Відбір команди міста Києва на IV (заключний) етап Всеукраїнської математичної олімпіади

І тур

Щойно ви допишете листа, в голову прийде нова ідея.
Закон Мерфі

8 клас

1. В якійсь момент впродовж хокейного сезону відношення точних кидків до усіх кидків у Вейна Грецьки була строго менше $\frac{k}{6}$, а по завершенню стала строго більше $\frac{k}{6}$. Для яких $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ обов'язково існував момент, у який це відношення дорівнювало у точності $\frac{k}{6}$?

Відповідь: $k \in \{3, 4, 5\}$.
Розв'язання. Для $k = 1$ нехай гравець промазав перші 7 кидків, а наступні 4 влучив. Тоді до 8 кидків в нього була точність, що не перевищувала $\frac{1}{8} < \frac{1}{6}$, а після 9 – стала $\frac{2}{9} > \frac{1}{6}$.
Так само до 10 в нього була точність, що не перевищувала $\frac{3}{10} < \frac{2}{6}$, а після 11 – стала $\frac{4}{11} > \frac{2}{6}$.

Нехай тепер $k \in \{3,4,5\}$. Тоді це значення $\frac{k}{6}$ дорівнює $\frac{m-1}{m}$ для деякого m: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ та $\frac{5}{6}$. Якщо припустити, що можлива ситуація, при якій значення $\frac{k}{6}$ не досягається, то це означає, що для деяких натуральних n та j справджується нерівність:

$$\frac{j}{n} < \frac{m-1}{m} < \frac{j+1}{n+1} \Rightarrow mj < (m-1)n \text{ та } (m-1)(n+1) < m(j+1) \Rightarrow$$
$$mn > mj + n \text{ та } mn < mj + n + 1.$$

Як бачимо – натуральне число mn розташоване поміж двох послідовних натуральних чисел – одержали суперечність, що завершує доведення.

2. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з вершиною в точці A та $\angle CAB < 60°$. На стороні AC вибрана точка D, для якої $\angle DBC = \angle BAC$. Точка E – перетин серединного перпендикуляра до відрізку BD та прямої, що проходить через точку A паралельно BC. Доведіть, що $AC || BE$.

Розв'язання. З умови $\angle DBC = \angle BAC$ та $\angle BCD = \angle BCA$ випливає, що $\angle BDC = \angle CBA$. Тоді $DB = BC$ (рис. 1).
Нехай точка E' така, що чотирикутник $AE'BC$ – паралелограм. З рівностей

$$\angle ABE' = \angle BAC = \angle CBD$$

ми отримаємо, що

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \angle ABE' + \angle ABD = \angle E'BD.$$

Крім того $BE' = AC$, тому $\Delta E'BD = \Delta ABC$. Звідси $\Delta E'BD$ – рівнобедрений, тому E' лежить на серединному перпендикулярі до сторони BD.
З цих тверджень E та E' лежать на прямих, що проходять через A та паралельні BC, звідки $E' = E$. Тому $AEBC$ – паралелограм і $AC || BE$.

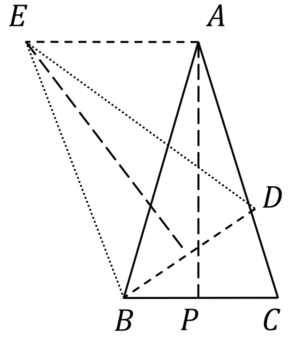

Рис. 1

3. Нехай числа m, n – натуральні та різної парності. Доведіть, що число $\frac{3m^2+5mn}{3n^2+mn}$ не є натуральним.

Розв'язання. Нехай $d = (m, n)$, тобто $m = dm'$ та $n = dn'$, та $(m', n') = 1$, тоді

$$\frac{3m^2+5mn}{3n^2+mn} = \frac{m'(3m'+5n')}{n'(m'+3n')} \text{ – має бути не натуральним.}$$

Числа $3m' + 5n'$ та $m' + 3n'$ – непарні.
Якщо m' – непарне, а n' – парне, то чисельник останнього виразу є непарним числом, який не може націло ділитися націло на парне число із знаменника.
Інакше, m' – парне, а n' – непарне. Нехай $k = (3m' + 5n', m' + 3n')$, непарне число. Тоді

$$k|3 \cdot (3m' + 5n') - 5 \cdot (m' + 3n') \Rightarrow k|4m',$$
$$k|1 \cdot (3m' + 5n') - 3 \cdot (m' + 3n') \Rightarrow k| - 4n'.$$

Таким чином $k|(m', n') \Rightarrow k = 1$. Таким чином $\frac{m'}{n'} \cdot \frac{3m'+5n'}{m'+3n'}$ маємо добуток не скоротних дробів. Таким чином m' має ділитися націло на $m' + 3n'$, що, очевидно, не можливо.

4. Два гравці грають в гру із записаними числами на дошці. Якщо на дошці записані натуральні числа $A \geq B$, то гравець, чия черга ходу вибирає натуральне число k, що задовольняє умову $A - kB \geq 0$, витирає число A та замість нього записує число $A - kB$. Перемагає той, хто вперше запише на дошці число 0. При якому відношенні $l = A:B$ початкових чисел при правильній грі переможе гравець, що робить перший хід?

Відповідь: перший гравець перемагає за умови $A > \phi \cdot B$ або $A = B$, де $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – додатний корінь рівняння $t^2 - t - 1 = 0$.
Розв'язання. Гра точно завершиться, оскільки сума чисел після кожного ходу зменшується, як тільки два числа стануть кратними одне іншому, наступним ходом гравець гру завершується. Такий випадок точно станеться, наприклад, за умови, що одне з чисел стане рівним 1.

Позначимо через $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – додатний корінь рівняння $t^2 - t - 1 = 0$. Нехай записані натуральні числа $M \geq m$. Якщо $m|M$, то перший гравець перемагає першим ходом. Нехай тепер $M = qm + r,\ 0 < r < m$.
Якщо $q \geq 2$, то один з двох ходів першого $(M, m) \to (m, r)$ або $(M, m) \to (m + r, m)$, при цьому позначимо нову позицію (M', m'), для якої $m' < M' < \phi \cdot m'$. Дійсно, якщо (m, r) задовольняє ці умови, то все отримане. Якщо ні, тобто $m > \phi \cdot r$, то далі маємо, що $m + \phi \cdot m > \phi \cdot r + \phi \cdot m \Leftrightarrow m(1 + \phi) > \phi \cdot (r + m) \Leftrightarrow \frac{r+m}{m} < \frac{1+\phi}{\phi} = \phi$.
Якщо $q < 1$ та $M > \phi \cdot m$, то можливий лише хід $(M, m) \to (m, M - m) = (m, r)$, для якого $r < m < \phi \cdot r$.

Таким чином другий гравець отримує ситуацію (M, m), для якої $m < M < \phi \cdot m$ може здійснити єдиний хід $(M, m) \to (m, M - m) = (m, r)$, але тут позиція вже матиме умову $M > \phi \cdot m$.

Таким чином перший гравець перемагає за умови $A > \phi \cdot B$ або $A = B$. Інакше він програє, бо має перший хід в позиції $B < A < \phi \cdot A$, після чого другий гравець отримує виграшну позицію і діє за алгоритмом описаним вище для першого гравця.

9 клас

1. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a + b + c = 3$, доведіть нерівність:

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1} + \frac{b^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2b-1} +$$
$$+ \frac{c^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2c-1} \leq 3.$$

Розв'язання. Зробимо такі перетворення знаменника:

$$2a^2+2b^2+2c^2+2a-1 \geq 2a^2+(b+c)^2+2a-1 = 2a^2+(3-a)^2+2a-1 = 3a^2-4a+8.$$

Доведемо, що $3a^2-4a+8 \geq a^2+6 \Leftrightarrow 2a^2-4a+2 = 2(a-1)^2 \geq 0$. З останніх нерівностей маємо, що

$$\frac{a^2+6}{2a^2+2b^2+2c^2+2a-1} \leq \frac{a^2+6}{a^2+6} = 1,$$

з аналогічних нерівностей для кожного доданку матимемо шукану оцінку.

2. Нехай ABC – рівнобедрений трикутник з вершиною в точці A та $\angle CAB < 60°$. На стороні AC вибрана точка D, для якої $\angle DBC = \angle BAC$. Точка E – перетин серединного перпендикуляра до відрізку BD та прямої, що проходить через точку A паралельно BC. Точка F лежить на прямій AC таким чином, що A належить відрізку CF, крім того $AF = 2AC$.Доведіть, що пряма, що проходить через F перпендикулярно до AB, і пряма, що проходить через E перпендикулярно до AC, перетинаються на прямій BD.

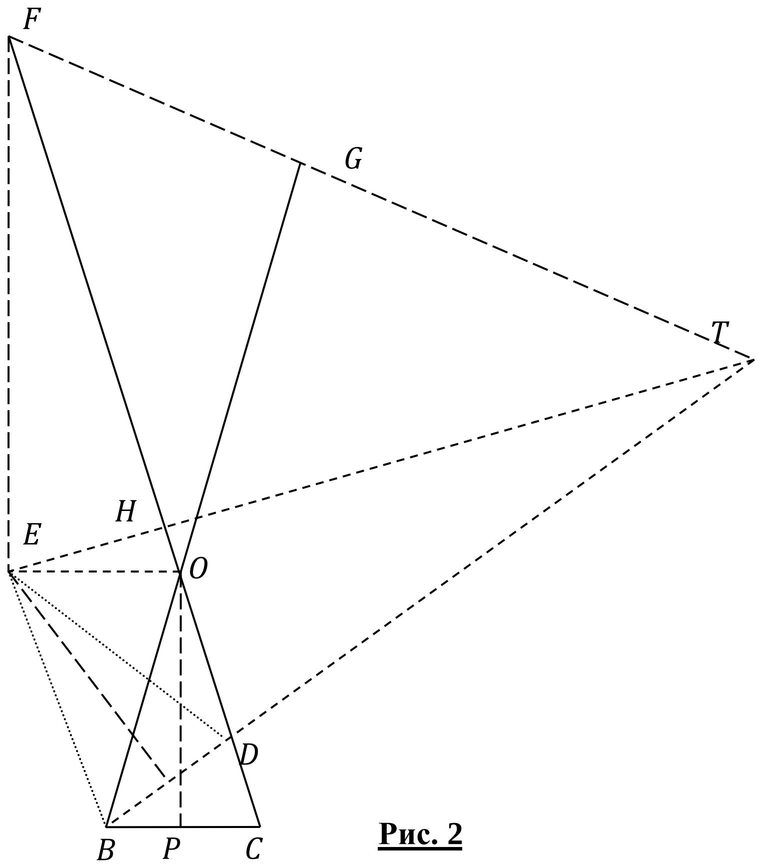

Рис. 2

Розв'язання. З умови $\angle DBC = \angle BAC$ та $\angle BCD = \angle BCA$ випливає, що $\angle BDC = \angle CBA$. Тоді $DB = BC$ (рис. 2).

Нехай точка E' така, що чотирикутник $AE'BC$ – паралелограм. З рівностей

$$\angle ABE' = \angle BAC = \angle CBD$$

ми отримаємо, що

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \\ = \angle ABE' + \angle ABD = \angle E'BD.$$

Крім того $BE' = AC$, тому $\Delta E'BD = \Delta ABC$. Звідси $\Delta E'BD$ – рівнобедрений, тому E' лежить на серединному перпендикулярі до сторони BD.

З цих тверджень E та E' лежать на прямих, що проходять через A та паралельні BC, звідки $E' = E$. Тому $AEBC$ – паралелограм і $AC || BE$.

Нехай P – середина відрізка BC. Оскільки $AEBC$ – паралелограм, тому $AE = BC$ та $\frac{AE}{CP} = 2 = \frac{AF}{CA}$. Таким чином $\Delta EFA \sim \Delta PAC$, тому $\angle DFE = \frac{1}{2}\angle BAC$, $\angle APC = \angle AEF = 90°$.

Нехай G, H – ортогональні проекції F, E на прямі AB, AC відповідно, $T = EH \cap FG$. Треба показати, що $T \in DB$. Оскільки $\Delta EBD = \Delta ABC$, то

$$\angle ADE = 180° - \angle BDE - \angle BDC = 180° - \angle ACB - \angle ABC = \angle BAC \Rightarrow$$
$$\angle DFT = 90° - \angle FAG = 90° - \angle BAC = 90° - \angle ADE = \angle DEH = \angle DET,$$

звідки чотирикутник $DEFT$ – циклічний та $\angle DTE = \angle DFE = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Остаточно маємо, що

$$\angle TDH = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC \text{ та } \angle BDH = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

Звідки точки B, D, T – колінеарні, що й завершує доведення.

3. Задача 8.3.

4. Задача 8.4.

10 клас

1. Задача 9.1.

2. Задача 9.2.

3. У тенісному змаганні брали участь m дівчат та n хлопців, при цьому кожна дівчинка зіграла з кожним хлопцем 1 матч. Виявилося, що кожна дівчинка здобула принаймні 21 перемогу, а кожний хлопчик – принаймні 12 перемог. При якій найменшій кількості учасників змагання $m+n$ таке могло статися? Нагадаємо, що в тенісі нічиїх не буває.

<u>Відповідь:</u> 65.
<u>Розв'язання.</u> Усього було зігране mn матчів, а тому має справджуватися така нерівність: $mn \geq 21m + 12n$. Позначимо через $x = m + n$, тоді $n = x - m$. Зрозуміло, що $n > 12$ та $m > 21$.

$$m(x-m) \geq 21m + 12(x-m) \Rightarrow m^2 + m(9-x) + 12x \leq 0.$$

Дискримінант цієї нерівності має бути невід'ємним, тому має справджуватися нерівність:

$$D = (x-9)^2 - 48x = x^2 - 66x + 81 \geq 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot (66 \pm \sqrt{4032}) = 33 \pm \sqrt{1008}, \text{ звідки } x \geq 33 + 32 = 65.$$

Покажемо, що для цього значення $x = m + n$ існує належний розподіл перемог та поразок, щоб справджувалися потрібні умови. Для $x = 65$ маємо такі обмеження на m:
$m^2 - 56m + 780 \leq 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}(56 \pm 4) = 26{,}30$. Нехай $m = 26$, тоді $n = 39$. Покажемо, як можуть зіграти поміж собою учасники змагання.

Розіб'ємо дівчат на дві групи по 13 – $G1$ та $G2$, а хлопців на три групи по 13 – $B1$, $B2$ та $B3$. Розподіл перемог та поразок показаний на рис. 3. Кажемо лише про перемоги дівчат, усі інші матчі вони програли. Кожна дівчинка з $G1$ перемогли кожного хлопця з $B1$, аналогічно кожна дівчинка з $G2$ перемогли кожного хлопця з $B2$. Кожна дівчина з групи $G1(G2)$ перемогла рівно одного (відповідного) хлопчика з групи $B2(B1)$. Кожна дівчина з групи $G1$ та $G2$ перемогла рівно 7 (відповідних) хлопчиків з групи $B3$ (рис. 1).

<table>
<tr><th></th><th colspan="5">B1</th><th colspan="5">B2</th><th colspan="5">B3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">G1</td><td colspan="5" rowspan="5">1</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">G2</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="5" rowspan="5">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

<u>Рис. 3</u>

Тоді кожна дівчина має рівно $13 + 1 + 7 = 21$ перемогу.
Кожний хлопчик з $B1$ та $B2$ має рівно 12 перемог.
Кожний хлопчик з $B3$ має рівно $6 + 6 = 12$ перемог.

4. Знайдіть усі пари цілих (m, n), для яких $m^2 = n^5 + n^4 + 1$ та $(m - 4n) \vdots (m - 7n)$.

<u>Відповідь:</u> $(m, n) = (-1{,}0)$ та $(1{,}0)$.
<u>Розв'язання.</u> Оскільки $n^5 + n^4 + 1 = (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1)$, то

$$d = (n^3 - n + 1, n^2 + n + 1) = ((n^3 - n + 1) - (n^3 + n^2 + n), n^2 + n + 1) =$$

$$= (-n^2 - 2n + 1, n^2 + n + 1) = ((-n^2 - 2n + 1) + (n^2 + n + 1), n^2 + n + 1) =$$
$$= (-n + 2, n^2 + n + 1) = (n - 2, n^2 + n + 1) = (n - 2, (n^2 + n + 1) - (n^2 - 2n)) =$$
$$= (n - 2{,}3n + 1) = (n - 2, (3n + 1) - (3n - 6)) = (n - 2{,}7).$$

Можливі два випадки.

Якщо $d = 7$, то $m \vdots 7$ та $n \not\vdots 7$, тоді $m - 7n \vdots 7$ та $m - 4n \not\vdots 7$, тобто задана в умові подільність не можлива.

Якщо $d = 1$, то ці множники взаємно прості, тому кожний з них має бути точним квадратом. Оскільки $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$ справджується при $n \geq 1$ та $(n + 1)^2 < n^2 + n + 1 < n^2$ при $n \leq -2$, то можливими значеннями можуть бути лише $n = -1$ та $n = 0$.

При $n = -1$ $m^2 = 1$. Для пари $(m, n) = (-1, -1)$ маємо, що $m - 4n = 3$ та $m - 7n = 6$ – не умову задовольняє. Для пари $(m, n) = (1, -1)$ маємо, що $m - 4n = 5$ та $m - 7n = 8$ – умову не задовольняє.

При $n = 0$ $m^2 = 1$. Для пар $(m, n) = (-1{,}0)$ та $(1{,}0)$ маємо, що $m - 4n = \mp 1$ та $m - 7n = \mp 1$ – задовольняє умову.

11 клас

1. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a + b + c = 1$, доведіть нерівність:

$$\frac{1 + 9a^2}{1 + 2a + 2b^2 + 2c^2} + \frac{1 + 9b^2}{1 + 2b + 2c^2 + 2a^2} + \frac{1 + 9c^2}{1 + 2c + 2a^2 + 2b^2} < 4.$$

Розв'язання. З умов задачі випливає, що $a^2 < a$, …, тому

$$\frac{1 + 9a^2}{1 + 2a + 2b^2 + 2c^2} + \ldots < \frac{1 + 9a^2}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2} + \ldots = \frac{3 + 9(a^2 + b^2 + c^2)}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2} =$$
$$= \frac{3 + (a^2 + b^2 + c^2) + 8(a^2 + b^2 + c^2)}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2} < \frac{3 + (a + b + c) + 8(a^2 + b^2 + c^2)}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2} =$$
$$= \frac{4 + 8(a^2 + b^2 + c^2)}{1 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2} = 4.$$

2. У гострокутному трикутнику ABC, у якого $BC < CA < AB$, проведені висоти AD, BE та CF. Пряма, що паралельна DE та проходить через F, перетинає пряму BC у точці M, а бісектриса $\angle MFE$ перетинає пряму DE у точці N. Доведіть, що точка F є центром описаного кола ΔDMN тоді і тільки тоді, якщо B є центром описаного кола ΔFMN.

Розв'язання. Позначимо стандартним чином кути ΔABC: $\alpha < \beta < \gamma$. За побудовою $ABDE$ – вписаний чотирикутник, при цьому $\angle CDE = \angle BAE = \alpha$ (рис. 4). Аналогічно вписаними є чотирикутники $BCEF$ та $CAFD$, та $\angle BFE = 180° - \angle ECB = 180° - \gamma$, $\angle BFD = \angle ACD = \gamma$ і $\angle FDB = \angle FAC = \alpha$.

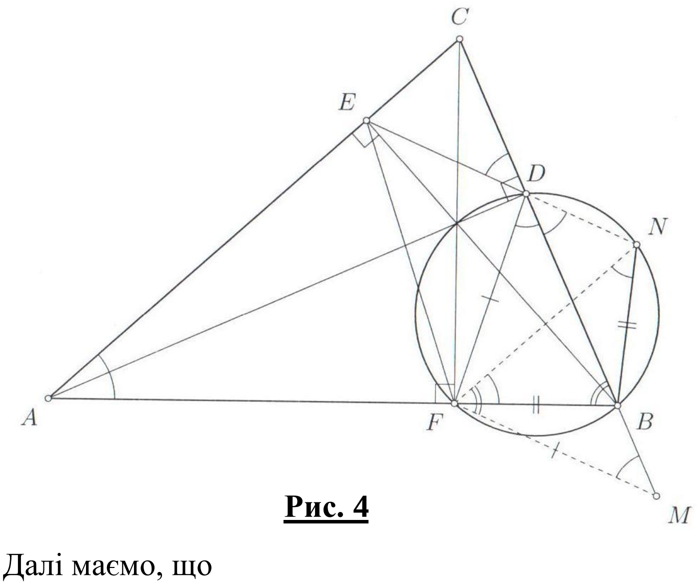

Рис. 4

Оскільки $FM || DE$, то $\angle BMF = \angle CDE = \alpha$ тому $\angle MFB = \angle CBF - \angle BMF = \beta - \alpha$. Тепер маємо, що

$$\angle MFE = \angle MFB + \angle BFE = (\beta - \alpha) + 180° - \gamma = 2\beta.$$

Таким чином $\angle MFN = \beta$, звідси

$$\angle BFN = \angle MFN - \angle MFB = \alpha < \gamma = \angle BFD.$$

З цього випливає, що N розташована поза ΔABC. Далі маємо, що

$$\angle BDN = \angle CDE = \alpha = \angle BFN.$$

Таким чином $BNDF$ – циклічний. З чого маємо, що $\angle FNB = \angle FDB = \alpha$, звідки трикутники FMD та BNF рівнобедрені, тому $FM = FD$ та $BN = BF$. З цього можна зробити завершення доведення (рис. 2):

F – центр описаного кола $\Delta MND \Leftrightarrow \angle MFN = 2\angle MDN \Leftrightarrow \beta = 2\alpha \Leftrightarrow \beta - \alpha = \alpha \Leftrightarrow \angle MFB = 2\angle BMF$ $\Leftrightarrow MB = BF$ F – центр описаного кола ΔMNF.

3. Задача 10.3.

4. Задача 10.4.

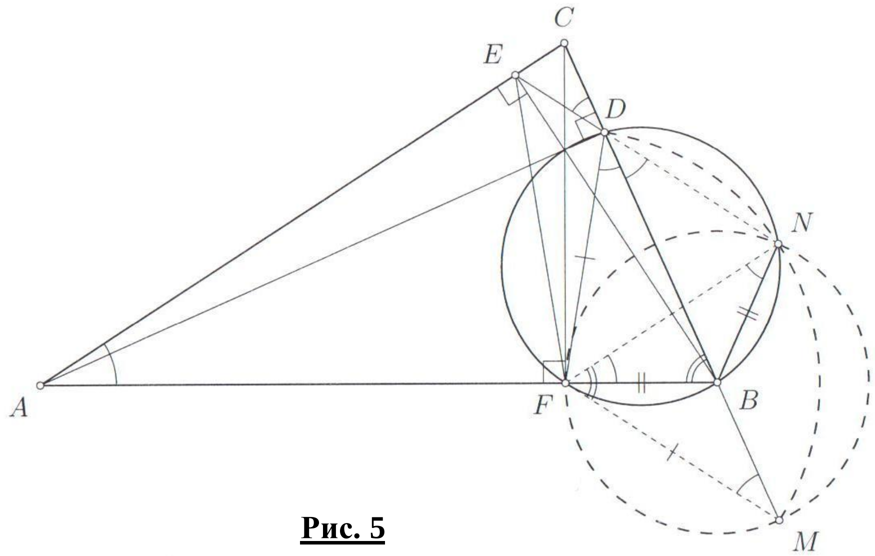

Рис. 5