Математичний занзібар для учнів 4–6 класів

«Все, що починається гарно, завершується погано.
Все, що починається погано, завершується ще гірше».
Закон Паддера

Розв'язання задач

4 клас

1. На дошці в один ряд записані 2023 цілих ненульових чисел, що задовольняють такі умови:
- серед кожних двох сусідніх чисел принаймні одне – додатне;
- сума довільних трьох сусідніх чисел – від'ємна;
- добуток довільних чотирьох сусідніх – додатний.

Скільки максимум серед цих чисел може бути від'ємних?

Відповідь: 1012.
Розв'язання. Покажемо, що додатні та від'ємні числа йдуть по черзі. Два від'ємних числа не можуть йти поспіль згідно першої умови. Якщо поруч стоять два додатних числа і, наприклад, праворуч ще є мінімум два числа, тоді праворуч має стояти від'ємне число, що випливає з умови 2), а наступне праворуч також від'ємне число, що випливає з умови 3). Але ми отримали поруч два від'ємних числа, що суперечить першій умові. Таким чином додатні та від'ємні числа йдуть по черзі. Оскільки їх разом непарна кількість, то від'ємних має бути або 1011 або 1012.

2. Петрик вирішив переставити числа від 1 до 12 на циферблаті годинника за такими правилами: між кожними двома сусідніми числами різниця має бути 2 або 3, число 12 лишається на своєму місці, а число стоїть 9 на звичайній позиції числа 1. Яке число за таких умов може стояти на звичайній позиції числа 9? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 5.
Розв'язання. Оскільки сусідами 12 можуть бути лише числа 10 та 9, то 10 розташоване на звичайній позиції 11, позначатимемо це так 10 → 11. Сусідами 11 можуть бути лише 9 та 8, тому 11 → 2. Звідси 8 → 3. Сусідами 10 можуть бути 12, 8 та 7, звідси 7 → 10. Таким чином визначені позиції чисел $7, 8, \dots, 12$.
Припустимо, що 4 → 9.
Якщо далі 1 → 8, то 3 → 7. Але звичайні позиції $4 - 6$ мають зайняти числа $2, 5, 6$, що здійснити неможливо.
Якщо далі 2 → 8, то 5 → 7 та 6 → 4 і решту чисел розставити неможливо.
Тому лишається варіант 5 → 9, після чого можна запропонувати, наприклад, таке розташування чисел: 2 → 8, 4 → 7, 1 → 6, 3 → 5 та 6 → 4.

3. Скільки існує трицифрових чисел, у яких перша цифра дорівнює сумі двох інших?

Відповідь: 54.
Розв'язання. Перша цифра шуканого числа $\overline{abc}$ може приймати 9 різних значень – усі, окрім 0. Далі не важко порахувати кількості шуканих чисел для кожного такого значення.
$a = 1 \Rightarrow b + c = 1 \Rightarrow b = 0, c = 1$ та $b = 1, c = 0$, разом 2 числа.
$a = 2 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow b = 0, c = 2$, $b = 1, c = 1$ та $b = 2, c = 0$, разом 3 числа.
$a = 3 \Rightarrow b + c = 3 \Rightarrow b = 0, c = 3$, $b = 1, c = 2$, $b = 2, c = 1$ та $b = 3, c = 0$, разом 4 числа. І так далі.

$a = 8 \Rightarrow b + c = 9 \Rightarrow b = 0, c = 9, b = 1, c = 8, \ldots$, та $b = 9, c = 0$, разом 10 чисел.
Разом маємо: $2 + 3 + \cdots + 10 = 54$.

4. Нарисуйте 9-кутник, для якого справджується така властивість: на кожній прямій, що проходить через сторону 9-кутника лежить ще принаймні одна його вершина, яка відмінна від кінцівок зазначеної сторони.

Відповідь: один з можливих 9-кутників зображений на рис. 1.

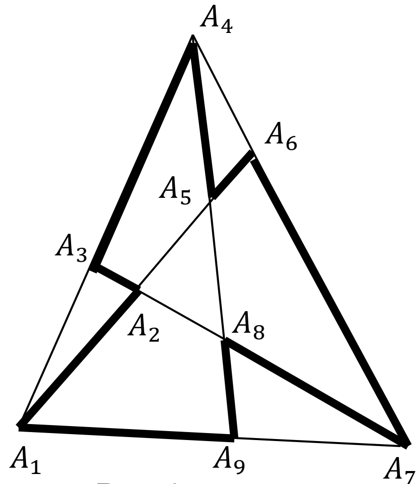

Рис. 1

5. Розв'яжіть числовий ребус ТИ + ТИ + ТИ + ТИ + ТИ = МИ, де кожній букві відповідає своя цифра і усі 6 чисел – двоцифрові. Знайдіть усі можливі відповіді, при цьому у відповіді вкажіть знайдене число МИ.

Відповідь: 50 та 75.
Розв'язання. Для останніх цифр маємо, що $5 \cdot И = АИ$, але останні цифри при множенні на 5 зберігаються лише для цифри 0 та 5. Крім того, якщо $ТИ \geq 20$, то $МИ = 5 \cdot ТИ \geq 100$ – трицифрове, що суперечить умові. Тому $Т = 1$.
Якщо $И = 0$, то $ТИ = 10$, звідки перша відповідь $МИ = 50$.
Якщо $И = 5$, то $ТИ = 15$, звідки перша відповідь $МИ = 75$.

6. Фігурка у вигляді трикутничка складається з 36 однакових кружків (рис. 2). Фігуркою *твікс* називаються усі пари сусідніх кругів, тобто тих, що мають спільну точку на межі. Скільки таких фігурок твікс тут утворилося (круги, що утворюють твікс не обов'язково розташовані в одній горизонталі)?

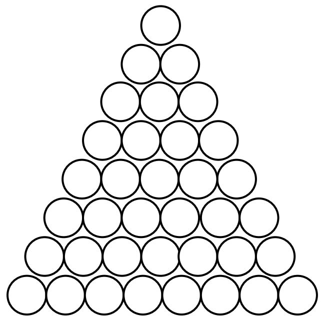
Рис. 2

Відповідь: 84.
Розв'язання. У нижньому рядку є 8 кругів, які утворюють 7 різних горизонтальних (тобто круги розташовані в одному рядку) твіксів. Тоді рядком вище таких твіксів буде вже 6, і так далі – усього горизонтальних твіксів буде $7 + 6 + \cdots + 1 = 28$. Оскільки з міркувань симетрії усі 3 напрями рівноправні, то й інших двох напрямів таких твіксів буде також по 28. Загалом разом матимемо $28 \cdot 3 = 84$.

7. Двоцифрове число називається *подільним*, якщо воно має попарно різні цифри та ділиться на кожну із своїх цифр. Скілки існує таких подільних чисел?

Відповідь: 5.
Розв'язання. Очевидно, що серед цифр подільного числа не має бути 0. Далі просто достатньо вибрати ті числа, в яких друга цифра ділиться на першу. Тобто вона має бути більшою за неї. Цей принцип суттєво скорочує перегляд чисел від 30 до 99.
$10 - 19$, подільними є 12 та 15.
$20 - 29$, подільними є 24.
$30 - 39$, подільними є 36.
$40 - 49$, подільними є 48.
$50 - 59$, подільних немає.
$60 - 69$, подільних немає.
$70 - 79$, подільних немає.
$80 - 89$, подільних немає.
$90 - 99$, подільних немає.

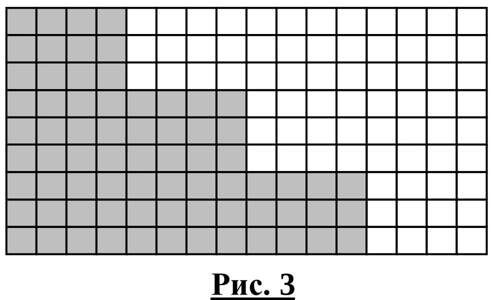
Рис. 3

8. Розріжте прямокутник 9×16 на дві однакові частини, з яких можна скласти квадрат.

Відповідь: приклад розрізання показаний на рис. 3.

9. Чому дорівнює число X, про яке відомо, що якщо від половини числа X відняти число 2022, то отримаємо найменше трицифрове число, яке має суму цифр 10?

Відповідь: 4262.
Розв'язання. Зрозуміло, що найменше шукане трицифрове число – це 109, якщо до нього додати 2022, то маємо отримати 2131, що складає половину від числа X, тому саме число $X = 4262$.

10. Женя, Катерина, Ліза, Марічка та Надія на змаганнях з бігу фінішували у деякому порядку, при цьому рівно дві прибігли з однаковим часом. Виявилося, що мають місце такі закономірності:

- щонайменше троє фінішували перед Женею;
- після Катерини, але перед Лізою фінішували рівно 2 дівчинки;
- Марічка не фінішувала першою;
- точно після Надії біг завершила Женя.

Які дівчата показали однаковий час?

Відповідь: Женя та Ліза.
Розв'язання. Женя фінішувала на 4 або 5 місці. Якщо вона на 4 місці, то Ліза мала фінішувати на 4 чи 5 місці. Якщо Ліза на 5 місці, то Катерина тоді на 2 місці і Марічці лишається 3, тобто Надія не може бути точно перед Женею.
Якщо Ліза на 4 місці разом з Женею, то Надія на 3 місці, Марічка – 2 і Катерина на 1 місці. Цей варіант не має суперечностей.
Якщо Женя на 5 місці, то Ліза – 4, бо коли вони обоє на 4 місці ми вже розглянули. І це суперечить позиції Надії.

11. У прикладі на додавання натуральних чисел однаковим буквам відповідають однакові цифри, різним буквам – різні цифри: $\text{А} + \text{АЕ} + \text{АЕЕ} = \text{ЕЛА}$. Чому дорівнює значення суми ЕЛА?

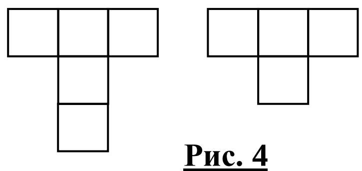

Рис. 4

Відповідь: 504.
Розв'язання. З останньої цифри бачимо, що число 2Е має закінчуватися на цифру 0. Випадок $\text{Е} = 0$ неможливий, бо сума буде не трицифровим числом. Тому $\text{Е} = 5$, з цифри сотень очевидно, що А може бути на 1 менше за Е, тобто $\text{А} = 4$. Далі додаванням знаходимо, що $\text{ЕЛА} = 504$.

12. Зобразіть принаймні одну фігуру, що складається з одиничних клітинок 1×1 та яку можна розрізати на 4 фігурки, що зображені ліворуч на рис. 4, або на 5 фігурок, що зображені там праворуч.

Відповідь: приклад такої фігури показаний на рис. 5.

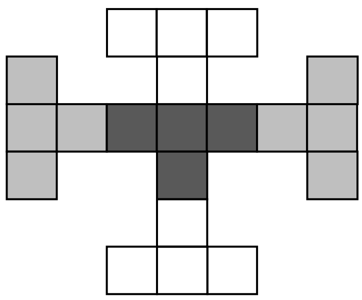

Рис. 5

13. У крамницю завезли жакети – зелені, сині та жовті. Кожний зелений жакет має 2 кишені, кожний синій – 3, а кожний жовтий має 5 кишень. Зелених та синіх привезли однакову кількість і їх на 10 менше, ніж жовтих. Скільки там було жовтих жакетів, якщо разом в них нарахували 200 кишень?

Відповідь: 25.
Розв'язання. Поєднаємо зелений та синій жакет в одну пару, тоді така пара має рівно 5 кишень. Таким чином ми маємо x пар та $x + 10$ жовтих жакетів, кожний з яких має по 5 кишень. Звідси маємо рівність: $5 \cdot (x + x + 10) = 200 \Rightarrow 2x + 10 = 40 \Rightarrow x = 15$. Таким чином жовтих жакетів там було $x + 10 = 25$.

14. У Петрика є набір з 36 каменів вагою 1, 2, …, 36 г, а у Василя – суперклей, що може намертво склеювати однією краплею два камені, так само двома краплями він може склеїти 3 камені і так далі. Василь хоче найменшою кількістю краплин клею склеїти деякі камені таким чином, щоб Петрик не зміг зібрати набір каменів загальною вагою 37 г. Яку найменшу кількість крапель має використати Василь?

Відповідь: 9.
Розв'язання. Василь склеює такі пари каменів: $1 - 18$, $2 - 17$, …, $9 - 10$. Тепер він має набір, в якому кожнен камінь (окремий чи склеєний) має вагу від 19 до 36 г. тобто, щоб набрати 37 г одного каменя замало, а довільних двох – забагато.
Якщо Василь використає не більше 8 крапель, то буде задіяно не більше як 16 каменів. Тому з 18 пар каменів $1 - 36$, $2 - 35$, …, $18 - 19$ принаймні в одній вони не будуть склеєні, а тому утворять шукану пару з сумарною вагою 37 г.

15. На столі лежить стопка зі 100 карток, на яких записані числа від 1 до 100, тобто кожне число записане рівно один раз на одній картці. Картки розташовані випадковим чином і Петрик не бачить числа на картці, яку витягує з цієї стопки. Яку найменшу кількість карток він має витягнути, щоб гарантовано добуток усіх чисел, що на них записані, ділився націло на 6?

Відповідь: 68.
Розв'язання. Усього чисел, що кратні 3 в цій купі – рівно 33. Якщо він витягне усі інші 67 чисел, що не діляться на 3, то і їхній добуток не буде ділитися на 6. Таким чином він має витягнути не менше 68 чисел. А цієї кількості однозначно вистачить, тому що серед цих чисел гарантовано будуть ті, що кратні 2, бо тих, що не кратні 2 усього 50.

16. Розріжте клітчастий прямокутник завбільшки 9×10 клітинок на декілька квадратів так, щоб серед них було рівно два квадрати з непарною довжиною сторони. Розрізи мають йти по сторонам клітинок.

Відповідь: наприклад, рис. 6.

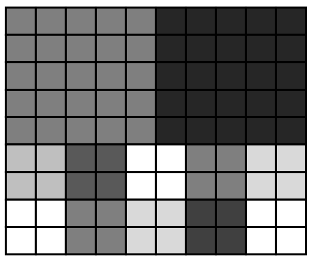

Рис. 6

5 клас

1. Задача № 1 4 класу.

2. Задача № 2 4 класу.

3. Задача № 3 4 класу.

4. Задача № 4 4 класу.

5. Задача № 5 4 класу.

6. По колу у вказаному порядку стояли 6 дітей: Алла, Богдан, Віка, Грицько, Даринка та Євген. Кожний, хто отримав м'яч може передати його або наступному за ним, або тому, хто точно напроти нього, тобто Алла може передати м'яч або Богдану, або Грицькові. Гра завершується, якщо кожний отримав м'яч принаймні один раз. З самого початку м'яч був у Алли і гра заврешилася після 5 передавань м'яча. Хто міг останнім отримати м'яч? Вкажіть усі варіанти.

Відповідь: Грицько та Євген.
Розв'язання. Розглянемо можливі варіанти, такі, щоб гра завершилася рівно за 5 кроків, це означає, що жодна дитина не триматиме м'яч двічі. Цих варіантів небагато в сенсі малої кількості можливих ходів: А → Б → В → Г → Д → Є → А, а також А ↔ Г, Б ↔ Д та В ↔ Є.
Варіант 1. Початок гри: А → Б → В → Г → Д → Є, м'яч лишається в гравця Є.
Варіант 2. Початок гри: А → Б → В → Г → Д або А → Б → В → Г. Тоді наступний хід є повтором розглянутого варіанту.
Варіант 3. Початок гри: А → Б → В, далі, щоб не повторювати розглянуті варіанти, маємо хід В → Є. Після цього коректного ходу вже немає.
Варіант 4. Початок гри: А → Б, далі, щоб не повторювати розглянуті варіанти, маємо хід Б → Д → Є. Після цього гра завершується такими ходами Є → В → Г, м'яч лишається в гравця Г.
Варіант 5. Початок гри: А → Г → Д. Далі хід Д → Є приводить до суперечності. Тому можливим лишається варіант Д → Б → В → Є, м'яч лишається у гравця Є.
Усі можливі варіанти розглянуті.

7. Скільки існує чотирицифрових чисел $\overline{abc}$ з ненульовими цифрами a, b, c, у яких будь-яке число, що утворене перестановкою цифр цього числа (враховуючи й саме число) ділиться на 4?

Відповідь: 8.
Розв'язання. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо інакше можна розглянути число з непарною цифрою на останній позиції і число не буде кратне 4. Якщо там є парна цифра, що не кратна 4, наприклад, цифра c, решта цифр – парні, тоді для числа $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ перші два доданки кратні 4, тому має бути кратним 4 і цифра c. Висновок, це може бути число, в якого усі цифри кратні 4, тобто дорівнювати 4 або 8. Таких чисел усього 8:

$$444, 448, 484, 844, 488, 848, 884, 888.$$

8. Задача № 8 4 класу.

9. У коробці лежали 24 зелених та 24 синіх кульки. Після цього забрали частину синіх кульок так, що сині кульки тепер складали 40% від усіх кульок у коробці. Далі в шухляду додали жовтих кульок у кількості у 2 рази більше, ніж там було синіх кульок. Скільки усього кульок усіх кольорів виявилося в коробці?

Відповідь: 72.
Розв'язання. Нехай синіх кульок у коробці лишилося x. Тоді щоб вони утворювали 40% від загальної кількості, то має мати місце рівність: $x : (x + 24) = 40 : 100 \Rightarrow 100x = 40x + 960 \Rightarrow x = 16$. Тоді жовтих додається 32, тобто усього по завершенні маємо $24 + 16 + 32 = 72$ кульки.

10. Задача № 10 4 класу.

11. Задача № 11 4 класу.

12. Задача № 12 4 класу.

13. Для знайомства на он-лайн конференції, кожний її учасник мав відправити свою світлину кожному іншому учаснику конференції. Але виявилося, що не менше половини часників відправили свої світлини кожному другому із зазначених, не менше третини учасників відправили кожному третьому іншому учаснику і, нарешті, не менше $\frac{1}{7}$ від учасників відправили свої світлини кожному сьомому з інших учасників. Яка найменша можлива кількість учасників конференції могла бути за таких умов?

Відповідь: 85.
Розв'язання. Позначимо шукану найменшу кількість учасників через n, тоді значення $n-1$ має ділитися одночасно на $2, 3$ та 7, тобто найменше можливе значення – це 42, звідси $n = 43$. Порахуємо найменшу кількість членів конференції: не менше 22 вислали половині, не менше 15 вислали третині і не менше 7 вислали кожному сьомому. Таким чином разом учасників мало бути не менше ніж $22 + 15 + 7 = 44 > 43$, що суперечить умові.
Наступне значення для $n - 1$, що є кратним 42 – це 84, тому $n = 85$. Тоді з аналогічних міркувань отримуємо, що ця ситуація цілком можлива, тут рівно 43 вислали половині, рівно 29 вислали третині і рівно 13 вислали кожному сьомому. Таким чином разом учасників $43 + 29 + 13 = 85$, що цілком можливо.

14. Задача № 14 4 класу.

15. На столі лежить стопка зі 30 карток, на яких записані числа від 1 до 30, тобто кожне число записане рівно один раз на одній картці. Картки розташовані випадковим чином і Петрик не бачить числа на картці, яку витягує з цієї стопки. Яку найменшу кількість карток він має витягнути, щоб гарантовано добуток усіх чисел, що на них записані, ділився націло на 384?

Відповідь: 22.
Розв'язання. Зауважимо, що $384 = 2^7 \cdot 3$. Усього чисел, що кратні 3 в цій купі – рівно 10. Чисел, що кратні 2, рівно 15. Таким чином, якщо витягнути довільні 22 картки, то серед них гарантовано буде щонайменше 2 таких, що кратні 3, а крім того щонайменше 7 таких, що кратні 2. Звідси їх добуток буде кратним $384 = 2^7 \cdot 3$.
Зауважимо, що якщо витягнути таку 21 картку – усі 15 непарних чисел, $1, 3, \ldots, 29$, а також ще 6 чисел, що не кратні 4, наприклад, $2, 6, 10, 14, 18$ та 22, то добуток цих чисел не буде кратним 384.

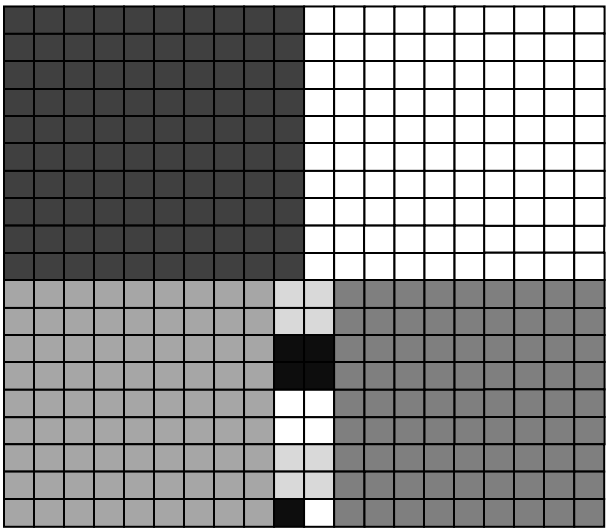

Рис. 7

16. Розріжте клітчастий прямокутник завбільшки 19×20 клитин на декілька квадратів так, щоб серед них було рівно чотири квадрати з непарною довжиною сторони. Розрізи мають йти по сторонам клітинок.

Відповідь: наприклад, рис. 7.

6 клас

1. На дошці в один ряд записані 2023 цілих ненульових чисел, що задовольняють такі умови:

- серед кожних двох сусідніх чисел принаймні одне – додатне;
- сума довільних трьох сусідніх чисел – від'ємна;
- добуток довільних чотирьох сусідніх – додатний.

Відомо, що серед цих чисел є число (-1). Якщо записані числа пронумеровані зліва направо, то на позиції з яким номером може розташовуватися число (-1)? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 1 та 2023.
Розв'язання. Покажемо, що додатні та від'ємні числа йдуть по черзі. Два від'ємних числа не можуть йти поспіль згідно першої умови. Якщо поруч стоять два додатних числа і, наприклад, праворуч ще є мінімум два числа, тоді праворуч має стояти від'ємне число, що випливає з другої умови, а наступне праворуч також від'ємне число, що випливає з третьої умови. Але ми отримали поруч два від'ємних числа, що суперечить першій умові. Таким чином додатні та від'ємні числа йдуть по черзі. Якщо число (-1) розташоване не з самого краю, то його оточують два натуральні числа, найменше з яких 1, але тоді сума трьох чисел в яких (-1) посередині – від'ємне. Одержали суперечність. Це число може стояти на краях, якщо вважати, що усі додатні числа дорівнюють 1, а усі від'ємні дорівнюють (-10).

2. Задача № 2 4 класу.

3. Задача № 3 4 класу.

4. Задача № 4 4 класу.

5. Дивакуватий майстер зробив годинник зі 150 стрілками. Перша стрілка крутиться зі швидкістю 1 оберт за годину, друга робить 2 оберти за годину, і так далі, 150-та стрілка робить 150 обертів за годину. Годинник запустили, коли усі стрілки були направлені строго вгору (на 12). Коли в процесі роботи годинника зустрічаються дві чи більше стрілок, то ці стрілки миттєво відпадають. Через який час після початку відпаде стрілка, що обертається зі швидкістю 74 оберти за годину?

Відповідь: 20 хв.
Розв'язання. Очевидно, що на початку найшвидша, тобто 1-ша стрілка наздожене найповільнішу, тобто 150-ту. Після цього вони обидві відпали. Наступними зустрінуться 2-га та 149-та стрілки і відпадуть, і так далі. Зрозуміло після цього, що 74-та стрілка відпаде, коли її наздожене 77-ма стрілка. Тобто 74-та має пройти рівно на 1 оберт більше. Вони наближаються одна до одної зі швидкістю $77 - 74 = 3$ оберти за годину. Тому стрілки зустрінуться та відпадуть через третину години, тобто через 20 хв.

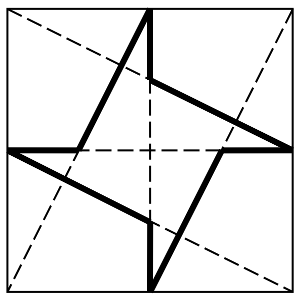
Рис. 8

6. Задача № 6 5 класу.

7. Задача № 7 5 класу.

8. У квадраті зі стороною 12 провели декілька відрізків, що з'єднують деякі вершини та середини сторін, як це показано на рис. 8. Далі жирними лініями виділили межу деякого восьмикутника. Чому дорівнює його площа?

Відповідь: 36.
Розв'язання. Якщо розглянути квадрат $ABCD$, що складає одну четверту заданого квадрата та має площу 36, то ΔCDE в свою чергу є $\frac{1}{4}$ від квадрата $ABCD$ (рис. 9). Далі зрозуміло, що аналогічна картинка в кожному з чотирьох квадратах, а тому шукана площа восьмикутника дорівнює $\frac{1}{4} \cdot 12 \cdot 12 = 36$.

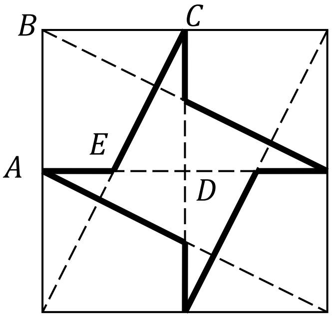

Рис. 9

9. Знайдіть 100 ненульових чисел, кожне з яких дорівнює квадрату суми усіх інших чисел?

Відповідь: усі числа, що дорівнюють $\frac{1}{99^2}$.
Розв'язання. Будемо шукати набір чисел, в якому усі числа рівні. Нехай $x_i = a, i = \overline{1,100}$. Тоді число a має задовольняти таку умову:

$$a = (99a)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{99^2}.$$

10. Задача № 10 4 класу.

11. Скільки є двоцифрових чисел, що дорівнюють сумі своїх цифр, помноженій на 4?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Позначимо шукане двоцифрове число $\overline{ab} = 10a + b$, тоді має справджуватися така рівність: $10a + b = 4a + 4b \Rightarrow 6a = 3b$ або $b = 2a$. Зрозуміло, що цифра a може приймати значення від 1 до 4, щоб b лишалося цифрою. Таким чином, шуканих чисел 4: $12, 24, 36$ та 48.

12. Задача № 12 4 класу.

13. Задача № 13 5 класу.

14. Задача № 14 4 класу.

15. Задача № 15 5 класу.

16. Розріжте клітчастий прямокутник завбільшки 19×20 клитин на декілька квадратів так, щоб серед них була найменша можлива кількість квадратів з непарною довжиною сторони. Розрізи мають йти по сторонам клітинок.

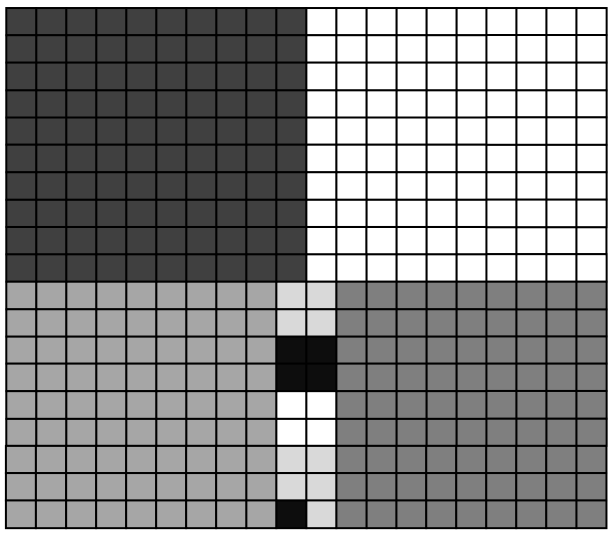
Рис. 10

Відповідь: наприклад, рис. 10, що містить 4 квадрати з непарною стороною.
Розв'язання. Зауважимо, що принаймні 1 квадрат з непарною стороною має бути, бо інакше сторону прямокутника довжиною 19 не можна покрити парними сторонами. Покажемо, що менше 4 таких квадратів бути не може. Площа прямокутника 19×20 кратна 4, площа довільного квадрата з парною стороною – також, а площа квадрата з непарною стороною дає залишок 1 при діленні 4. Тому, щоб сума площ квадратів розрізання ділилася на 4, їх має бути щонайменше 4.
Приклад з такою кількістю квадратів з непарною стороною зображений на рис. 1.