1870 грн..
Розв'язання. Легко зрозуміти, що можна перебрати усі 6 варіантів, але зрозуміло, що шуканим буде один з двох варіантів, або найбільша знижка на найдорожчий рюкзак, середню – на середній та найменшу знижку на найдешевший рюкзак, або навпаки. Перевіримо ці два варіанти.

$$S = 1000 \cdot 0{,}6 + 900 \cdot 0{,}7 + 800 \cdot 0{,}8 = 600 + 630 + 640 = 1870.$$
$$S = 1000 \cdot 0{,}8 + 900 \cdot 0{,}7 + 800 \cdot 0{,}6 = 800 + 630 + 480 = 1910.$$

2. Чи можна числа $1, 2, \dots, 20$ розставити у вершинах та серединах ребер куба так, щоб кожне число, що стоїть у середині ребра, дорівнювало середньому арифметичному чисел, що стоять на кінцях цього ребра?

Відповідь: не можна
Розв'язання. Для виконання цих умов числа у вершинах мають мати однакову парність, а крім того числа 1 та 20 мають стояти в вершинах, але вони різної парності. Одержана суперечність завершує доведення.

3. Відомо, що для натуральних чисел m, n число $5n + m$ ділиться націло на число $5m + n$. Чи обов'язково число n ділиться націло на число m?

Відповідь: так.
Розв'язання. Умову задачі запишемо таким чином: існує натуральне число k, для якого справджується рівність: $(5m + n)k = 5n + m \Rightarrow (5k - 1)m = (5 - k)n$. Ліва частина додатна, тому й права частина має бути додатною, тобто $k < 5$. Розглянемо ці випадки.
При $k = 1$ матимемо рівність $4m = 4n$ або $m = n$ і твердження справджується.
При $k = 2$ матимемо рівність $9m = 3n$ або $n = 3m$ і твердження справджується.
При $k = 3$ матимемо рівність $14m = 2n$ або $n = 7m$ і твердження справджується.
При $k = 4$ матимемо рівність $19m = n$ і твердження справджується.
Таким чином твердження доведене.

4. Розглянемо різні способи розрізання квадрата 1×1 на прямокутники, що мають сторони паралельні сторонам квадрата та однакові периметри (сторони усіх прямокутників при цьому не зобов'язані бути однаковими).

а) Чи можна таким способом розрізати цей квадрат на 20 прямокутників з периметром, що дорівнює $2{,}5$?

б) Чи можна таким способом цей квадрат на 30 прямокутників з периметром, що дорівнює 2?

Відповідь: ***а)*** ні; ***б)*** так.
Розв'язання. ***а)*** Розглянемо прямокутник зі сторонами $a \le b$, тоді $2a + 2b = \frac{5}{2}$. Оскільки $b \le 1$, то $a \ge \frac{1}{4}$. Тоді його площа не менше $a \cdot a = \frac{1}{16}$. Тому таких прямокутників не може бути більше 16.

б) Відповідний приклад показаний на рис. 1. У однакових прямокутників $1 - 4$ менша сторона x, тоді більша сторона – це $1 - x$. Тоді однаковими прямокутниками $5 - 30$ має бути покритий квадрат зі стороною $1-2x$. Тому розміри цих прямокутників складають $\frac{1-2x}{26}$ та $1-2x$. І їхній периметр має дорівнювати 2, тому для знаходження x маємо рівняння: $2\cdot\left(\frac{1-2x}{26}+1-2x\right)=2 \Rightarrow \frac{27(1-2x)}{26}=1 \Rightarrow 1-2x=\frac{26}{27} \Rightarrow x=\frac{1}{54}$.

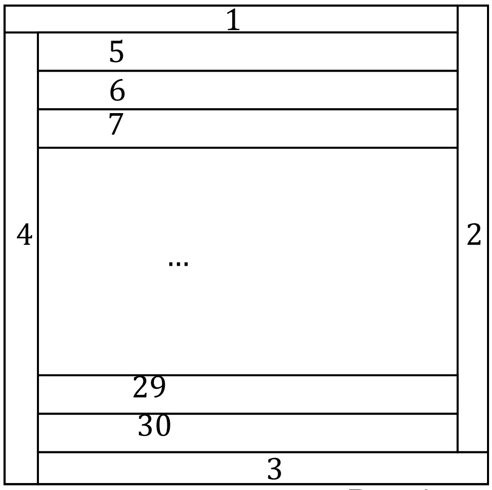


Рис. 1

8 клас

1. Двоцифрове число x називається *гарним*, якщо воно має таку властивість: якщо від x^2 відняти $6x$ та додати 9, то вийде число, що утворюється перестановкою цифр числа x та множенням на 100. Знайдіть усі гарні числа.

Відповідь: 63.

Розв'язання. Якщо число $x=\overline{ab}$, то вказана рівність переписується таким чином

$$x^2-6x+9=100\cdot\overline{ba} \Rightarrow \left(\overline{ab}-3\right)^2 \vdots 100 \Rightarrow b=3.$$

Тепер для цифри a маємо таке рівняння:

$$(10a)^2=(30+a)\cdot 100 \Rightarrow a^2-a-30=0 \Rightarrow a=6 \Rightarrow x=63.$$

2. Знайдіть усі пари цілих чисел (x,y), що задовольняють рівності: $|x-\ y|+xy=0$.

Відповідь: $(0,0),(2,-2)$ та $(-2,2)$.

Розв'язання. Розглянемо випадок $x=0$, тоді матимемо, що й $y=0$. Надалі вважатимемо, що $xy\neq 0$. Якщо x,y – одного знаку, то рівність неможлива, бо маємо суму невід'ємного та додатного числа дорівнює 0, що неможливо. Значить без обмеження загальності вважатимемо, що $x>0,\ y<0$. Покладемо $t=-y>0$. Тоді задану рівність можна перетворити таким чином:

$$|x-y|+xy=0 \Rightarrow |x+t|-xt=0 \Rightarrow x+t-xt=0 \Rightarrow xt-x-t+1=1$$
$$\Rightarrow (x-1)(t-1)=1 \Rightarrow x=2, t=2,$$

Оскільки $x>0, t>0$. Таким чином пари (x,y), що задовольняють умови в цьому випадку такі: $(2,-2)$ та $(-2,2)$.

3. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ маємо $AB=BD=a$ та $CD=DA=b$. Нехай P – точка на стороні AB така, що DP – бісектриса $\angle ADB$, а Q – точка на стороні BC така, що DQ – бісектриса $\angle CDB$. Знайдіть радіус описаного кола ΔDPQ.

Відповідь: $\frac{ab}{a+b}$.

Розв'язання. Нехай точка O на відрізку BD така, що $OP||BD$ (рис. 2). Покажемо, що O – центр описаного кола ΔDPQ.

Оскільки $\angle ADB=\angle PDB=\angle DPO$, то $OP=OD$. Оскільки ΔADB – рівнобедрений, тому чотирикутник $ADOP$ – рівнобічна трапеція. Тому $AP=DO=OP$, а також $BO=BP$. Звідси маємо з властивості бісектриси ΔABD, що

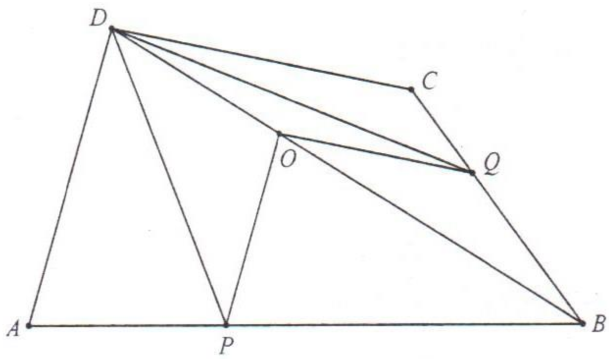


Рис. 2

$$\frac{DO}{BO}=\frac{AP}{BP}=\frac{DA}{DB}=\frac{b}{a}.$$

Аналогічно з ΔBCD маємо, що $\frac{CQ}{BQ}=\frac{DC}{DB}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{CQ}{BQ}=\frac{DO}{BO}=\frac{b}{a} \Rightarrow QO||CD$. Аналогічно попередньому $\angle QDB=\angle CDQ=\angle OQD$, звідки $OQ=OD$, що й завершує доведення того, що O – центр описаного кола ΔDPQ.

Оскільки $AP + BP = a$ та $\frac{AP}{BP} = \frac{b}{a}$, то $AP = \frac{ab}{a+b}$, що й дорівнює шуканому радіусі.

4. Знайдіть усі натуральні n, для яких справджується рівність:
$$3\tau(n) = \tau(n^2),$$
де через $\tau(n)$ позначена кількість дільників числа n.

Відповідь: p^2q^4, де q, p – різні прості числа.
Розв'язання. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$. Тоді
$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1), \tau(n^2) = (2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_k + 1) \Rightarrow$$
$$3(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = (2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_k + 1).$$
Якщо $k = 1$, тоді $3\alpha_1 + 3 = 2\alpha_1 + 1 \Rightarrow \alpha_1 = -2$ – суперечність.
Якщо $k = 2$, тоді $3(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 2 = 0 \Rightarrow (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) = 3 \Rightarrow \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 4$ або $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 2$, тобто умову задовольняють усі числа вигляду $n = p^2q^4$, де q, p – різні прості числа.
Якщо $k \geq 3$, тоді рівність можна перетворити на таку:
$$2^k\alpha_1 \dots \alpha_k + 2^{k-1}(\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots + 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + 1 =$$
$$= 3\alpha_1 \dots \alpha_k + 3(\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots + 3(\alpha_1 + \dots + \alpha_k) + 3 \Rightarrow$$
$$(2^k - 3)\alpha_1 \dots \alpha_k + (2^{k-1} - 3)(\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots = \alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2 \Rightarrow$$
$$(2^k - 3)\alpha_1 \dots \alpha_k + (2^{k-1} - 3)(\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_2 \dots \alpha_k) + \dots \geq$$
$$\geq 5 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k > \alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2,$$
звідки випливає, що рівність неможлива.
Інакше, можна було зазначити, що для будь-якого i $\frac{2a_i+1}{a_i+1} \geq \frac{3}{2}$(оскільки це рівносильно тому, що $a_i \geq 1$), а тоді
$$3(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1) = (2\alpha_1 + 1) \dots (2\alpha_k + 1) \Rightarrow 3 =$$
$$= \frac{2a_1 + 1}{a_1 + 1} \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 1} \cdot \frac{2a_3 + 1}{a_3 + 1} \cdot \dots \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \geq \left(\frac{3}{2}\right)^3 > 3$$
і ми знову отримали суперечність, що й завершує доведення.

5. Множина прямих на площині називається *гарною*, якщо кожна пряма цієї множини перетинається з непарною кількістю інших прямих цієї множини. Знайдіть найменше натуральне k з такою властивістю: для кожних 2018 попарно різних прямих l_1, l_2, …, l_{2018}, існують такі прямі l_{2019}, l_{2020}, …, l_{2018+k}, для яких множина прямих l_1, l_2, …, l_{2018+k} є гарною.

Відповідь: 1010.
Розв'язання. Спочатку покажемо, що кількість прямих у гарній множині – парна. Методом від супротивного, якщо припустити, що їхня кількість непарна, то кожна пряма цієї множини перетинається з непарною кількістю прямих – тому якщо додати точки перетину по кожній прямій – вийде з одного боку непарне число (непарна кількість непарних доданків), а з іншого боку при такому додаванні кожна пара прямих, що перетинаються, рахується двічі, тобто одержане число має бути парним. Одержана суперечність завершує доведення. Таким чином $2018 + k$ – парне, тому й k – парне.

Розглянемо множину з 1009 пар паралельних прямих, усі пари різних напрямів. Тоді якщо $k < 1010$, то $k \leq 1008$. Тоді буде існувати напрямок з цього набору паралельних прямих, до якого не буде додана паралельна пряма. Виберемо одну з прямих l цього напрямку. Але тоді вона має перетинатися з усіма іншими прямими, окрім однієї з цієї множини. Таким чином вона перетинає парну кількість прямих (усі прямі гарної множини без двох), що суперечить умові. Таким чином щонайменше $k = 1010$.

Покажемо, що зазначене число задовольняє умови. Розглянемо усі напрями, які задають паралельні прямі із заданої множини, чия кількість парна. Таких напрямків не може бути більше 1009. Додамо до кожного такого напрямку ще одну паралельну їм пряму. Таким чином в утвореній множині кожна пряма буде паралельна парній кількості інших прямих цієї множини (можливо жодній). При цьому загальна кількість прямих у множині парна. І кожна пряма перетинає з них – непарну кількість. Таким чином ми отримали гарну множину.

Якщо було додано менше ніж 1010 прямих, то достатньо додати решту прямих того напрямку, якого немає серед існуючих. Тоді, оскільки усього прямих стане парна кількість, то кожна така пряма має непарну кількість точок перетину.

9 клас

1. У паралелограмі $ABCD$ прямі, на яких лежать бісектриси $\angle DAB$ та $\angle BCD$, співпадають. Знайдіть площу $ABCD$, якщо відомо, що $AB = 4$ та $\angle DAB = 60°$.

Відповідь: $8\sqrt{3}$.

Розв'язання. Бісектриси вказаних кутів співпадають, тоді $\angle DAC = \angle ACD$, тому $ABCD$ – ромб, звідси ΔABD рівнобедрений з кутом $60°$, а тому він рівносторонній (рис. 3). За умовою його сторона дорівнює 4, далі з відомих формул отримуємо, що

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}.$$

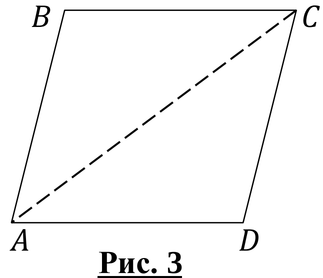


Рис. 3

2. Задача 8.2.

3. Заданий прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C. Точка D – середина сторони AC, точка E – основа перпендикуляра, що проведений з точки C на пряму BD. Доведіть, що дотична до описаного кола ΔAEC, що проведена у точці C, перпендикулярна AB.

Розв'язання. Нехай S – точка перетину дотичної в точці C та прямої AB (рис. 4), нам треба показати, що $\angle BSC = 90°$.

Оскільки $\angle BCD = 90° = \angle CED$, то $\Delta BDC \sim \Delta CDE \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC}$. Оскільки $DA = DC$, то $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DA}$. Разом з рівністю $\angle BDA = \angle EDA$ ми отримаємо, що $\Delta BDA \sim \Delta ADE$, звідки випливає, що $\angle ABD = \angle EAD$. Оскільки SC – дотична до описаного кола ΔAEC, то з властивостей дотичних $\angle EAD = \angle EAC = \angle SCE$. Тому $\angle SCE = \angle ABD = \angle SBE$. Таким чином чотирикутник $SBCE$ – вписаний, звідки $\angle BSC = \angle BBC = 90°$.

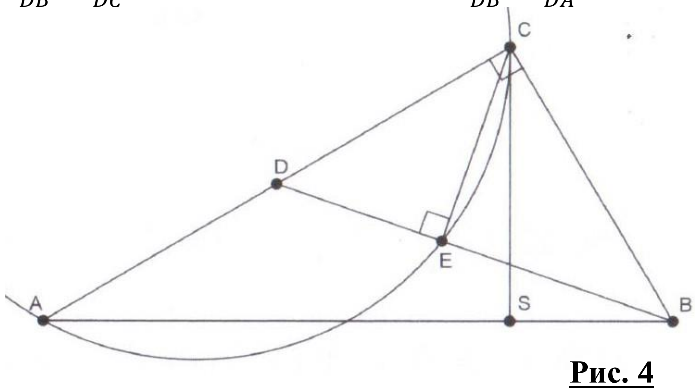


Рис. 4

4. Доведіть, що для усіх натуральних чисел n справджується нерівність: $\sigma(n) + \phi(n) \geq 2n$. Тут через $\sigma(n)$ позначена сума усіх дільників числа n, а через $\phi(n)$ – кількість чисел від 1 до n, що є взаємно простими з n.

Розв'язання. У випадку $n = 1$ маємо, що $\sigma(1) + \phi(1) = 2$, тому твердження задачі виконується.
Нехай $1 = d_1 < d_2 <\ldots< d_k = n$ – усі дільники числа $n > 1$ при цьому $k \geq 2$. Зазначимо, що $n - \phi(n)$ – кількість чисел, що не перевищують n та які не є взаємно простими з n. З іншого боку, якщо натуральне число m: $1 < m \leq n$, не є взаємно простим з n, то воно ділиться на якійсь з дільників n, оскільки $(m, n) = d_i$, $i = \overline{2, k}$.
Кількість чисел, що кратні якомусь з чисел $d_2, \ldots, d_k$ не перевищує величини $\frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_k}$
Звідки випливає оцінка: $n - \phi(n) \leq \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_k}$.
Крім того, очевидно, що

$$\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \ldots + \frac{n}{d_{k-1}} + \frac{n}{d_k} = d_k + d_{k-1} + \ldots + d_2 + d_1 = \sigma(n).$$

З двох останніх оцінок маємо, що

$$\sigma(n)+\phi(n)\geq \frac{n}{d_1}+\frac{n}{d_2}+\ldots+\frac{n}{d_{k-1}}+\frac{n}{d_k}+\left(n-\left(\frac{n}{d_2}+\ldots+\frac{n}{d_{k-1}}+\frac{n}{d_k}\right)\right)=\frac{n}{d_1}+n=n+n=2n.$$

Твердження доведене.

5. Задача 8.5.

<u>10 клас</u>

1. Для скількох двоцифрових натуральних чисел A справджується рівність:

$$\left|\sqrt{96}-A\right|-\left|A-\sqrt{9600}\right|=36\sqrt{6}?$$

<u>Відповідь:</u> 2 числа.

<u>Розв'язання</u>. Спочатку випишемо такі нерівності: $\sqrt{96}<10$, $97<\sqrt{9600}<98$, які легко перевіряються піднесенням до квадрату. Таким чином для усіх двоцифрових чисел A від 10 до 97 будуть справджуватися такі рівності:

$$\left|\sqrt{96}-A\right|-\left|A-\sqrt{9600}\right|=A-\sqrt{96}-\sqrt{9600}+A=2A-44\sqrt{6}\neq 36\sqrt{6}.$$

Для двоцифрових чисел, що лишилися, тобто 98 та 99 маємо такі рівності:

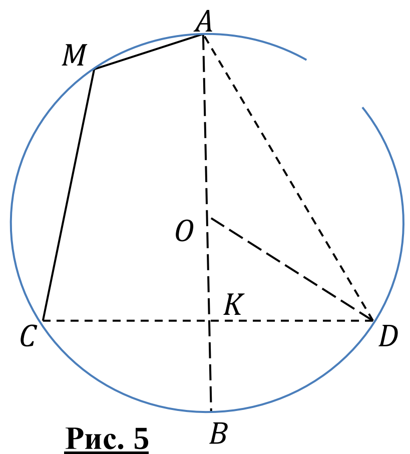
$$\left|\sqrt{96}-A\right|-\left|A-\sqrt{9600}\right|=A-\sqrt{96}-A+\sqrt{9600}=40\sqrt{6}-4\sqrt{6}=36\sqrt{6}.$$

Таким чином умову задовольняють 2 двоцифрових числа.

2. У колі ω з центром у точці O та діаметром AB проведена хорда CD, що перпендикулярна діаметру AB та проходить через середину радіуса OB. Чотирикутник $AMCD$ вписаний у коло ω. Чому дорівнює градусна міра $\angle AMC$?

<u>Відповідь:</u> 120°.

<u>Розв'язання</u>. Нехай радіус кола r, позначимо перетин діаметра AB та хорди CD через K (рис. 5). Тоді в прямокутному ΔOKD маємо, що $OK=\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}OD$, звідки $\angle ODK=30°$. Тоді $KD=\frac{\sqrt{3}}{2}r$ та $\operatorname{tg}\angle ADK=\frac{AK}{KD}=\sqrt{3}\Rightarrow\angle ADC=60°\Rightarrow\angle AMC=120°$, оскільки сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.



<u>Рис. 5</u>

3. Задача 9.3.

4. Задача 9.4.

5. У опуклому 10-кутнику провели усі діагоналі. Усі кути розбилися на 80 кутів, тобто кутів, між сторонами якого не проведена жодна інша діагональ. Відомо, що серед цих кутів 59 мають однакові значення. За таких умов яку максимальну кількість різних значень можуть приймати величини цих 80 кутів? Скільки разів при цьому кожна з величин зустрічається серед усіх кутів?

<u>Відповідь:</u> 3 різних кути, один кут 64 рази і два інших по 8 разів

<u>Розв'язання</u>. Сторони кутів кожного з кутів проходять через сусідні вершини многокутника, тобто кожен кут спирається на певну сторону. Такі кути та відповідні сторони назвемо *суміжними*. Таким чином суміжними до кожної сторони вважаються 8 кутів.

Назвемо 59 рівних кутів чорними, величину їх позначимо через α. Нехай a – сторона заданого 10-кутника P, що суміжна куту α. Тоді множина точок, що можуть спитатися на цю дугу та мати кут α – це дві дуги двох кіл, симетричні відносно цієї сторони. Позначимо через γ_a ту з двох дуг, що лежить по один бік з многокутником P відносно сторони a. Тоді усі кути величиною α, що суміжні з цією стороною a, мають вершину на дузі γ_a. Для сторони a позначимо через m_a кількість чорних кутів, що є суміжними з нею. За умовою $\sum m_a \geq 59$. Покажемо, що P – вписаний. Розглянемо три випадки.

Існує сторона a, для якої $m_a \geq 8$. Таким чином дуга γ_a містить принаймні 8 вершин многокутника P. Якщо додати два кінці сторони a, то усі вершини P лежать на цій дузі.

Існує сторона a, для якої $m_a = 7$. Таким чином дуга γ_a містить принаймні 7 вершин многокутника P. Якщо додати два кінці сторони a, то вже 9 з 10 вершин 10-кутника P лежать на цій дузі. Нехай існує вершина $A \notin \gamma_a$. Нехай $AB = b, AC = c$ – сторони многокутника, тоді $\gamma_a \neq \gamma_b$ та $\gamma_a \neq \gamma_c$. Але дуги γ_a, γ_b мають максимум дві спільні точки, одна з яких B. Тому на дузі γ_b розташовано не більше однієї вершини, тобто $m_b \leq 1$. З аналогічних міркувань $m_c \leq 1$. Крім того, $\forall s \neq b, c$ $m_s \leq 7$. Звідси маємо, що $\sum m_a \leq 1 \cdot 2 + 8 \cdot 7 = 58 < 59$ – суперечність.

Припустимо для кожної сторони $m_a \leq 6$, тоді просто для 9 сторін має бути $m_a = 6$ і для однієї сторони – маємо $m_a \in \{5, 6\}$. Покажемо, що за таких умов $\gamma_b = \gamma_c$ для довільних сусідніх сторін $b = AB$, $c = AC$. Дійсно, дуга γ_b містить окрім точок A, B, C принаймні $m_b - 1$ іншу вершину, як і дуга γ_c містить принаймні $m_c - 1$ вершину, відмінну від A, B, C. Дві дуги разом містять мінімум $m_b + m_c - 2 \geq 6 + 5 - 2 = 9$ вершин $D \neq A, B, C$. Таким чином для деяких двох вершин $D, E \neq A, B, C$ лежать на спільній дузі γ_b та γ_c. Також A лежить на цій дузі, звідки й випливає, що $\gamma_b = \gamma_c$, оскільки в них є три спільних точки.

Таким чином 10-кутник P – вписаний, таким чином для кожної сторони $a = BC$ для усіх вершин $V \neq B, C$ маємо $\angle BVC = \alpha_a$. Таким чином групи кутів розбиваються на групи по 8. Тобто рівних кутів буде принаймні $64, 72$ або 80. Таким чином максимум різних значень – це 3, якщо однакових кутів буде 64.

11 клас

1. Серед усіх цілих чисел знайдіть ціле число n, що є найближчим до числа

$$a = \sqrt{2022 \cdot 2024}.$$

Відповідь: $n = 2023$.
Розв'язання. Розглянемо різницю

$$2023 - a = 2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024} = 2023 - \sqrt{(2023-1)(2023+1)} = 2023 - \sqrt{2023^2 - 1} =$$
$$= \frac{\left(2023 - \sqrt{2023^2-1}\right)\left(2023 + \sqrt{2023^2-1}\right)}{2023 + \sqrt{2023^2-1}} = \frac{1}{2023 + \sqrt{2023^2-1}} < \frac{1}{1000}.$$

Тобто число 2023 відстоїть від числа a на відстань менше $\frac{1}{1000}$, звідки зрозуміло, що усі інші цілі числа відстоять на більшій відстані, тобто 2023 – шукане число.

2. Дійсні числа x, y, z задовольняють умови:

$$\frac{xy}{z} = 2 - \sqrt{2}, \frac{yz}{x} = 2 + \sqrt{2}, \frac{zx}{y} = 3.$$

Чому дорівнює значення виразу $S = x^2 + y^2 + z^2$?

Відповідь: 14.
Розв'язання. Перемножимо усі три рівності і матимемо, що $xyz = abc$, де $a = 2 - \sqrt{2}, b = 2 + \sqrt{2}, c = 3$. Тоді $z^2 = xyz \cdot \frac{z}{xy} = abc \cdot \frac{1}{a} = bc$, аналогічно $x^2 = ac$ та $y^2 = ab$. Завдяки шукане значення дорівнює

$$ab + ac + bc = (4 - 2) + \left(6 - 3\sqrt{2}\right) + \left(6 + 3\sqrt{2}\right) = 14.$$

Зазначимо також, що такі числа існують, наприклад, $x = \sqrt{3(2 - \sqrt{2})}, y = \sqrt{2}$ та $z = \sqrt{3(2 + \sqrt{2})}$, хоча у розв'язку наводити приклад не обов'язково

3. Вписане у трикутник ABC коло Ω дотикається до сторін AB та AC у точках K та L відповідно. Пряма BL перетинає вписане коло вдруге в точці M. Коло ω, що проходить через точку M та дотикається до сторін AB та BC у точках P та Q відповідно, вдруге перетинає коло Ω у точці N. Доведіть, що якщо $KM||AC$, то точки P, N та L лежать на одній прямій.

***Розв'язання*.** З умов задачі зрозуміло, що вписане коло та коло ω гомотетичні. Нехай $BL \cap \omega = \{X, N\}$ (рис. 6). Тоді маємо такі відповідності при вказаній гомотетії: $X \to M$, $M \to L$, $P \to K$, тому рівними будуть і такі кути: $\angle PXM = \angle KML$. Також помітимо, що $\angle KML = \angle KLA = \angle LKM$. І остаточно знаходимо, що

$$\angle PNM + \angle LNM = 180° - \angle PXM + \angle LKM = 180° - \angle KML + \angle KML = 180°,$$

що й завершує доведення.

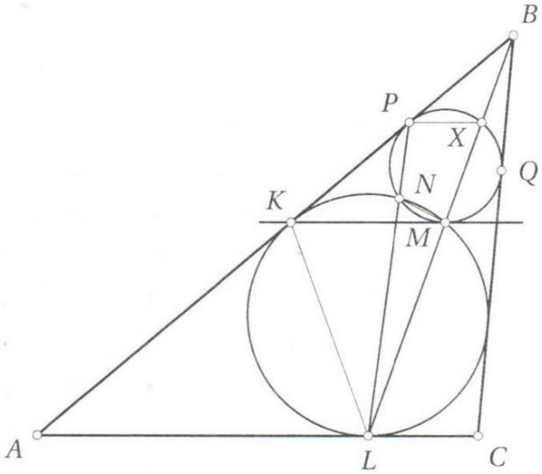


Рис. 6

4. Знайдіть усі послідовності простих, не обов'язково різних, чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, для яких існує таке ціле число k, що для кожного натурального n, справджується таке співвідношення: $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n + k$.

***Відповідь*:** $p_n = p\ \forall n \in N$, де p – довільне просте число.
***Розв'язання*.** Доведемо, що то може бути лише стаціонарна послідовність простих чисел.
Розв'язавши стандартним чином це рекурентне співвідношення отримаємо, що

$$p_n = A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - k.$$

Якщо $A \neq 0$, то $p_n \to \infty$, коли $n \to \infty$, а тоді з деякого моменту усі p_n будуть за абсолютною величиною більше p_1, але ця послідовність періодична за модулем p_1, оскільки усього існує не більше p_1^2 різних пар остач пари членів (p_{n+1}, p_n), тому є нескінченна кількість елементів, що дорівнюють за модулем p_1 числу p_1, а тому не можуть бути простими, оскільки більше p_1,за абсолютною величиною.
Таким чином $A = 0$. Тоді $p_n \to -k$, коли $n \to \infty$, й тому $p_n = -k$ з деякого момента, а тоді отримаємо, що також $B = 0$. Й наша відповідь тоді $p_n = p$ та $k = -p$.

5. Задача 10.5.