Київська міська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

LXXVI Київська міська олімпіада юних математиків

Обласні олімпіади юних математиків

Умови задач

2 тур

«Наприкінці все обов'язково має бути добре.
Якщо щось погано, то ще не кінець.»
Пауло Коельо

7 клас

1. Чотири команди зіграли у декілька кіл турнір, тобто кожна команда з кожною іншою зіграли однакову кількість зустрічей. За перемогу нараховувалося 3 очки, за нічию кожна команда отримувала 1 очко, за поразку очок не нараховувалося. Разом усі команди набрали 46 очок. Чи можна з'ясувати, скільки ігор завершилися внічию?

2. Для яких натуральних n вираз $S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \ldots + (n^2)!$ є точним квадратом?

Для натурального числа k значення $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

3. Відомо, що числа $a,\ b$ задовольняють умови: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{11}{2}$ та $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{101}{10}$. Чому може дорівнювати значення суми $a + b$?

4. Сторони трикутника ABC продовжені в обидві сторони і на цих продовженнях у зовнішній бік відкладені 6 однакових відрізків $AA_1,\ AA_2,\ BB_1,\ BB_2,\ CC_1,\ CC_2$ (рис. 1). Виявилося, що усі 6 точок $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ C_1,\ C_2$ лежать на одному колі. Чи обов'язково ΔABC є рівностороннім?

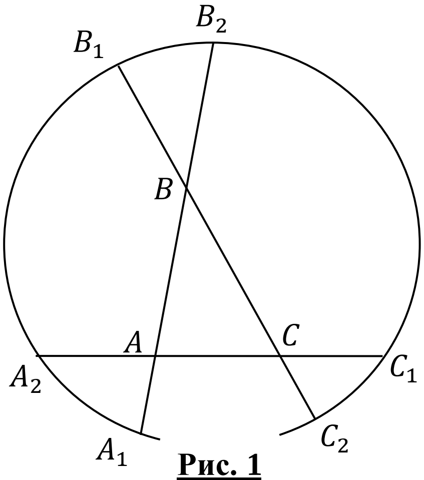

Рис. 1

3.1. Знайдіть хоча б одну трійку натуральних чисел a, b, c, що задовольняють умову:

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2020.$$
$$(1^2 + 1)(3^2 + 1)(10^2 + 1) = 2 \cdot 10 \cdot 101.$$

4.1. Точка C лежить всередині прямого кута AOB. Доведіть, що периметр трикутника ABC більший ніж $2 \cdot OC$.

8 клас

1. На дошці записане число $2021! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2021$. Олеся та Андрій грають у гру, роблячи ходи по черзі (розпочинає Олеся). Хід складається в тому, що гравець повинен поділити записане на дошці число на довільне число вигляду $P = p_1 p_2 \ldots p_k$, яке складається з добутку декількох (не менше ніж одного) попарно різних простих чисел, і записати одержане число на дошку замість попереднього. Програє той, після чийого ходу на дошці буде записане не ціле число. Хто виграє в цій грі, якщо кожний хоче перемогти?

2. У трикутнику ABC $\angle B = 90°$ та $\angle A = 60°$, I – точка перетину його бісектрис. Пряма, що проходить через точку I паралельно прямій AC, перетинає сторони AB та BC у точках P та T відповідно. Доведіть, що $3PI + IT = AC$.

3. У країні деякі пари міст з'єднані односторонніми залізницями, по яких потяги можуть рухатися лише в одному напрямі. Виявилося, що для будь-яких двох міст A та B існує принаймні два різних маршрути залізницею, в кожному з яких одне з міст, наприклад, A – є початком, а B – кінцем маршруту. Доведіть, що існує місто з якого можна виїхати та повернутися в нього залізницею.

4. Про дійсні числа a, b, c відомо, що вони задовольняють такі умови:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-7, \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{11}{8}, \frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}=\frac{75}{8}.$$

Чому може дорівнювати значення такого виразу:

а) $a+b+c$; ***б)*** abc?

3.1. Яку найбільшу довжину може мати замкнена ламана без самоперетинів, ланки якої розташовані по лініях сітки квадрату 8×8 (в тому разі і по краю)?

4.1. Задача **4 *а)*.**

9 клас

1. На острові живе 2021 людина, кожна з яких є математиком або гуманітарієм. Деякі мешканці острова знайомі один з одним, при цьому кожний має принаймні одного знайомого. Відомо, що той, в кого серед знайомих математиків менше ніж гуманітаріїв, завжди бреше, а усі інші завжди кажуть правду. Кожний мешканець острова стверджує, що серед його знайомих рівно два гуманітарії. Доведіть, що хоча б одна людина має принаймні 4-х знайомих.

2. В гострокутному трикутнику ABC висоти BE і CF перетинаються в ортоцентрі H, а M – середина BC. Пряма EF перетинає прямі MH і BC в точках P і T відповідно. AP вдруге перетинає описане коло ΔABC в точці Q. Доведіть, що $\angle AQT = 90°$.

3. Нехай $a,\ b,\ c$ – попарно взаємно прості натуральні числа з сумою 200, при цьому число $(a+bc)(b+ca)$ ділиться націло на $c+ab$. Доведіть, що тоді принаймні одне з чисел $a,\ b,\ c$ дорівнює 1.

4. Знайдіть всі трійки додатних чисел a, b, c, для яких справджуються такі умови:

$$abc = 1 \text{ та } (a^2+b^2+c^2)^3 = (a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1).$$

3.1. На дошку виписали усі власні дільники деякого складеного натурального числа n, збільшенні на 1. Знайдіть усі такі числа n, для яких числа на дошці будуть усіма власними дільниками деякого складеного натурального числа m.

Дільник натурального числа називається *власним*, якщо він відмінний від 1 та самого числа.

4.1. Додатні числа a, b, c задовольняють умові $ab+bc+ca \geq 1$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq\frac{\sqrt{3}}{abc}.$$

10 клас

1. Знайдіть усі четвірки попарно різних простих чисел p, q, r, s, що задовольняють рівності: $p + qrs = 315$.
2. Доведіть, що числа x, y, z мають однаковий знак тоді і тільки тоді, коли одночасно виконуються такі умови: $xy + yz + zx > 0$ та $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} > 0$.
3. Нехай A – множина з n різних чисел, B – множина з n різних чисел, C – множина з $(n-1)$ різних чисел. Доведіть, що можна розбити числа з A та B на n пар (в кожній з яких одне число з A та одне число з B) таким чином, що сума чисел в кожної пари не належить множині C.
4. Всередині чотирикутника $ABCD$ відмітили точку O таку, що $\angle OAD + \angle OBC = \angle ODA + \angle OCB = 90°$. Доведіть, що центри описаних навколо трикутників OAD та OBC кіл, а також середини сторін AB та CD лежать на одному колі.
3.1. Скількома способами можна розфарбувати клітинки дошки 2021×2021 у жовтий та синій колір таким чином, щоб справджувалася умова: кожні два рядки мають різну кількість синіх клітинок, а кожні два стовпчики мають різну кількість жовтих клітинок?
4.1. Нехай $ABCD-$ рівнобічна трапеція, $AD = BC, AB \parallel CD$. Діагоналі трапеції перетинаються у точці O, а точка M є серединою сторони AD. Коло, описане навколо трикутника BCM, вдруге перетинає сторону AD у точці K. Доведіть, що $OK \parallel AB$.

11 клас

1. Доведіть, що при кожному натуральному n число $\frac{18^{4n+2}+1}{325}$ є складеним натуральним числом.
2. Знайдіть усі такі функції $f: R \to R$, що для довільних дійсних x, y справджується рівність:

$$f^{([x]^2+[y]^2+1)}(x) + f^{([x]^2+[y]^2+1)}(y) = x + y.$$

Тут через $f^{(k)}(x)$ позначена кількість композицій функції f, тобто це $\underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(x)\ldots))$.
3. У трикутнику ABC провели висоту BH та бісектрису BL, вписане коло w дотикається до сторони AC в точці K. Відомо, що $\angle BKA = 45°$. Доведіть, що коло з діаметром HL дотикається до кола w.
4. Дано натуральне число N і відсортований масив цілих чисел $A^0 = [a_1, a_2, \ldots, a_N]$, для яких виконується умова: $0 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N \leq N$. Масив A^{i+1} отримується з масиву A^i таким чином: для кожного j від 1 до N від j -го елемента A^i віднімається j, отриманий масив сортується знову у порядку неспадання, після чого до всіх чисел додається деяка константа так, щоб мінімальне число в масиві стало рівним 0 – отриманий масив є масивом A^{i+1}. Наприклад,

$$A^0 = [0,0,1,2] \to [-1,-2,-2,-2] \to [-2,-2,-2,-1] \to A^1 = [0,0,0,1] \to$$
$$\to [-1,-2,-3,-3] \to\to [-3,-3,-2,-1] \to A^2 = [0,0,1,2].$$

Доведіть, що для $i \geq N-1$ справджується умова $A^i = A^{i+2}$.

3.1. Два кола k_1 та k_2 з радіусами r_1 та r_2 не мають спільних точок. Пряма AB – спільна внутрішня дотична, а пряма CD – спільна зовнішня дотична до цих кіл, де $A, C \in k_1$ та $B, D \in k_2$. Знаючи, що $AB = 12$ та $CD = 16$, знайдіть значення добутку $r_1 r_2$.

4.1. Маємо n куп, кожна з яких містить по 2021 камінців. Ваги камінців дорівнюють одному з чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 25$ та загальна вага кожної купки різна. Відомо, що якщо взяти дві довільні купки та забрати з кожної з них найважчий та найлегший камінець, то купка, що була перед тим важчою стане легшою. Для якого максимального n це можливо?