XIX Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Перший тур

«Люди нічому не вірять так твердо, як тому,
про що вони менше усього знають».
Мішель де Монтень

Умови та розв'язання задач

Наймолодша ліга

1. Четири селянина переорали дяляночку за 2 години. При цьому вони орали по одному по черзі і кожний з них орав стільки часу, скільки треба іншим трьом, щоб зорати половину діляночки, якби вони працювали разом. За який час у хвилинах вони зорали б ділянку, якби орали усі разом?

Відповідь: 40 хвилин.
Розв'язання. Уявимо собі, що перший працює на заданій ділянці, а інші троє паралельно орють сусідню ділянку. Тоді поки перший завершив свою частину троє інших зорали половину такої діляночки. Після цього другий починає орати першу ділянку, а інші троє продовжують орати другу, тоді поки другий зробив свою частку, то ці троє зорали іншу половину заданої діляночки. І так ще 2 рази для ще однієї уявної сусідньої ділянки. Таким чином за 2 години вони мали проорати разом 3 такі ділянки. Таким чином 1 ділянку вони б зорали за $\frac{2}{3}$ годин, або за 40 хвилин.

2. Обчисліть значення виразу $(\alpha^2-1)^8(2\alpha^2+3\alpha+2)$, де α – корінь рівняння $\alpha^3-\alpha=1$.

Відповідь: 1.
Розв'язання. Спочатку розглянемо в яких межах може бути значення α. Розглянемо рівняння $\alpha^3=\alpha+1$. При $\alpha\in(-1,0)$ ліворуч від'ємне, а праворуч – додатне значення. При $\alpha<-1$ запишемо це рівняння у вигляді $\alpha(\alpha^2-1)=1$. Тоді ліворуч від'ємне значення, а праворуч додатне число 1. Значення $\alpha=-1$ та $\alpha=0$ перевіряються безпосередньо.
Таким чином $\alpha>0$. Далі зробимо такі перетворення, з урахування рівності $\alpha^4=\alpha^2+\alpha$:

$$2\alpha^2+3\alpha+2=\alpha^2+\alpha+(\alpha^2+2\alpha+2)=\alpha^4+\alpha^2+2(\alpha+1)=\alpha^4+2\alpha^3+\alpha^2=(\alpha^2+\alpha)^2=\alpha^8$$
$$\Rightarrow\ (\alpha^2-1)^8(2\alpha^2+3\alpha+2)=\frac{1}{\alpha^8}\cdot\alpha^8=1.$$

3. У деякий прямокутник можна помістити без перетинів 100 кругів радіуса 2. Чи обов'язково у такмй прямокутник можна помістити без перетинів 400 кругів радиуса 1?

Відповідь: так.
Розв'язання. Розріжемо прямокутник на 4 удвічі менших прямими, що сполучають середини протилежних сторін. У кожній з отриманих частин можна розмістити по 100 кругів радіуса 1, оскільки у двічі більшому можна розмістити 100 кругів радіуса 2. Звідси випливає, що так у заданому прямокутнику можна розмістити 400 кругів радіуса 1.

4. Два однакових прямокутні трикутники ABC та NCM розташовані так, як показано на рис. 1, при цьому вершина прямого кута одного потрапила на сторону іншого. Доведіть, що ΔMBC рівносторонній.

Розв'язання. як відповідні у двох рівних трикутника $\angle ABC = \angle NCM$, тому $BM = MC$. Крім того, як відповідні рівні сторони $CM = BC$. З двох останніх рівностей випливає, що ΔMBC – рівносторонній.

5. У країні 2022 міста. Між кожними двома треба організувати авіасполучення однієї з трьох авіакомпаній. Чи можна це зробити так, щоб жодна авіакомпанія не мала таку властивість – з будь-якого міста можна потрапити в будь-яке інше місто тільки її рейсами?

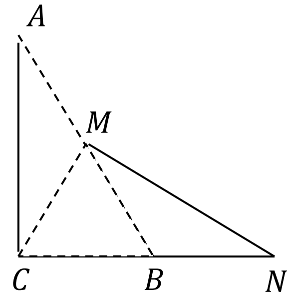


Рис. 1

Відповідь: так.
Розв'язання. Розглянемо два міста А та Б. Перша компанія здійснює усі рейси з міста А, окрім рейсу у місто Б, друга компанія – усі рейси з міста Б, окрім рейсу в місто А. третя компанія – усі інші перевезення, тобто між А та Б та усі рейси, в яких А та Б не задіяні. Покажемо, що такий розподіл рейсів задовольняє умови. Між А та Б не можна долетіти тільки першою та тільки другою компаніями. А між А та будь-яким містом В, відмінним від Б, не можна дістатися лише літаками третьої компанії.

6. Кожну комірку 1×1 дошки 10×10 пофарбовано в один з кольорів. Яку найбільшу кількість кольорів при цьому можна використати, щоб у кожному рядку та у кожному стовпчику було використане не більше 5 різних кольорів?

Відповідь: 41.
Розв'язання. Спочатку покажемо, що можна використати 41 колір (рис. 2).

1	1	1	1	1	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	6	7	8	9	1
1	1	1	1	10	11	12	13	1	1
1	1	1	14	15	16	17	1	1	1
1	1	18	19	20	21	1	1	1	1
1	22	23	24	25	1	1	1	1	1
26	27	28	29	1	1	1	1	1	1
31	32	33	1	1	1	1	1	1	30
36	37	1	1	1	1	1	1	34	35
41	1	1	1	1	1	1	38	39	40

Рис. 2

Покажемо, що це максимальна кількість. Якщо не буде рядка з 5 різними кольорами, то всього різних кольорів буде не більше ніж $4 \cdot 10 = 40$ кольорів. Отже, без обмеження загальності, будемо вважати, що 1-й рядок заповнений 5 різними кольорами. Припустимо, що є інший ряд, що містить 5 нових кольорів. Без обмеження загальності вважатимемо, що то буде 2-й рядок. Тоді кожна колонка вже містить по 2 різних кольори. Тоді в кожному стовпчику може додатися не більше ніж по 3 нових кольори, тобто разом їх стане не більше ніж $5 + 5 + 3 \cdot 10 = 40$ кольорів.
Таким чином у кожному рядку крім першого може бути не більше 4 нових кольорів, тому загалом – не більше $5 + 4 \cdot 9 = 41$.

7. Починаючи з деякого натурального числа, Петрик кожним своїм ходом строго по черзі або збільшував отримане число на деяку із його цифр, або зменшував (можливо на цифру 0). Першою була операція додавання. З якого найменшого числа мав починати Петрик, щоб на певному кроці отримати число 2022?

Відповідь: 991.
Розв'язання. Розглянемо перший перехід від трицифрового числа до чотирицифрового (якщо такого не було, то початкове число не менше 1000). Це було додавання. Число, яке збільшували, мало бути не менше за 991. Якщо то був не перший крок, то перед цим ходом було віднімання, але з будь-якого числа вигляду $\overline{99a}$ не можна отримати число, що не менше 991. Значить він мав розпочати з 991. Покажемо, як можна отримати 2022. Спочатку так:

$$991 \to 1000 \to 999 \to 1008 \to 1007 \to 1014 \to 1013 \to 1016 \to 1015 \to 1020 \to 1019 \to \cdots$$

Далі кожного разу віднімається цифра 1, а додається остання цифра, при цьому остання цифра змінюється таким чином: $0 \to 9 \to 8 \to 7 \to 4 \to 3 \to 6 \to 5 \to 0$, за такий один цикл число збільшується на 20, тому з числа 1000 після 50 таких циклів число стане 2000, після цього віднімаємо кожного разу 0 та додаємо 2 отримаємо шукане число 2022.

8. Знайдіть усі такі трійки натуральних чисел $a \leq b \leq c$, які задовольняють такі умови: вони є попарно взаємно простими та кожне з них є дільником числа $a + b + c$.

Відповідь: $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)$.
Розв'язання. Оскільки $a \leq b \leq c$, то $c < a + b + c \leq 3c$. Таким чином можливі два варіанти.
Випадок 1. $a + b + c = 3c \Rightarrow a = b = c$, оскільки вони взаємно прості, то це нам дає перший розв'язок: $a = b = c = 1$.
Випадок 2. $a + b + c = 2c \Rightarrow a + b = c$. За умовою b має бути дільником числа $a + b + c = 2c$, тобто c або має спільні дільники з b, що суперечить умові, або $b \leq 2$. Тоді $a = 1$ та є два варіанти для значення c: $b = 1$, тоді $c = 2$, або $b = 2$, тоді $c = 3$.

Молодша ліга

1. Задача № 1 наймолодшої ліги.

2. Задача № 2 наймолодшої ліги.

3. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною у точці A проведено бісектрису BL. На основі BC та бічній стороні AB вибрані такі точки D та E відповідно, що $AE = \frac{1}{2}AL = CD$. Доведіть, що $LE = LD$.

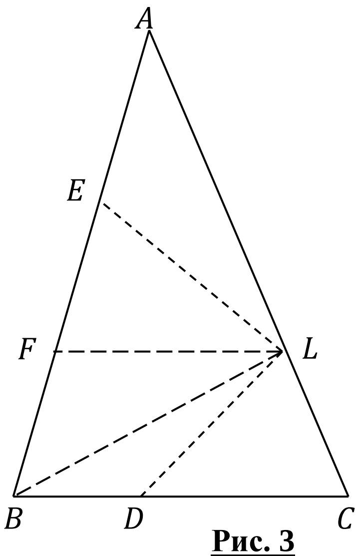


Рис. 3

Відповідь: так.
Розв'язання. Проведемо відрізок $LF||BC$, де $F \in AB$ (рис. 3). Зрозуміло, що $\angle AFL = \angle ABC = \angle ACB = \angle ALF$, та $EF = AF - AE = AL - AE = AE = CD$.
Оскільки BL – бісектриса, то $\angle FBL = \angle LBD = \angle BLF$, тому ΔFLB рівнобедрений, звідки $FL = FB = LC$. Звідси випливає рівність $\Delta FLE = \Delta CDL$, з якої матимемо шукану рівність відрізків $LE = LD$.

4. Рівносторонні трикутники OAB та OCD мають одну спільну точку – вершину O. Точки M та L – середини сторін AB та CD, а точки K та N – середини відрізків AD та BC відповідно, як то показане на рис. 4. Доведіть, що $ML \perp KN$.

Відповідь: так.
Розв'язання. З умов випливає, що $\Delta AOC = \Delta BOD$ за двома сторонами та кутом між ними (рис. 4). Звідси $AC = BD$. Чотирикутник $MNLK$ – паралелограм, оскільки його сторони – середні лінії відповідних трикутників, тобто $MN = KL = \frac{1}{2}AC$ та $MK = NL = \frac{1}{2}BD$. З останнього – цей паралелограм ромб, а тому має перпендикулярні діагоналі, що й завершує доведення.

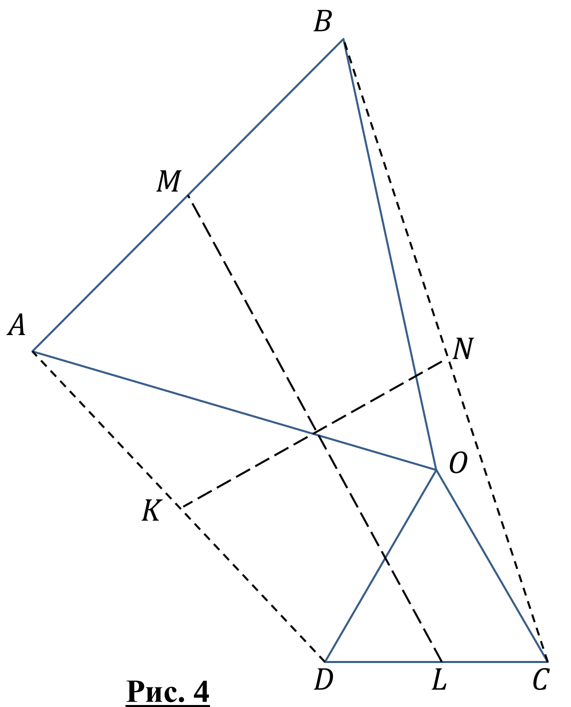


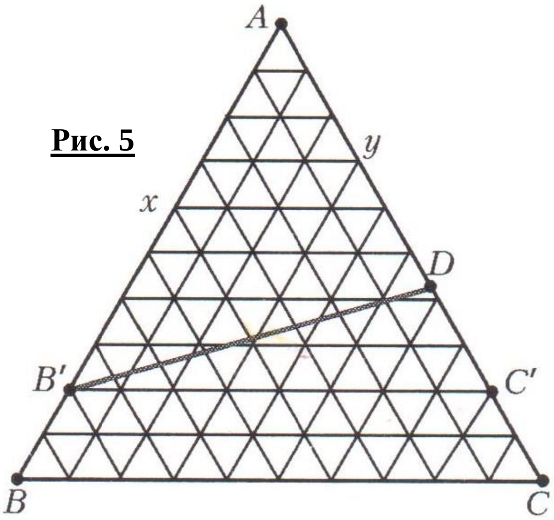
Рис. 4

5. Рівносторонній трикутник зі стороною 20 розрізаний на 400 рівносторонніх трикутників зі стороною 1 трьома сукупностями прямих, що паралельні сторонам трикутника. Яку найбільшу кількість таких трикутників можна перетнути по внутрішнях точках (тобто точках, що належать трикутнику, але не лежать на його межі) однією прямою.

<u>Відповідь:</u> 39.

<u>Розв'язання.</u> Наведену у відповіді кількість перетинів має пряма, що паралельна одній із сторін великого трикутника та перетинає трикутнички, що мають свої сторони чи вершини на цій стороні.

Рис. 5



Покажемо, що то є найбільше можливе значення. Будемо рахувати не точки перетину з трикутниками, а точки перетину прямої з лініями сітки, ця кількість буде на 1 менша ніж шукана. Нехай пряма l перетинає сторони AB та AC трикутника на відстанях x та $y \le x$ (можуть дорівнювати 20) якщо рахувати від вершини A відповідно. Якщо $\lceil x \rceil = m$, то замість заданого ΔABC достатньо розглянути $\Delta AB'C'$, де $AB' = m$ (рис. 1) та він розбитий на m^2 трикутників. Нехай l перетинає сторону AC' у точці D, при цьому відрізки AD та $C'D$ містять всередині (не рахуючи кінців цих відрізків) по r та s вершин трикутників відповідно. Тоді $r + s \le m - 1$. Тоді пряма l перетинає $m - 1$ межу трикутників, що паралельні AC, та r сторін, що паралельні AB, а також s сторін, що паралельні BC. Тому загальна кількість точок перетину прямої l з сторонами одиничних трикутників дорівнює $r + s + m - 1 \le 2m - 2$. Тому кількість перетинів трикутників по внутрішніх точках не перевищує $2m - 1 \le 39$.

6. На тротуарі написані 999 натуральних чисел, не обов'язково усі різні і не обов'язково упорядковані за зростанням чи спаданням. Петрик обвів червоною крейдою 500 з цих чисел, які зліва направо дорівнювали $1, 2, \dots, 500$. Василь обвів синьою крейдою числа, що зліва направо дорівнюють $500, 499, \dots, 1$. Доведіть, що число, що записане посередині (тобто є 500-м ліворуч та праворуч) обведене двічі.

<u>Розв'язання.</u> Зрозуміло з принципу Діріхле, що принаймні одне число обведене двічі. Так само зрозуміло, що два числа не можуть бути обведеними двома кольорами, тому що обведені червоним числа зростають зліва направо, а сині – навпаки, спадають. Нехай двічі обведене число дорівнює k, тоді всі інші числа обведені рівно одним кольором.

Тоді ліворуч від цього двокольорового числа k є червоні числа $1, 2, \dots, k - 1$. Так само ліворуч від нього є сині числа $500, 499, \dots, k + 1$. Тобто ліворуч від числа k розташоване рівно 499 чисел, аналогічно й праворуч, що й треба було довести.

Приклад розташування, для якого це можливо, очевидний, наприклад, такі два варіанти:

$$1, 2, \dots, 499, 500, 499, \dots, 2, 1 \text{ або } 500, 499, \dots, 2, 1, 2, \dots, 499, 500.$$

7. Для натурального числа n позначимо через $\sigma(n)$ – суму натуральних дільників числа n. Тоді нехай $N = 2^r b$, де b – непарне число. Відомо, що $\sigma(N) = 2N - 1$. Доведіть, що числа b та $\sigma(b)$ – взаємно прості.

<u>Відповідь:</u> так.

<u>Розв'язання.</u> Нехай $d_1, d_2, \dots, d_k$ – усі дільники числа b. Тоді вираз

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^r)(d_1 + d_2 + \dots + d_k)$$

після розкриття дужок стає сумою усіх дільників числа N (адже 2^r та b взаємно прості), звідси маємо рівність:

$$\sigma(N) = (2^{r+1} - 1)\sigma(b) = 2N - 1 = 2^{r+1}b - 1 \Rightarrow$$

Числа $\sigma(b)$ та b не можуть мати спільних дільників, бо цей дільник став би дільником і числа 1, що й завершує доведення

8. Задача № 8.1 наймолодшої ліги.

Середня ліга

1. Доведіть, що для невід'ємних чисел a, b, c, які задовольняють умову $a^2+b^2+c^2 \le 3$, справджується нерівність:
$$(a+b+c)(a+b+c-abc) \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a).$$

***Розв'язання*.** Спочатку доведемо таку лему.

Лема 1. Якщо невід'ємні числа a, b, c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2 \le 3$, то $a+bc \le 2$.

Доведення. Якщо $bc > 2$, то $3 \ge a^2+b^2+c^2 \ge 2bc > 4$, тому $bc \le 2$. Якщо тепер ми доведемо, що $3-b^2-c^2 \le (2-bc)^2 \Rightarrow a^2 \le 3-b^2-c^2 \le (2-bc)^2 \Rightarrow a \le 2-bc$, тобто доведемо і лему. $3-b^2-c^2 \le (2-bc)^2 \Leftrightarrow (bc-1)^2+(b-c)^2 \ge 0$.
Лема доведена.

Лема 2. Якщо невід'ємні числа a, b, c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2 \le 3$, то $\sqrt{(4-a^2)(4-c^2)} \ge ac+2b$.

Доведення. Очевидно, що $a, c < 2$. Тому достатньо показати, що
$$(4-a^2)(4-c^2)-(ac+2b)^2 = 16-4(a^2+b^2+c^2+abc) \ge 0.$$
Це випливає з того, що $abc \le \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \le 1$.
Лема доведена.

Лема 3. Якщо невід'ємні числа a, b, c задовольняють умову $a^2+b^2+c^2 \le 3$, то $a^2+b^2+c^2 \ge a^2b+b^2c+c^2a$.

Доведення. З нерівності між середніми
$$a^2+\frac{1}{4}(ab+c^2)^2 \ge a^2b+ac^2.$$
Так само з нерівності між середніми та лемою 2 маємо, що
$$\frac{1}{4}((4-a^2)b^2+(4-c^2)c^2) \ge \frac{1}{2}\sqrt{(4-a^2)(4-c^2)}bc \ge \frac{1}{2}(ac+2b)bc = b^2c+\frac{1}{2}abc^2.$$
З двох останніх нерівностей отримаємо бажане.
Лема доведена.

З леми 1 маємо, що
$$a^2b+ab^2c \le 2ab,\ b^2c+bc^2a \le 2bc,\ ac^2+a^2bc \le 2ca.$$
Додаємо, і отримуємо, що
$$2(ab+bc+ca) \ge a^2b+b^2c+c^2a+abc(a+b+c).$$
З леми 3 маємо, що
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge$$
$$\ge a^2b+b^2c+c^2a+(a^2b+b^2c+c^2a+abc(a+b+c)),$$
яка відповідає потрібній нерівності.

2. Функція $f: R \to R$ – відмінна від сталої. Доведіть, що існують дійсні числа x, y, для яких справджується нерівність: $f(x+y) < f(xy)$.

***Розв'язання*.** Методом від супротивного, нехай $\forall x, y \;\; f(x+y) \ge f(xy)$. Якщо числа a, b задовольняють умову $a^2 \ge 4b$, то існують дійсні числа x, y, що задовольняють умови: $a = x+y$, $b = xy$. Таким чином з умови $a^2 \ge 4b$ випливає, що $f(a) \ge f(b)$.
Покладемо $x = 1$ та $y = c-1$ $\forall c$, то з умови $f(x+y) \ge f(xy)$ матимемо, що $f(c) \ge f(c-1) \Rightarrow f(c) \ge f(c-1) \ge \ldots \ge f(c-n)$.
Тепер виберемо a, b, для яких $f(a) < f(b)$. Для достатньо великого n матимемо, що $a-n$ – від'ємне та $(a-n)^2 > 4b$. Тоді $f(a) \ge f(a-n) \ge f(b) > f(a)$ – суперечність.

3. Нехай E та F – дві точки на стороні CD опуклого чотирикутника $ABCD$, для яких справджується умова $0 < DE = FC < CD$. Нехай K – друга точка перетину описаних кіл ΔADE та ΔACF, а L – друга точка перетину описаних кіл ΔBDE та ΔBCF. Доведіть, що точки A, B, K, L лежать на одному колі.

Розв'язання. Позначимо точки: $M = DC \cap AK$, $N = DC \cap BL$. Розглядаючи степінь точки M відносно описаних кіл ΔADE та ΔAFC, одержимо (рис. 6):

$$ME \cdot MD = MK \cdot MA = MF \cdot MC.$$

Оскільки $DE = FC$, то M – середина відрізка CD. Аналогічно

$$NE \cdot ND = NL \cdot NB = NF \cdot NC.$$

Таким чином N – середина відрізка CD, тому $M = N$. З отриманих вище рівностей маємо, що

$$MK \cdot MA = ME \cdot MD = NE \cdot ND = \\ = NL \cdot NB = ML \cdot MB.$$

Звідси буде випливати, що K, A, L, B лежать на одному колі.

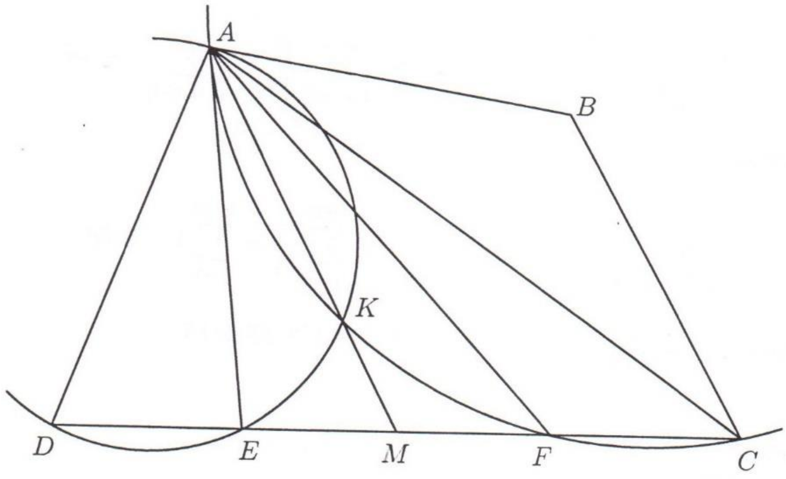


Рис. 6

4. На площині є коло k з центром у точці S з радіусом 3, а також фіксована точка A, для якої $AS = 9$. Знайдіть ГМТ центрів описаних кіл ΔABC, де BC пробігає усі діаметри кіл k.

Відповідь: пряма, що перпендикулярна відрізку AS, перетинає його та проходить на відстані 5 від точки A.

Розв'язання. Розглянемо рівнобедрений ΔABC, з основою BC (рис. 7). Тоді одна з точок шуканого ГМТ – це центр описаного кола для такого трикутника, тобто певна точна на відрізку AS, для якої $AO = BO = CO = 5$. Тоді $SO = 4$. Покажемо, що шуканим ГМТ є пряма p, що перпендикулярна прямій AS та проходить через точку O, тобто на відстані 5 від точки A. Позначимо $r = 3 = \frac{1}{2}BC$.

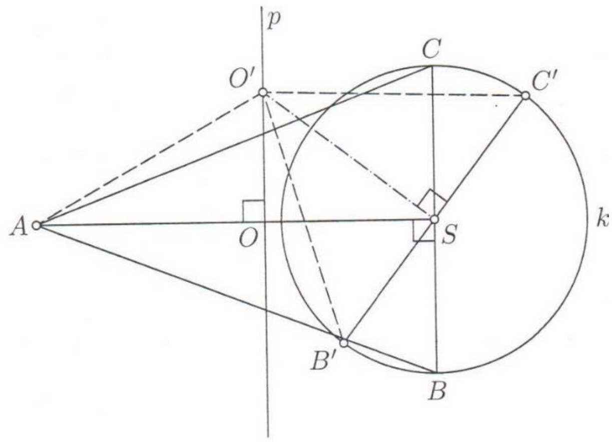


Рис. 7

Розглянемо довільний $\Delta AB'C'$, де $B'C'$ -- діаметр кола k. Розглянемо точку O', що є перетином прямої p та серединного перпендикуляра до відрізку $B'C'$. Тоді з прямокутних трикутників $O'C'S$ та $O'OS$:

$$O'B' = O'C' = \sqrt{(O'S)^2 + r^2} = \sqrt{(OO')^2 + OS^2 + r^2}.$$

З іншого боку

$$O'A' = \sqrt{(O'O)^2 + AO^2} = \sqrt{(O'O)^2 + BO^2} = \sqrt{(OO')^2 + OS^2 + r^2}.$$

Таким чином точка O' -- центр описаного кола $\Delta AB'C'$.

Повністю аналогічно можна показати, що довільна точка $O' \in p$ є центром описаного кола деякого $\Delta AB'C'$, для цього достатньо провести діаметр $B'C' \perp O'S$, звідки неважко отримати, що $AO' = B'O' = C'O'$, що й завершує доведення.

5. Задача № 5 молодшої ліги.

6. Чи можна прямокутник 5×7 покрити куточками з трьох клітин 1×1 у декілька шарів таким чином, щоб кожна клітинка прямокутника 5×7 виявилася покритою однаковою кількістю клітин куточків?

Відповідь: ні.

Розв'язання. Зафарбуємо клітини прямокутника 5×7 як то показане на рис. 8. Припустимо, що можна покрити куточками його як сказане в умовах і усього таких куточків використано n. Позначимо сумарну кількість клітин 1×1, що покривають чорні клітини через B, а сумарну кількість, що покривають білі – через W. З одного боку вони покриті однаковою кількістю шарів, тому $B = 12k$ та $W = 23k$, тобто $B > \frac{1}{2}W$.
З іншого боку, якщо було використане m куточків, то кожний з них покриває або 3 білі клітинки, або 1 чорну та 2 білі. Якщо все це додати, то матимемо, що $B \leq \frac{1}{2}W$.
Одержана суперечність показує неможливість такого покриття.

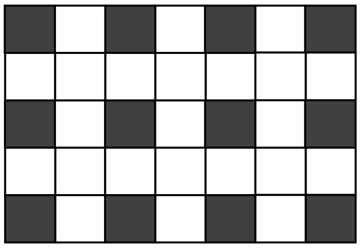


Рис. 8

7. Задача № 7 молодшої ліги.

8. Функція $f: \mathrm{N} \to \mathrm{N} \cup \{0\}$ задовольняє такі умови:

- $f(1) = 0$;
- $f(p) = 1$ для кожного простого p;
- для довільних натуральних x, y маємо $f(xy) = yf(x) + xf(y)$.

Знайдівть найменше натуральне $n \geq 2023$, для якого $f(n) = n$.

Відповідь: 3125.
Розв'язання. Спочатку ММІ покажемо, що для довільного простого p та натурального k справджується рівність: $f(p^k) = kp^{k-1}$.
Для $k = 1$ це випливає з умови.
Нехай це справджується для деякого натурального k. Тоді
$$f(p^{k+1}) = f(p \cdot p^k) = pf(p^k) + p^k f(p) = kp^k + p^k = (k+1)p^k.$$
Рівність доведена.

Тепер так само ММІ по t доведемо рівність:
$$f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}\right) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t}\right),$$
де $p_1, p_2, \dots, p_t$ – попарно різні прості числа, $a_1, a_2, \dots, a_t$ – натуральні числа.
Для $t = 1$ все випливає з попереднього твердження.
Припустимо, що твердження справджується для деякого t, розглянемо його для $t + 1$.
$$f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} p_{t+1}^{a_{t+1}}\right) = f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} \cdot p_{t+1}^{a_{t+1}}\right) =$$
$$= p_{t+1}^{a_{t+1}} f\left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}\right) + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} f\left(p_{t+1}^{a_{t+1}}\right) =$$
$$= p_{t+1}^{a_{t+1}} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t}\right) + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} a_{t+1} p_{t+1}^{a_{t+1}-1} =$$
$$= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} p_{t+1}^{a_{t+1}} \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t}\right) + p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} p_{t+1}^{a_{t+1}} \frac{a_{t+1}}{p_{t+1}} =$$
$$= p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} p_{t+1}^{a_{t+1}} \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t} + \frac{a_{t+1}}{p_{t+1}}\right),$$
твердження доведене.

Таким чином для пошуку шуканого найменшого натурального числа n треба, щоб справджувалася відповідна рівність. Нехай $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t}$, тоді з умови $f(n) = n$, маємо:
$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} = f(n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \dots + \frac{a_t}{p_t} = 1.$$
Без обмеження загальності вважатимемо, що для шуканого числа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_t^{a_t} \geq 2023$ мають місце умови: $p_1 < p_2 < \dots < p_t$. Останню рівність можна переписати таким чином:
$$p_1 p_2 \dots p_t = a_1 p_2 \dots p_t + p_1 a_2 \dots p_t + \dots + p_1 p_2 \dots a_t.$$
Сума та усі доданки окрім першого у правій частині містять як множник p_1. Це означає, що й доданок

$a_1 p_2 \dots p_t$ також має ділитися на p_1. Оскільки $p_1 < p_2 < \dots < p_t$ – прості числа, то $a_1 \,\vdots\, p_1$, а тому $\frac{a_1}{p_1} \geq 1$. Тобто шукане число має мати вигляд $n = p^p$, де p – просте число. Зрозуміло, що тепер достатньо просто знайти найменше просте число, для якого справджується умова $p^p \geq 2023$. Очевидно, що шукане $p = 5$ та $n = 5^5 = 3125$.

Старша ліга

1.1. Задача № 1 середньої ліги.

1.2. Натуральні числа $k \leq n$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \frac{2(n-k+1)}{n+k}.$$

Розв'язання. Середнє арифметичне більше за середнє гармонічне, якщо не усі числа рівні, тому

$$\frac{\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}}{n-k+1} \geq \frac{n-k+1}{k+(k+1)+\dots+n} = \frac{n-k+1}{\frac{1}{2}(n+k)(n-k+1)} = \frac{2}{n+k},$$

яка рівносильна заданій нерівності.

2.1. Знайдіть усі функції $f\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, які для всіх $x, y > 0$ задовольняють рівності:

$$f\left(\frac{f(y)}{f(x)} + 1\right) = f\left(x + \frac{y}{x} + 1\right) - f(x).$$

Відповідь: $f(x) = ax$, для довільного додатного a.
Розв'язання. Покладемо $x = y \Rightarrow f(x+2) - f(x) = f(2) > 0$.
Покажемо, що f – ін'єкція. Виберемо додатні x_1, x_2, що задовольняють умову $x_2 - x_1 > 1$.
Покладемо $x = x_1$, $y = x_1(x_2 - x_1 - 1)$:

$$f\left(\frac{f(x_1(x_2-x_1-1))}{f(x_1)} + 1\right) = f(x_1 + x_2 - x_1 - 1 + 1) - f(x_1) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0.$$

Таким чином, якщо для додатних x_1, x_2 маємо $f(x_2) = f(x_1)$, то $|x_2 - x_1| \leq 1$.
Припустимо, що для $a \neq b$ справджується умова $f(a) = f(b)$. Тоді при $x = a$ та $x = b$ матимемо, що

$$f\left(a + \frac{y}{a} + 1\right) - f(a) = f\left(\frac{f(y)}{f(a)} + 1\right) = f\left(\frac{f(y)}{f(b)} + 1\right) = f\left(b + \frac{y}{b} + 1\right) - f(b) \Rightarrow f\left(a + \frac{y}{a} + 1\right) = f\left(b + \frac{y}{b} + 1\right).$$

Для достатньо великих y маємо, що $\left|a + \frac{y}{a} + 1 - b - \frac{y}{b} - 1\right| = \left|a - b + y\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\right| > 1$, а це суперечить попередньому твердженню.
Покладемо $x = 2$: $f\left(\frac{f(y)}{f(2)} + 1\right) = f\left(3 + \frac{y}{2}\right) - f(2) = f\left(1 + \frac{y}{2}\right) \Rightarrow$ з ін'єктивності функції $\frac{f(y)}{f(2)} + 1 = 1 + \frac{y}{2} \Rightarrow f(y) = \frac{1}{2} \cdot f(2) y$. Таким чином $f(x) = ax$. Підстановкою переконуємося, що усі такі функції задовольняють умову.

2.2. Задача № 2 середньої ліги.

3.1. Нехай A та B – деякі дві точки на колі Г. Для змінної точки $P \in \Gamma$, що відмінна від точок A, B, знайдіть ГМТ M,

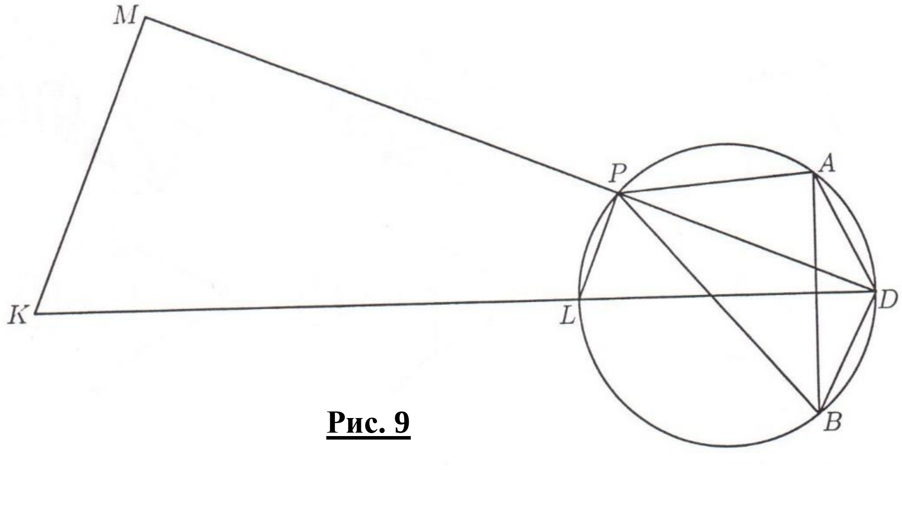


Рис. 9

для яких промінь PM – протилежно направлений до бісектриси $\angle APB$ та $MP = AP + PB$.

<u>Відповідь:</u> точка M лежить на частині кола з діаметром KD, що лежить всередині $\angle ADB$, або на частині кола з діаметром $K'L$, що лежить всередині $\angle ALB$, де точки K та K' лежать на діаметрі $LD \perp AB$ всередині кутів $\angle ADB$ та $\angle ALB$ відповідно, та задовольняють умови $KD = 2R\,(1 + 2\sin\alpha)$ та $K'L = 2R\,(1 + 2\sin(90° - \alpha))$ як на малюнку, позначення R та α див. в розв'язанні.

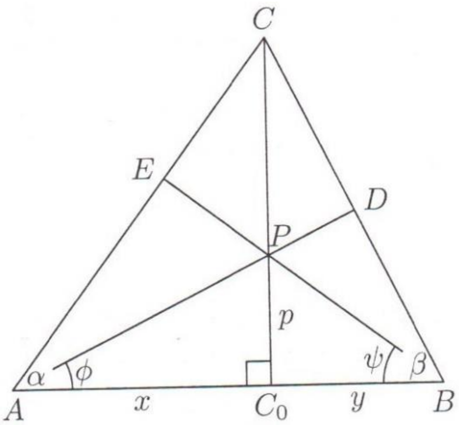
<u>Розв'язання.</u> Нехай DL – діаметр, що перпендикулярний до хорди AB (рис. 1). Нехай $\alpha = \angle LDA = \angle LDB$. Нехай точка $P \in \smile ALB$ між точками A та L, при цьому позначимо $\beta = \angle LDP$. Через K позначимо точку перетину прямої LD та перпендикуляра до прямої DM, що проведений через точку M, а через R – радіус кола Г. Тоді $PD = 2R\cos\beta$, більш того,

$$\angle PAB = \angle PDB = \angle PDL + \angle LDB = \beta + \alpha, \text{та } \angle PBA = \angle PDA = \angle LDA - \angle LDP = \alpha - \beta,$$

звідки маємо, що $PB = 2R\sin(\alpha + \beta)$ та $AP = 2R\sin(\alpha - \beta)$. Тоді

$$MD = MP + PD = AP + PB + PD = 2R(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) + \cos\beta) =$$
$$= 2R\cos\beta(1 + 2\sin\alpha) \Rightarrow KD = \frac{MD}{\cos\beta} = 2R\,(1 + 2\sin\alpha).$$

Це означає, що точка K – не залежить від точки P. Таким чином точка M лежить на частині кола з діаметром KD, що лежить всередині $\angle ADB$.



<u>Рис. 10</u>

Аналогічно, нехай точка K' лежить на прямій LD по один бік від прямої AB, що й точка D, та й задовольняє умову $K'L = 2R\,(1 + 2\sin(90° - \alpha))$. Таким чином, якщо точка P лежить на $\smile ADB$, то точка M лежить на частині кола з діаметром $K'L$, що лежить всередині $\angle ALB$.

3.2. Задача № 3 середньої ліги.

4. На сторонах BC та AC гострокутного різностороннього трикутника ABC вибрали точки D та E відповідно так, що утворився вписаний чотирикутник $ABDE$. Точка P – точка перетину діагоналей цього чотирикутника. Доведіть що, якщо $AB \perp CP$, то точка P – ортоцентр ΔABC.

<u>Розв'язання.</u> Позначимо стандартним чином через α, β, γ кути ΔABC, а також нехай $\varphi = \angle DAB$ та $\psi = \angle EBA$, всі ці кути гострі (рис. 10). Тоді, оскільки кути AEB та ADB рівні, то

$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \qquad (\mathbf{1})$$

Позначимо через $CC_0 = h_c$ – висоту ΔABC, а через x, y, z відповідно довжини відрізків AC_0, BC_0, PC_0. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{p}{x}, \operatorname{tg}\psi = \frac{p}{y}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{x}, \operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{y}. \qquad (\mathbf{2})$$

Якщо P – не ортоцентр, то $\alpha + \psi \neq 90°$, тоді з (1) матимемо, що $\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi)$ або $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi} = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi}$. Оскільки з формул (2) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\psi = \frac{ph_c}{xy} = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \frac{p}{x} + \frac{h_c}{y} = \frac{p}{y} + \frac{h_c}{x} \Rightarrow$

$$(p - h_c)(x - y) = 0.$$

Але це є суперечність, бо $p < h_c$ та $x \neq y$. Таким чином припущення $\alpha + \psi \neq 90°$ – хибне, звідки випливає, що $\alpha + \psi = 90°$, а тому точка P – ортоцентр.

5. Задача № 5 молодшої ліги.

6. Задача № 6 середньої ліги.

7.1. Нехай x, y – різні натуральні числа. Натуральне число D обрано так, що x ділить $Dy+1$ та y ділить $Dx+1$. Доведіть, що $(Dx+1, Dy+1) \leq \sqrt{\frac{1+D^2}{2}}$.
Тут через (a, b) для натуральних чисел a, b позначений їх найбільший спільний дільник.

***Розв'язання*.** Без обмеження загальності вважатимемо, що $x < y$. Тоді з умов задачі можемо записати, що $Dy+1 = Ex$, $Dx+1 = Fy$, $E > F$. При цьому

$$(x, y) = (D, x) = ((F, x) = (D, y) = (E, y) = 1.$$

Із записаних рівностей маємо, що $y = \frac{D+E}{EF-D^2}$, $x = \frac{D+F}{EF-D^2}$. Нехай $E = F + G$, для деякого $G \in \mathbf{N}$. Тоді

$$Dx+1 = F \cdot \frac{D+F+G}{F(F+G)-D^2}, Dy+1 = (F+G) \cdot \frac{D+F}{F(F+G)-D^2}.$$

З іншого боку,

$$(Dx+1, Dy+1) = (Fy, Ex) = (E, F) = (F, G).$$

Таким чином $(Dx+1, Dy+1) \leq \min\{F, G\}$. Крім того $(Dx+1, Dy+1) \mid D(y-x)$, але тоді $(Dx+1, Dy+1)$ ділить $y - x = \frac{G}{F(F+G)-D^2}$, звідки випливає, що $(Dx+1, Dy+1) \leq \frac{G}{F(F+G)-D^2}$. Оскільки $\frac{G}{F(F+G)-D^2}$ – натуральне число, то існує натуральне число H, для якого

$$H(F(F+G)-D^2) = G.$$

Тоді маємо, що $(FH-1) \cdot \frac{G}{H} = D^2 - F^2$, зрозуміло що $\frac{G}{H}$ – натуральне.
Якщо $\frac{G}{H} \geq 2$, то

$$(Dx+1, Dy+1)^2 \leq FH \leq \frac{D^2+1}{2}.$$

Якщо $\frac{G}{H} = 1$, то $F(F+G) = D^2+1$. Оскільки $(Dx+1, Dy+1) \leq \min\{F, G\}$, то маємо, що

$$2(Dx+1, Dy+1)^2 \leq F(F+G) = D^2+1,$$

що й завершує доведення.

7.2. Задача № 7 молодшої ліги.

8.1. Задача № 8 середньої ліги.

8.2. Нехай a, b, c – попарно різні натуральні числа, при цьому число $p = ab + bc + ca$ – просте. Доведіть, що числа $a^3 \pmod p$, $b^3 \pmod p$ та $c^3 \pmod p$ – попарно різні:

***Розв'язання*.** Методом від супротивного, припустимо, що деякі два з наведених чисел співпадають. Наприклад, $a^3 \equiv b^3 \pmod p \Rightarrow p \mid a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \Rightarrow p \mid (a-b)$ або $p \mid (a^2+ab+b^2)$. Перший випадок призводить до суперечності, оскільки $a \neq b$, а отже

$$p \leq a + b \leq c(a+b) < ab + bc + ca = p.$$

Нехай тоді

$$p \mid (a^2+ab+b^2) \ \Rightarrow\ p \mid (a^2+ab+b^2) + (ab+bc+ca) = (a+b)(a+b+c).$$

Далі маємо наступні оцінки:

$$a + b < a + b + c < ab + bc + ca = p,$$

(остання нерівність справджується, бо випадок $a = b = c = 1$ неможливий, бо всі змінні попарно різні) що призводить до суперечності та завершує доведення.