Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Київська міська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка

LXXVI Київська міська олімпіада юних математиків

Обласні олімпіади юних математиків

Умови та до розв’язання задач

1 тур

Київ, 31 січня 2021 року

«Чим більше зробиш ти сьогодні,
тим більше завтра виправляти.»

7 клас

1. Мама принесла Андрієві та Олесі 4 кульки, на яких були написані числа 1, 2, 3 та 4 (по одному на кожній кульці). Вона тримала в кожній руці по 2 кульки і не знала, які саме числа написані на цих кульках у кожній руці. Мама попросила Андрія взяти собі з кожної руки кульку з більшим числом, а далі з двох кульок, що він взяв, залишити кульку з меншим числом. Після цього попросила Олесю взяти дві інші кульки, і з цих двох залишити кульку з більшим числом. Чи зможе мама гарантовано сказати в кого з дітей лишилася кулька з більшим числом?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: не зможе.

Розв'язання. Якщо мама візьме на початку кульки з номерами $1,2$ у ліву руку та $3,4$ у праву, то Андрій лишає собі кульки з числами 2 та 4, і остаточно залишає собі кульку з числом 2. Олеся при такому самому початковому виборі залишає собі кульки з числами 1 та 3, і остаточно лишає собі кульку з числом 3.

Якби мама взяла на початку в руки кульки з номерами $1,3$ у ліву руку та $2,4$ у праву, то Андрій лишив би кульки з числами 3 та 4, і остаточно залишив би собі кульку з числом 3. Олеся при такому самому початковому виборі залишила кульки з числами 1 та 2, і остаточно лишила б собі кульку з числом 2.

Таким чином при різних розподілах чисел на кульках на початку число у Андрія на його кульці може бути як більше, так і менше від числа на кульці, що лишилася у Олесі.

2. Андрій та Олеся по черзі (починає Андрій) у прямокутнику 2×1 проводять горизонтальні відрізки довжиною 2 чи вертикальні довжиною 1, як це показано на рис. 1. Після кожного ходу рахується величина P – сумарний периметр усіх малих прямокутників, що при цьому утворилися (тобто таких, всередині яких не проходить жодний інший відрізок). Перемагає той з них, після ходу якого P ділиться націло на 2021. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

(Богдан Рубльов)

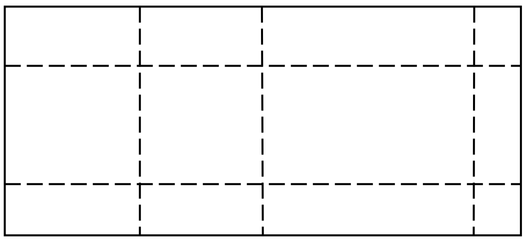

Рис. 1

Відповідь: Андрій.

Розв'язання. Після проведення горизонтального відрізку значення P збільшується на 4, а при проведенні вертикального – на 2 і з самого початку $P = 6$. Тому усі проміжні значення P будуть парними. Перше натуральне число, яке може ділитися на 2021 та якого може набути P – це число 4042. Покажемо, що Андрій завжди може перемогти. Оскільки $4042 = 673 \cdot 6 + 4$, то він своїм першим ходом проводить горизонтальний відрізок, після якого маємо значення $P = 10$. Після цього він проводить відрізки, іншого напряму ніж Олеся своїм останнім ходом – якщо вона вертикальний, то він горизонтальний та навпаки. Тоді після кожного його ходу P збільшується на 6, таким чином після 674-го ходу Андрія матимемо, що $P = 673 \cdot 6 + 4 = 4042$, що і є переможною стратегією.

3. Петрик зробив розклад числа $10^6 = 1000000$ на 7 попарно різних натуральних множників. Серед всіх таких розкладів знайдіть той, у якого найбільший з цих 7 множників є найменшим із можливих.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 50$.

Розв'язання. Доведемо, що наведена відповідь є найкращою. Припустимо, що там усі множники менші від $50 = 2 \cdot 5^2$. Тоді там може бути максимум один множник, що кратний 5^2, тобто $25 = 5^2$. Решта не можуть ділитися більше ніж на 5. Оскільки $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, то на 5 мають ділитися ще рівно 4 таких множники, щоб ми остаточно мали подільність добутку на 5^6. Таким чином маємо 4 множники вигляду $5a_k = 5 \cdot 2^{b_k}$, де усі b_k мають бути попарно різними. Оскільки $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \le 6$, то єдина можливість 5, $5 \cdot 2^1$, $5 \cdot 2^2$ та $5 \cdot 2^3$. Таким чином визначені 5 множників, добуток яких вже дорівнює $10^6 = 2^6 \cdot 5^6$, тобто обидва останніх мають бути рівними 1. Одержали суперечність.
Так само суперечність одержимо, якщо припустити, що там немає жодного дільника, що кратний 5^2. Тоді буде принаймні 6, що кратні 5, а тому там буде 6 множників вигляду $5a_k = 5 \cdot 2^{b_k}$, де усі b_k мають бути попарно різними, а тому їхній добуток ділиться більше, ніж на 2^6. Одержана суперечність завершує доведення.

4. Прямокутник 3×5 поділений на комірки 1×1. Три середні комірки, що не мають спільних точок з межею прямокутника, видалені. Чи можна в решту 12 комірок розставити по одному числа 1, 2, …, 12 таким чином, щоб суми чисел у комірках вздовж кожної з чотирьох сторін прямокутника були однаковими?

(Марія Рожкова)

a				***b***

Рис. 2

12				**10**

Рис. 3

				11
12				**10**
				7

Рис. 4

Відповідь: ні.
Розв'язання. Припустимо, що це можливо. Нехай S – однакові суми чисел вздовж кожної сторони. Позначимо через a та b числа у комірках, як то показане на рис. 2. Тоді $2S + a + b = 1 + 2 + \ldots + 12 = 78$. Таким чином $a + b$ – парне, тому $a + b \le 12 + 10 = 22 \Rightarrow 2S \ge 56$.

Якщо вздовж коротких сторін взяти найбільші числа, то $2S \le 7 + 8 + \ldots + 12 = 57$. Тобто єдина можливість $2S = 56$. Цей варіант можуть дати лише набір $6 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$, крім того $a + b = 22$, тобто без обмеження загальності можемо вважати, що $a = 12$, $b = 10$ (рис. 3). Вздовж короткої сторони з числом 10 мають стояти два числа з сумою 18. Оскільки не можна взяти $12 + 6$, $10 + 8$ та $9 + 9$, то єдиний варіант $11 + 7$ (рис. 4). Тоді числа поруч з 12 мають давати суму 16, але такого варіанта підібрати неможливо.

3.1. Число будується таким чином: усі натуральні числа від 1 до 2021 виписані одне за одним як величезне багатоцифрове число M. Після цього з числа M були викреслені усі цифри 8 та отримали число V. Чи буде отримане число V ділитися націло на 3?

Відповідь: ні.
Розв'язання. В записі такого числа $M = 123456\ldots2021$ кожні три послідовних числа, наприклад, 474849 утворюють число, що ділиться на 3. Оскільки $2019 \vdots 3$, то подільність числа M на 3 рівносильна подільності числа 20202021, яке так само ділиться на 3. Залишається порахувати кількість цифр 8, що були викреслені при отриманні числа V. Серед чисел $1,2,\ldots,1000$ цифра 8 зустрічається однакову кількість разів серед одиниць, десятків та сотень, тому їхня кількість кратна 3. Так само для чисел $1001,1002,\ldots,2000$. Залишається порахувати їхню кількість серед чисел $2001,\ldots,2021$. Вона там зустрічається у числах 2008 та 2018, тобто двічі, їхня сума не кратна 3, тому й число V не ділиться націло на 3.

4.1. Петрик поставив на стандартну шахівницю 8×8 декілька королів так, що вони не атакують один одного і не можна більше додати жодного нового короля без порушення цього правила.

а) Яку найбільшу кількість королів він міг розмістити на дошці таким чином?
б) Яку найменшу кількість королів він міг розмістити на дошці таким чином?

Зауваження. Шаховий король атакує усі клітини, які мають спільну сторону або вершину з клітиною, де він стоїть.

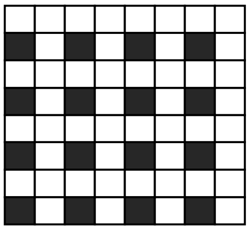

Рис. 5

Відповідь: ***а)*** 16, ***б)*** 9.
Розв'язання*. *а) Якщо поділити шахівницю на 16 квадратів 2×2, то в кожному з них може бути не більше 1 короля, тому найбільша кількість – 16, що досягається наведеним прикладом (рис. 5).

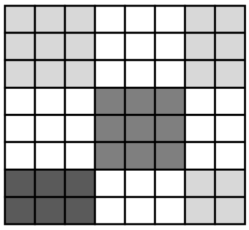

Рис. 6

б) Розділимо шахівницю на 9 прямокутників як на рис.6. Відмітимо, що як би ми не ставили короля в один з них, то в іншому є клітина, куди за правилами можна поставити короля. Таким чином усього можна поставити щонайменше 9 королів. Крім того, якщо короля поставити у центральну клітину (яка межує тільки з клітинами цього прямокутника) кожного прямокутника, то в цей же прямокутник більше короля поставити не можна. Таким чином найменша кількість – 9.

8 клас

1. Знайдіть усі натуральні числа n, які можна відняти від чисельника та знаменника дробу $\frac{1234}{6789}$, щоб отримати, можливо після скорочення, правильний дріб $\frac{a}{b}$, де a, b – одноцифрові числа.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 123.
***Розв'язання*.** Розглянемо вказану рівність: $\frac{1234-n}{6789-n} = \frac{a}{b}$, і зробимо такі перетворення.

$$1234b - nb = 6789a - na \Rightarrow 1234b - nb = 1234a + 5555a - na \Rightarrow$$
$$(1234 - n)(b - a) = 5555a = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a.$$

З умов задачі очевидно, що $0 < b - a < 9$, тому на 11 та 101 може ділитися лише множник $1234 - n$, таким чином єдина можливість $1234 - n = 1111 = 11 \cdot 101$. Неважко переконатися звідси, що $n = 123$ є єдиний шуканий розв'язок: $\frac{1234-n}{6789-n} = \frac{1234-123}{6789-123} = \frac{1111}{6666} = \frac{1}{6}$.

2. Олексій пише на дошці всі цифри від 0 до 9, після чого Влада витирає одну з них. Далі він записує на дошці 10 дев'ятицифрових чисел, кожне з яких складається з усіх дев'яти цифр, записаних на дошці (деякі з цих чисел можуть збігатися). Виявилося, що сума цих 10 чисел є десятицифровим числом, усі цифри якого різні. Яку цифру могла витерти Влада?

(Олексій Масалітін)

Відповідь: 0 або 9.
***Розв'язання*.** Нехай Влада витерла цифру a. Тоді сума цифр кожного з десяти записаних на дошці чисел дорівнює $45 - a$. Але тоді сума цифр їх суми має таку ж остачу при діленні на 9, що й число $10(45 - a)$. Але сума цифр їх суми дорівнює 45, а тому $10(45 - a)$ ділиться на 9. Таким чином, $a \in \{0,9\}$. Приклад для $a = 0$ будується, якщо взяти число 123456789 десять разів. Для $a = 9$ достатньо 9 разів взяти число 102345678 та один раз взяти число 102345687, що у сумі дає 1023456789.

3. Клітинки 1×1, що розташовані по периметру квадрата 3×3, заповнені числами 1, 2, ... , 8 таким чином, що суми уздовж кожної з чотирьох сторін рівні. У лівій верхній кутовій клітині стоїть число 8, а правій верхній – число 6 (рис. 7). Скільки існує різних заповнень числами решти комірок за таких умов?

(Марія Рожкова)

8		**6**

Рис. 7

8	**1**	**6**
4		**2**
3	**5**	**7**

Рис. 8

Відповідь: єдине.

Розв'язання. Позначимо числа, що розташовані у двох інших кутових комірках через a та b. Тоді сума чисел по усіх сторонах дорівнює з одного боку:

$$(1+2+\cdots+8)+(6+8+a+b)=50+a+b=4S,$$

де S – сума чисел на стороні. Таким чином $a+b=4k+2$. Для такої пари чисел є лише дві можливості: $a+b=6$ або $a+b=10$.

При $a+b=6 \Rightarrow S=14$ – неможливо для верхнього рядка.

Тому $a+b=10$ та $S=15$. Таким чином у верхньому рядку між 8 та 6 розташоване число 1. Крім того, за таких умов суму $a+b=10$ може мати лише сума $7+3$, при цьому 7 має бути в одному рядку з 6 – права нижня клітинка, тому 3 – ліва нижня. Решта далі чисел розставляються однозначно (рис. 8).

4. Нехай BM – медіана трикутника ABC, в якому $AB > BC$. Точка P вибрана так, що $AB||PC$ та $PM \perp BM$. Доведіть, що $\angle ABM = \angle MBP$.

(Михайло Штанденко)

Розв'язання. Позначимо на промені BM за точкою M точку D так, що $BM = MD$ (рис. 9). Тоді $\Delta ABM = \Delta CMD$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідки $\angle BAM = \angle MCD$, проте з паралельності $AB||PC$ випливає, що $\angle BAM = \angle MCP$, порівнюючи останні дві рівності одержимо, що точка P лежить на прямій CD. Таким чином пряма $AB||PD$. Оскільки в ΔBPD за побудовою відрізок PM є медіаною та висотою, тому цей трикутник є рівнобедреним, тобто $PB = PD$. Звідси та з паралельності $AB||PD$ одержимо, що $\angle ABM = \angle MDP = \angle MBP$.

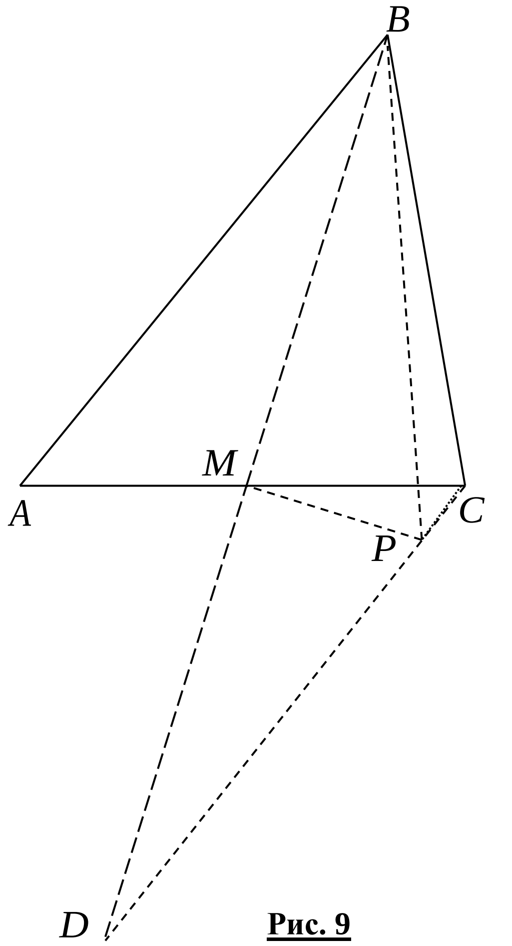

Рис. 9

5. Для простого числа $p > 3$ визначимо такий нескоротний дріб $\frac{m}{n}$:

$$\frac{m}{n} = \frac{p-1}{2} + \frac{p-2}{3} + \cdots + \frac{2}{p-1} - 1.$$

Доведіть, що m ділиться націло на p.

(Олексій Масалітін)

Розв'язання. Позначимо через $x_i = \frac{i}{p+1-i} + \frac{p+2-i}{p+1-(p+2-i)}$, $2 < i < \frac{p}{2} + 1$. Тоді

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{p-1} + x_3 + x_4 + \cdots + x_{\frac{p+1}{2}} - 1.$$

Зауважимо, що

$$x_i = \frac{i}{p+1-i} + \frac{p+2-i}{p+1-(p+2-i)} = \frac{p+1}{p+1-i} - 1 + \frac{p+1}{i-1} - 1 = \frac{p(p+1)}{(p+1-i)(i-1)} - 2.$$

Тоді

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{p-1} + \frac{p(p+1)}{(p+1-3)(3-1)} - 2 + \cdots + \frac{p(p+1)}{\left(p+1-\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}-1\right)} - 2 - 1 =$$

$$= \frac{2}{p-1} - 2 \cdot \left(\frac{p+1}{2} - 2\right) - 1 + \frac{p(p+1)}{(p+1-3)(3-1)} + \cdots + \frac{p(p+1)}{\left(p+1-\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}-1\right)} =$$

$$= \frac{2p}{p-1} - p + \frac{p(p+1)}{(p+1-3)(3-1)} + \cdots + \frac{p(p+1)}{\left(p+1-\frac{p+1}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}-1\right)}.$$

Чисельник кожного доданку ділиться на p, а жодний із знаменників – ні. Звідси зрозуміло, що $m \vdots p$, що й треба було довести.

4.1. На сторонах AB та BC трикутника ABC вибрані точки K та M відповідно так, що $KM||AC$. Відрізки AM та KC перетинаються в точці O. Відомо, що $AK = AO$ та $KM = MC$. Доведіть, що $AM = KB$.

***Розв'язання*.** Визначимо послідовно кути (рис. 10):

$$\angle AKO = \angle AOK = \alpha, \angle CKM = \angle KCM = \beta.$$

З паралельності маємо також, що $\angle ACK = \beta$. Далі маємо, що

$$\angle KOM = 180° - \alpha \Rightarrow \angle OMK = \angle MAC = \alpha - \beta \Rightarrow \angle MAK = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha - \beta.$$

Таким чином $\Delta MAC = \Delta KBM$, бо мають рівні відповідні кути і $MK = MC$. Отже $AM = BK$, як відповідні сторони рівних трикутників.

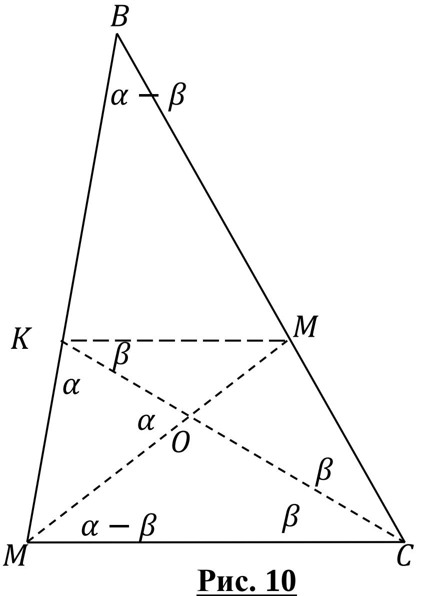

Рис. 10

5.1. Знайдіть цілі числа $a,\ b,\ c$, що задовольняють умові

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = \frac{5}{c+3}.$$

Відповідь: (a,b,c): $(-4,-6,-8)$, $(-16,-22,-4)$, $(14,18,-2)$ та $(2,2,2)$.

***Розв'язання*.** З рівностей $(a+1)(c+3) = 15$ та $(b+2)(c+3) = 20$. Таким чином $c+3$ одночасно ділить 15 та 20. Звідси випливає, що цей вираз має ділити 5, тому число $\frac{5}{c+3}$ – ціле і $c+3$ може приймати чотири значення. Розглянемо ці випадки.

$c + 3 = -5 \Rightarrow c = -8$ та $\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = -1 \Rightarrow a = -4, b = -6$.

$c + 3 = -1 \Rightarrow c = -4$ та $\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = -5 \Rightarrow a = -16, b = -22$.

$c + 3 = 1 \Rightarrow c = -2$ та $\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = 5 \Rightarrow a = 14, b = 18$.

$c + 3 = 5 \Rightarrow c = 2$ та $\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{4} = 1 \Rightarrow a = 2, b = 2$.

9 клас

1. Перед олімпіадою з математики Дмитро почув діалог Оленки та Миколи про їхні дні народження.

> ***О:*** *«Число та номер місяця мого дня народження вдвічі менші за відповідні число та номер місяця дня народження Миколи.»*
>
> ***М:*** *«Також число, коли народилась Оленка, і номер місяця мого народження є послідовними натуральними числами.»*
>
> ***О:*** *«А сума всіх цих чотирьох чисел кратна* 17.*»*

Чи зможе Дмитро знайти число та місяць народження Оленки.

(Артемчук О., Мороз М.)

Відповідь: 11 червня.
Розв'язання. Нехай x – номер місяця народження Оленки. Тоді $2x$ номер місяця народження Миколи. Очевидно, що $x \leq 6$, оскільки номер місяця народження Миколи не може бути більшим за 12. Оскільки число дня народження Олени і номер місяця народження Миколи є послідовними натуральними числами, то маємо два випадки.

Випадок 1. Число дня народження Олени дорівнює $2x - 1$, тому число дня народження Миколи $4x - 2$. За умовою сума всіх цих чотирьох чисел

$$(2x-1)+x+(4x-2)+2x \vdots 17 \Rightarrow 9x-3=17k.$$

Ліва частина приймає такі значення: $6,\ 15,\ 24,\ 33,\ 42$ та 51. Таким чином умову задовольняє лише $51 = 17k$ при $x = 6$, звідки легко знаходимо відповідь – у Олени день народження 11.06, а у Миколи – 22.12.
Випадок 2. Число дня народження Олени дорівнює $2x + 1$, тому число дня народження Миколи $4x + 2$. Сума всіх цих чотирьох чисел

$$(2x+1)+x+(4x+2)+2x \vdots 17 \Rightarrow 9x+3=17k.$$

Ліва частина приймає такі значення: $12,\ 21,\ 30,\ 39,\ 48$ та 57. Таким чином умову не задовольняє жодне число, а тому знайдена у першому випадку відповідь – єдина.

2. Рома написав на дошці 100 разів кожне з чисел 2018, 2019, 2020. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натурального числа n. За одну дію Рома може обрати довільне натуральне число k і замість будь-яких трьох чисел a, b, c, що написані на дошці, написати числа $2S(a+b)+k,\ 2S(b+c)+k$ та $2S(c+a)+k$. Чи може Рома за декілька таких дій досягти того, щоб 299 чисел на дошці були рівними, а останнє відрізнялось від них на 1?

(Олексій Масалітін)

Відповідь: не зможе.
Розв'язання. Добре відомо, що $S(n) \equiv n\ (mod\ 3)$. Тоді помітимо, що

$$2S(a+b)+k+2S(b+c)+k+2S(c+a)+k \equiv 4(a+b+c)+3k \equiv a+b+c\ (mod\ 3).$$

Тобто остача суми чисел не дошці при діленні на 3 не змінюється в ході таких операцій. Сума чисел спочатку давала остачу 0 при діленні 3. Припустимо, що в кінці Рома отримав 299 чисел x та число $x \pm 1$. Тоді сума чисел на дошці дорівнює$300x \pm 1$, що не ділиться на 3. Отримана суперечність завершує доведення.

3. Нехай $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Для якого найменшого натурального значення n добуток $P_n = a_2 a_3 a_4 \dots a_n$ більший 100?

Відповідь: $n = 27$.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4} = \frac{(n^4-1)+2n(n^2-1)}{n^4} = \\ = \frac{(n^2+2n+1)(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n+1)^3(n-1)}{n^4} \Rightarrow$$

$$P_n = a_2 a_3 a_4 \dots a_n = \frac{3^3 \cdot 1}{2^4} \cdot \frac{4^3 \cdot 2}{3^4} \cdot \frac{5^3 \cdot 3}{4^4} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)^3(n-1)}{n^4} = \frac{(n+1)^3}{2^3 n}.$$

Залишається розв'язати нерівність:

$$\frac{(n+1)^3}{2^3 n} > 100 \Rightarrow (n+1)^3 > 800n \Rightarrow n^3+3n^2+3n+1 > 800n$$

Остання нерівність випливає з такої:

$$n^3+3n^2-797n>0 \iff n^2+3n-797>0 \iff$$
$$n<\frac{-3-\sqrt{3197}}{2} \text{ та } n>\frac{-3+\sqrt{3197}}{2} \Rightarrow n\geq 27.$$

Таким чином $n=27$ задовольняє умову, але чи є найменшим треба перевірити попереднє число. Тут $P_{26}=\frac{27^3}{8\cdot 26}<95$ – умову не задовольняє.

4. Задані натуральне число k та не обов'язково різні натуральні числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_k$. Виявилося, що при будь-якому розфарбуванні усіх натуральних чисел від 1 до 2021 в один із k кольорів так, щоб було рівно a_1 чисел першого кольору, a_2 чисел другого кольору, …, a_k чисел k-го кольору, завжди знайдеться таке число $x\in\{1,\ 2,\dots,\ 2021\}$, що усього чисел, які пофарбовані у колір, що співпадає з кольором числа x, є рівно x. Чому може дорівнювати число k за таких умов?

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: $k\in\{1,\ 43,\ 47,\ 2021\}$ – довільний дільник числа 2021.

Розв'язання. Якщо k – дільник 2021, то виберемо такі числа $a_1=a_2=\dots=a_k=\frac{2021}{k}$. Як би не були пофарбовані числа, за умовою там кожного з k кольорів рівно $\frac{2021}{k}$ чисел. Вибираємо в якості $x=\frac{2021}{k}$, тоді в цей колір пофарбовано точно $\frac{2021}{k}$ чисел, тобто рівно x.

Тепер припустимо, що k не дільник 2021. Розділимо усі числа $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$ на групи попарно рівних: $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_m$. Якщо було б $m=1$, то усі числа $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$ були б рівні, в сумі вони дають 2021, а тому $ka_1=2021$, тому k є дільником числа 2021 – суперечність. Без обмеження загальності вважаємо, що в групі S_i усі числа дорівнюють a_i, $i=\overline{1,\ m}$. Тепер пофарбуємо число a_i у колір з номером a_{i+1}, $i=\overline{1,\ m}$ (тут вважаємо, що $a_{m+1}=a_1$).

Зрозуміло, що число x має вибиратися з множини $\{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k\}$, бо інакше кількості чисел кольору x не існує. Якщо $x=a_i$, то кількість чисел, що дорівнюють a_i є числом, що відмінне від a_i.

Наприклад, $k=3,\ a_1=1011,\ a_2=1000$ та $a_3=10$. Тоді число $a_1=1011$ фарбуємо в білий колір, число $a_2=1000$ – в жовтий та число $a_3=10$ – в синій. Далі, наприклад, фарбуємо числа $1-999$ у білий колір, числа $2013-2021$ – у жовтий, решту – в синій. Тоді число $x=10$ синє, але синіх чисел усього 1011, число $x=1000$ – жовте, а усього жовтих чисел 10, число $x=1011$ – біле, а усього білих чисел 1000.

5. Нехай BM – медіана трикутника ABC, в якому $AB>BC$. Точка P вибрана так, що $AB||PC$ та $PM\perp BM$. На прямій BP обрано точку Q так що $\angle AQC=90°$, причому точки B та Q лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що $AB=BQ$.

(Михайло Штанденко)

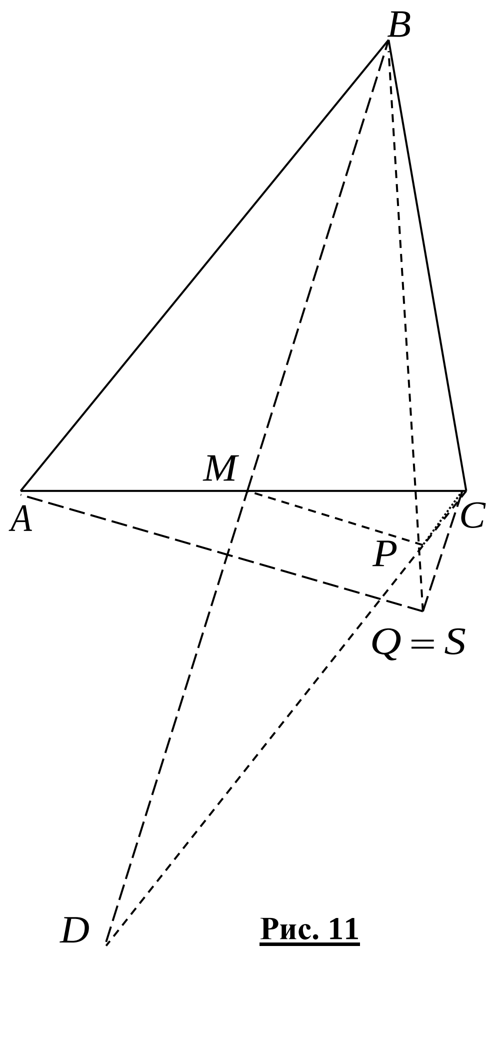

Рис. 11

Розв'язання. Позначимо на промені BM за точкою M точку D так, що $BM=MD$ (рис. 11). Тоді за побудовою $\Delta ABM=\Delta CMD$ за першою ознакою. Звідки $\angle MAB=\angle MCD$, проте з паралельності $PC||AB$ випливає, що $\angle MAB=\angle MCP$, порівнюючи останні дві рівності одержимо, що точка P лежить на прямій CD. Таким чином пряма $PD||AB$. Оскільки в

ΔBPD за побудовою відрізок PM є медіаною та висотою, тому цей трикутник є рівнобедреним, тобто $PB = PD$. Звідси та з паралельності $PD||AB$ одержимо, що $\angle ABM = \angle MDP = \angle MBP$.

На промені BP позначимо точку S так, що $AB = BS$. Тоді $\Delta ABM = \Delta SBM$ за першою ознакою, звідки $MA = MS$, проте тоді $MC = MA = MS$, тобто у ΔACS медіана SM дорівнює половині сторони до якої проведена, звідки ΔACS – прямокутний з прямим кутом $\angle ASC$. За таких умов $Q = S$, оскільки $\angle AQC = 90°$, $\angle ASC = 90°$, Q, $S \in BP$, та лежать по один бік від AC, оскільки $AB > BC$. Звідси остаточно маємо, що $BQ = BS = AB$, що й треба було довести.

4.1. У класі навчалася непарна кількість школярів. Кожний з них мав принаймні одного друга серед учнів свого класу. Крім того, у будь-яких двох однокласників, що мають спільного друга, кількість друзів різна.

а) Чи завжди у класі існує учень, що має рівно трьох друзів?

б) Чи завжди у класі існує учень, що має рівно 6 друзів?

Відповідь: ***а)*** так, ***б)*** ні.

Розв'язання. ***а)*** Розглянемо відповідний граф, де вершини – це учні, а ребрами з'єднані пари друзів. Тоді виберемо компоненту зв'язності, у якій непарна кількість учнів. Очевидно, методом від супротивного, що така існує. Очевидно, що такий граф з 3 вершинами умову не задовольняє. Таким чином в цій компоненті зв'язності принаймні 5 вершин.

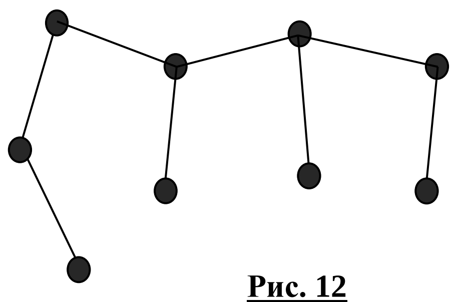

Рис. 12

Нехай n – максимальний степінь вершини, припустимо, що $n \leq 2$. Тоді цей граф просто шлях довжиною 5, бо у кожну вершину можна прибути та вийти єдиним чином. Але тоді там є 3 послідовні вершини зі степенем 2, що суперечить умові про різну кількість друзів. Таким чином $n \geq 3$ і нехай це вершина A має такий степінь. Таким чином n інших вершин, що з'єднані з A усі мають різний степінь. А тому кожне з чисел від 1 до n, а тому й число 3 обов'язково буде.

б) Приклад зображений на рис. 12.

5.1. Два кола ω_1 та ω_2 перетинаються у точках A та B. Пряма, що проходить через точку B, перетинає ω_1 у точці C та ω_2 у точці D. Пряма AC вдруге перетинає коло ω_2 у точці F, а пряма AD вдруге перетинає коло ω_1 у точці E. Нехай точка O – центр кола, описаного навколо ΔAEF. Доведіть, що $OB \perp CD$.

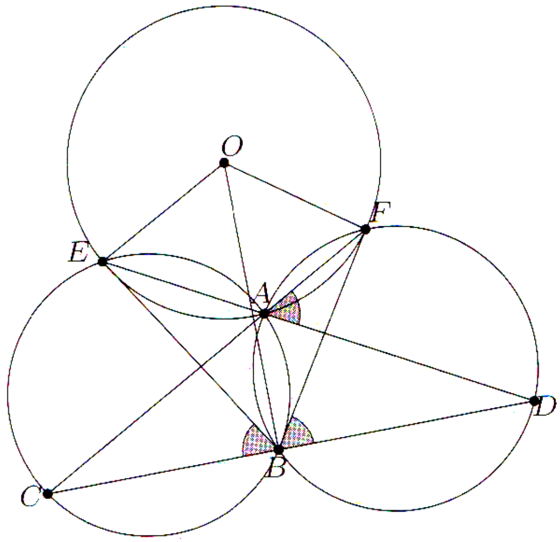

Рис. 13

Розв'язання. Опишемо коло навколо ΔAEF та позначимо $\angle EAC = \alpha$. Тоді $\angle EAF = 180° - \alpha$ та $\angle EOF = 2\alpha$ (рис. 13). З іншого боку, $\alpha = \angle EBC = \angle EAC = \angle FAD = \angle FBD$, а тому $\angle EBF = 180° - 2\alpha$. Маємо, що $\angle EOF + \angle EBF = 180°$, тому $EOFB$ – вписаний чотирикутник. Оскільки $EO = FO$, то $\angle EBO = \angle OBF$. Звідси маємо, що

$$\angle OBC = \angle CBE + \angle EBO = \angle OBF + \angle FBD = \angle OBD.$$

А оскільки $\angle OBC + \angle OBD = 180°$, то $OB \perp CD$.

10 клас

1. Доведіть, що справджується нерівність:

$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \dots + \sin 2021 > \frac{2\sin^2 1011}{\sqrt{3}}.$$

Зауваження. Усі кути розглядаються в радіанах.

(Олексій Масалітін)

Розв'язання. Для довільного числа x справджується рівність:

$$\sin(2x+1)\sin 1 = \sin^2(x+1) - \sin^2 x \ \Rightarrow$$
$$\sin 1 + \sin 3 + \sin 5 + \dots + \sin 2021 =$$
$$= \frac{1}{\sin 1}(\sin 1 \cdot \sin 1 + \sin 1 \cdot \sin 3 + \sin 1 \cdot \sin 5 + \dots + \sin 1 \cdot \sin 2021) =$$
$$= \frac{1}{\sin 1}(\sin^2 1 + \sin^2 2 - \sin^2 1 + \sin^2 3 - \sin^2 2 + \dots + \sin^2 1011 - \sin^2 1010) = \frac{\sin^2 1011}{\sin 1}.$$

Залишилося побачити, що $1 < \frac{\pi}{3}$ та із зростання функції $\sin x$ на проміжку $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ маємо, що $\sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ тобто $\frac{\sin^2 1011}{\sin 1} > \frac{2\sin^2 1011}{\sqrt{3}}$, звідки і випливає шукана нерівність.

2. Клітинки 1×1, що розташовані по периметру квадрата 4×4, заповнені числами $1, 2, \dots, 12$ таким чином, що суми уздовж кожної з чотирьох сторін рівні. У лівій верхній кутовій клітині стоїть число 1, у правій верхній – число 5, а у правій нижній стоїть число 11 (рис. 14). Яке число за таких умов може бути розташованим в останній кутовій клітинці?

(Марія Рожкова)

1			**5**
?			**11**

Рис. 14

1	**12**	**8**	**5**
6			**3**
10			**7**
9	**2**	**4**	**11**

Рис. 15

Відповідь: 9.

Розв'язання. Позначимо числа, що розташовані у невідомій кутовій комірці через x. Тоді сума чисел по усіх сторонах дорівнює:

$$4S = (1 + 2 + \dots + 12) + (1 + 5 + 11 + x) = 95 + x,$$

де S – сума чисел на стороні. Таким чином $x = 4k + 1$. Але для такого подання маємо єдине число $x = 9$. Залишається показати, що шукане заповнення існує (рис. 15).

3. Кола ω_1 та ω_2 з центрами в точках O_1 та O_2 перетинаються в точках A та B. Побудовано таку точку C, що AO_2CO_1 – паралелограм. Через точку A проведено довільну пряму, що вдруге перетинає кола ω_1 та ω_2 в точках X та Y відповідно. Доведіть, що $CX = CY$.

(Олексій Масалітін)

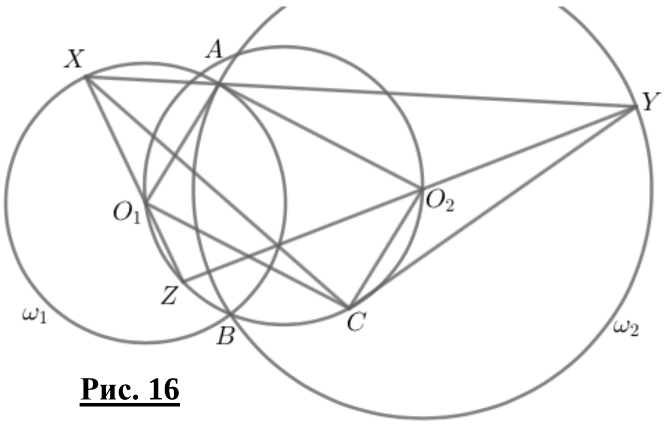

Рис. 16

Розв'язання. Помітимо, що $CO_1 = AO_2 = O_2Y$, а також $CO_2 = AO_1 = O_1X$ (рис. 16). Доведемо, що $\Delta O_2CY = \Delta O_1XC$. Для цього достатньо довести рівність кутів $\angle CO_2Y = \angle CO_1X$. Позначимо через $Z = YO_2 \cap XO_1$. Тоді можемо помітити такі рівності:

$$\angle O_1ZO_2 = 180° - \angle O_1XA - \angle O_2YA = 180° - \angle XAO_1 - \angle YAO_2 = \angle O_2AO_1.$$

Оскільки AO_1CO_2 – паралелограм, то $\angle O_1CO_2 = \angle O_1AO_2 = \angle O_1ZO_2$, а це означає циклічність точок O_1, O_2, C, Z. Тоді $\angle ZO_1C = \angle ZO_2C$, звідки $\angle CO_1X = \angle CO_2Y$. Таким чином, $\Delta O_2CY = \Delta O_1XC$, звідки $CY = CX$, що й треба було довести.

Схожим чином розглядаються інші варіанти розташування даної прямої.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Позначимо $\alpha = \angle XAO_1 = \angle AXO_1$, тоді $\angle XO_1A = 180^\circ - 2\alpha$. Позначимо $\beta = \angle YAO_2 = \angle AYO_2$, звідки $\angle AO_2Y = 180° - 2\beta$. Зауважимо, що $\angle O_1AO_2 = 180° - (\alpha + \beta)$, а оскільки O_1AO_2C – паралелограм, то $\angle AO_1C = \angle AO_2C = \alpha + \beta$. Тоді $\angle XO_1C = \angle CO_2Y = 180° + \beta - \alpha$. Отже, $\Delta O_2CY = \Delta O_1XC$, звідки $CY = CX$.

4. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

(Олексій Масалітін)

<u>Розв'язання</u>. Перепишемо нерівність таким чином:

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 9 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Тепер нам достатньо довести, що для довільного додатного числа x справджується нерівність:

$$x^2 + x + 2\frac{1}{x^2} \geq 3 + \frac{1}{x}.$$

Ця нерівність переписується таким чином:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x+2) \geq 0,$$

що й треба було довести.

5. Послідовність (a_n) така, що $a_{n+1} = (a_n)^n + n + 1$ для усіх натуральних n, причому a_1 – натуральне. Знайдіть найбільший степінь числа 3, на який ділиться число a_{101}.

(Кирило Голоднов)

<u>Відповідь</u>: ділиться на 3^1 степені.

<u>Розв'язання</u>. Доведемо спочатку методом від супротивного, що a_{101} ділиться на 3.
Якщо a_{101} не ділиться на 3, то a_{100} ділиться на 3, бо інакше

$$a_{101} = (a_{100})^{100} + 101 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3 \ \Rightarrow\ a_{100} = (a_{99})^{99} + 100 \ \Rightarrow\ (a_{99})^{99} \equiv 2 \pmod 3 \ \Rightarrow$$
$$a_{99} \equiv 2 \pmod 3 \ \Rightarrow\ a_{99} = (a_{98})^{98} + 99 \equiv 2 \pmod 3 \ \Rightarrow\ (a_{98})^{98} \equiv 2 \pmod 3,$$

а це неможливе для квадрату числа. Одержали суперечність. Таким чином $a_{101} \ \vdots\ 3$.

Доведемо знову методом від супротивного, що a_{101} не ділиться на 9. Якщо припустити, що $a_{101} \ \vdots\ 9$, то з рівності $a_{101} = (a_{100})^{100} + 101$ випливає, що $(a_{100})^{100} \equiv 7 \pmod 9$. Зрозуміло, що a_{100} не кратне 3. Якщо n не кратне 3, то $n^6 \equiv 1 \pmod 9$. Тоді $n^{100} = n^{96} \cdot n^4 \equiv n^4 \pmod 9$. Тому з умови $n^4 \equiv 7 \pmod 9$ випливає, що $n \equiv \pm 2 \pmod 9$ таким чином $a_{100} \equiv \pm 2 \pmod 9$.

Розглянемо два випадки:
1) $a_{100} = 9k - 2$, де $k \in \mathrm{N}$ Тоді $9k - 2 = (a_{99})^{99} + 100 \ \Rightarrow\ (a_{99})^{99} \equiv -3 \pmod 9$, тобто $(a_{99})^{99}$ ділиться на 3, але не ділиться на 9, що неможливо.
2) $a_{100} = 9k + 2$, де $k \in \mathrm{N}$ Тоді $9k + 2 = (a_{99})^{99} + 100 \ \Rightarrow\ (a_{99})^{99} \equiv 1 \pmod 9 \ \Rightarrow\ (a_{99})^{96+3} \equiv (a_{99})^3 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow a_{99} = 3m + 1$ для деякого $m \in \mathrm{N}$. Далі маємо, що

$$a_{99} = 3m + 1 = (a_{98})^{98} + 99 \ \Rightarrow\ (a_{98})^{98} \equiv 1 \pmod 3,$$

звідси a_{98} не ділиться на 3. Якщо $a_{97} \equiv 1 \pmod 3$, то $a_{98} = (a_{97})^{97} + 98 \ \vdots\ 3$ – суперечність. Таким чином $a_{97} \equiv 0 \pmod 3$ або $a_{97} \equiv 2 \pmod 3$.

- Якщо $a_{97} \equiv 0 \pmod 3$, то з рівності $a_{97} = (a_{96})^{96} + 97$ випливає, що $(a_{96})^{96} \equiv 2 \pmod 3$, що не можливо для квадратів – суперечність.
- Якщо $a_{97} \equiv 2 \pmod 3$, то з умови $a_{97} = (a_{96})^{96} + 97$ випливає, що $(a_{96})^{96} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow a_{96}$ не ділиться на 3, а тому і a_{95} не ділиться на 3, бо $a_{96} = (a_{95})^{95} + 96$.

А далі абсолютно такими ж міркуваннями, якими ми показували, що $a_{101} \ \vdots\ 3$, показуємо, що $a_{95} \ \vdots\ 3$ – суперечність з тим, що одержано вище, тому a_{101} не ділиться на 9. Одержана суперечність завершує доведення того, що a_{101} не ділиться на 9, тому a_{101} ділиться лише на перший степінь числа 3.

4.1. Відомо, що додатне число a задовольняє рівність $a^{2020}-20a-20=0$. Чому може дорівнювати $[a^{2020}]$?
Через [x] позначене найбільше ціле число, що не перевищує число x.

Відповідь: 40.
Розв'язання. Оскільки $a^{2020}=20a+20$, то $[a^{2020}]=[20a+20]=[20a]+20$.
Зрозуміло, що $a>1$. Дійсно, при $0<a\le 1$ маємо, що $a^{2020}\le 1<20+20a$.
При $a\ge\frac{21}{20}$ маємо, що

$$a^{2020}=a^{2019}a\ge(1+\frac{1}{20})^{2000}a>(1+2000\cdot\frac{1}{20})a>100a=20a+80a>20a+20.$$

Таким чином

$$1<a<\frac{21}{20}\Rightarrow 20<20a<21\Rightarrow[20a]=20\Rightarrow[20a]+20=40=[a^{2020}].$$

5.1. Натуральні числа n,m,k задовольняють такі умови: $[m,k]\,\vdots\,n$ та $[n,k]\,\vdots\,m$. Доведіть, що $n\cdot(m,k)=m\cdot(n,k)$.
Тут через $[a,\ b]$ та $(a,\ b)$ відповідно позначене найменше спільне кратне (НСК) та найбільший спільний дільник (НСД) натуральних чисел $a,\ b$.
Запис $a\,\vdots\,b$ означає, що ціле число a ділиться націло на ціле число b.

Розв'язання. Оскільки $[n,k]\,\vdots\,m$ за умовою та очевидно, що $[n,k]\,\vdots\,k\ \Rightarrow\ [n,k]\,\vdots\,[m,k]$. Аналогічно $[m,k]\,\vdots\,[n,k]$. Таким чином $[m,k]=[n,k]$. Далі з простих співвідношень між НСК та НСД, а саме $(x,y)\cdot[x,y]=xy$, маємо, що

$$\frac{m}{(m,k)}=\frac{[m,k]}{k}=\frac{[n,k]}{k}=\frac{n}{(n,k)}\Rightarrow n\cdot(m,k)=m\cdot(n,k),$$

що й треба було довести.

11 клас

1. N козаків розподілилися на 3 групи, щоб обговорити з друзями різні питання. Козак Тарас перейшов від першої групи до другої, козак Андрій перейшов від другої до третьої, козак Остап – з третьої групи до першої. Виявилося, що середній зріст козаків у першій групі зменшився на 8 см, а у другій та третій групах – збільшився відповідно на 5 см та 8 см. Чому дорівнює N, якщо відомо, що в першій групі було 9 козаків?

Відповідь: 21.
Розв'язання. Нехай у двох інших групах було відповідно m та k козаків. Зріст козаків Тараса, Андрія та Остапа позначимо t,a та o відповідно, а сумарний зріст козаків першої, другої та третьої групи без зазначених трьох козаків через X,Y та Z відповідно. Тоді маємо такі три умови:

$$\frac{X+t}{9}=\frac{X+o}{9}+8,\frac{Y+a}{m}=\frac{Y+t}{m}-5\text{ та }\frac{Z+o}{k}=\frac{Z+a}{k}-8.$$

Ці умови переписуються таким чином:

$$\frac{t}{9}=\frac{o}{9}+8,\frac{Y}{m}=\frac{t}{m}-5,\frac{o}{k}=\frac{a}{k}-8\Rightarrow\begin{cases}t=o+72,\\a=t-5m,\Rightarrow\\o=a-8k,\end{cases}$$

$$\begin{cases}t=o+72,\\a=o+72-5m,\\o=o+72-5m-8k,\end{cases}\Rightarrow 5m+8k=72\Rightarrow$$

Це рівняння в натуральних числах, оскільки $mk\ne 0$. Очевидно, що $m\ \vdots\,8$, тому єдине можливе значення $m=8\ \Rightarrow k=4$. Таким чином усього $N=9+m+k=21$.

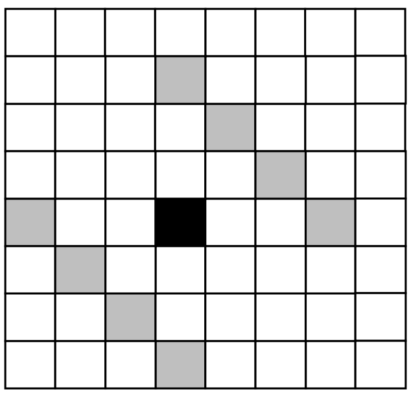

Рис. 17

2. Фігура *косий кінь*, що розташована на шахівниці 8×8 (чорне поле на рис. 17), атакує усі сірі клітини. Яку найбільшу кількість таких косих коней можна виставити на шахівницю, щоб вони не атакували один одного?

(Ніколаєв Арсеній)

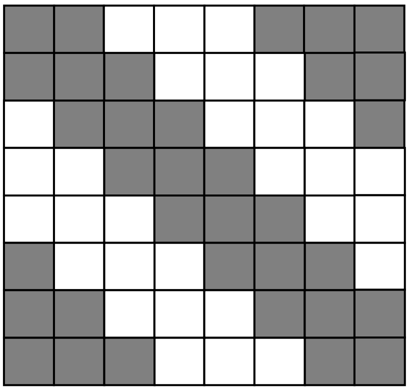

Рис. 18

Відповідь: 34.

Розв'язання. Можна поставити 34 таких коні, як то показане на рис. 18.

Доведемо, що більшої кількості поставити неможливо. Якщо записати номери клітин шахівниці як то показано на рис. 19, то очевидно, що клітини, які позначені однаковим номером не можуть містити коней одночасно. Тому їх поставити можна не більше ніж.

1	**2**	**3**	**1**	**2**	**3**	**25**	**28**
4	**5**	**6**	**4**	**5**	**6**	**26**	**29**
7	**8**	**9**	**7**	**8**	**9**	**27**	**30**
10	**11**	**12**	**10**	**11**	**12**	**25**	**28**
13	**14**	**15**	**13**	**14**	**15**	**26**	**29**
16	**17**	**18**	**16**	**17**	**18**	**27**	**30**
19	**20**	**21**	**19**	**20**	**21**	**31**	**32**
22	**23**	**24**	**22**	**23**	**24**	**33**	**34**

Рис. 19

3. Задача **10.3.**

4. Для додатних чисел a, b, c, сума яких дорівнює $\frac{3}{2}$, знайдіть найменше можливе значення виразу

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

(Сергій Торба)

Відповідь: $\frac{19}{2}$.

Розв'язання. Запишемо нерівність між середніми для таких двох четвірок чисел:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{16abc} \geq 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{abc^2}} + 2\sqrt{\frac{c^3}{16a^2b^2c}} \geq 4\sqrt{\sqrt{\frac{a^3b^3c^3}{16a^3b^3c^3}}} = 2.$$

$$15 \cdot \left(\frac{1}{16abc} + \frac{3}{2}\right) = 15 \cdot \left(\frac{1}{16abc} + a + b + c\right) \geq 15 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{a}{16abc}} + 2\sqrt{bc}\right) \geq 60 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{abc}{16abc}}} = 30.$$

Додамо ці нерівності і матимемо:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{45}{2} \geq 32 \;\Rightarrow\; \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc} \geq \frac{19}{2}.$$

Оскільки при $a = b = c = \frac{1}{2}$ досягається рівність:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 8 = \frac{19}{2},$$

тому значення $\frac{19}{2}$ найменше можливе.

5. Визначимо для натуральних m, n вираз $f_n(m) = 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + m^{2n}$. Доведіть, що існує лише скінченна кількість пар натуральних чисел (a, b), для яких число $f_n(a) + f_n(b)$ – просте.

(Сердюк Назар)

Розв'язання. Задамо многочлен P степеня $2n + 1$ такий, що для кожного дійсного x справджується рівність: $P(x) = P(x - 1) + x^{2n}$ та $P(0) = 0$. Для цього треба просто виписати відповідну тотожність через коефіцієнти шуканого многочлену і отримаємо систему лінійних рівнянь. Усі коефіцієнти при степенях x послідовно та однозначно заходяться, а за рахунок вільного члену виконується умова $P(0) = 0$. Тоді:

$$P(m) = P(m-1) + m^{2n} = P(m-2) + (m-1)^{2n} + m^{2n} = \cdots =$$
$$= P(1) + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (m-1)^{2n} + m^{2n} = P(0) + 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (m-1)^{2n} + m^{2n} =$$
$$= 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \cdots + (m-1)^{2n} + m^{2n} = f_n(m).$$

Якщо тепер його переписати у зворотному напрямі, то отримаємо, що

$$0 = P(0) = P(-1) + 0^{2n} = P(-2) + 1^{2n} + 0^{2n} = \cdots =$$
$$= P\big(-(m-1)\big) + (m-2)^{2n} + \cdots + 1^{2n} + 0^{2n} = \cdots = P(-m) + (m-1)^{2n} + \cdots + 1^{2n} + 0^{2n} \Rightarrow$$
$$P(-m) = -(m-1)^{2n} - \cdots - 1^{2n} - P(m-1).$$

Тепер розглянемо многочлен $Q(x) = P\left(x - \frac{1}{2}\right)$, тоді

$$Q\left(m - \frac{1}{2}\right) = P(m-1) = -P(-m) = -Q\left(-m + \frac{1}{2}\right).$$

Таким чином для нескінченно багатьох значень $Q(-x) = -Q(x)$. Оскільки це многочлен, то це справджується для усіх x, тобто многочлен є непарною функцією. Таким чином

$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i+1} x^{2i+1} \Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i+1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2i+1}.$$

Помітимо також, що в усіх точках $m + \frac{1}{2}$ многочлен $Q(x)$ приймає цілі значення. З інтерполяційної формули Лагранжа усі його коефіцієнти раціональні числа. Таким чином усі b_{2i+1} – раціональні. Для зручності перепишемо многочлен P таким чином:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{2i+1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \sum_{i=0}^{n} c_{2i+1} (2x+1)^{2i+1},$$

де $c_{2i+1} = \frac{b_{2i+1}}{2^{2i+1}}$ – раціональне.

Далі запишемо, що $P(x) = \frac{1}{N} T(x)$, де N – НСД усіх коефіцієнтів многочлена $P\,P$, тобто

$$T(x) = \sum_{i=0}^{n} t_{2i+1} (2x+1)^{2i+1}, t_i \in \mathrm{Z}.$$

Тепер маємо, що

$$f_n(a) + f_n(b) = P(a) + P(b) = \frac{1}{N}(T(a) + T(b)) =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n} t_{2i+1} \big((2a+1)^{2i+1} + (2b+1)^{2i+1}\big) = \frac{2a+2b+2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{t_{2i+1}\big((2a+1)^{2i+1} + (2b+1)^{2i+1}\big)}{2a+2b+2}.$$

Тут при достатньо великих a, b кожний множник у чисельнику стане більше за N, а тому добуток простим не буде.

4.1. Доведіть, що додатні числа x, y, z задовольняють нерівності:

$$\frac{x^2+1}{(x+y)^2 + 4(z+1)} + \frac{y^2+1}{(y+z)^2 + 4(x+1)} + \frac{z^2+1}{(z+x)^2 + 4(y+1)} \geq \frac{1}{2}.$$

***Розв'язання*.** Запишемо нерівності між середніми таким чином:

$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, $(y+z)^2 \leq 2(y^2+z^2)$, $(z+x)^2 \leq 2(z^2+x^2)$ та

$4x + 4 \leq 2(x^2+3)$, $4y + 4 \leq 2(y^2+3)$, $4z + 4 \leq 2(z^2+3) \Rightarrow$

$$\frac{x^2+1}{(x+y)^2 + 4(z+1)} + \frac{y^2+1}{(y+z)^2 + 4(x+1)} + \frac{z^2+1}{(z+x)^2 + 4(y+1)} \geq$$
$$\geq \frac{(x^2+1) + (y^2+1) + (z^2+1)}{2(x^2+y^2+z^2+3)} = \frac{1}{2}.$$

5.1. Розв'яжіть в цілих числах рівняння $x^2 = y^3 + 7$.

<u>Відповідь:</u> розв'язків не існує.
<u>Розв'язання.</u> Спочатку доведемо таку лему.

<u>Лема</u>. Якщо просте число $p = 4k + 3 \mid x^2 + y^2$, то $p \mid x$ та $p \mid y$.

Доведення. Від супротивного, якщо p не ділить x, то вони взаємно прості, тобто $(p, x) = 1$. Але тоді $(p, y) = 1$, бо воно може ділити або обидва цих числа, або жодного. За умовою $x^2 \equiv -y^2 (mod\, p) \Rightarrow x^4 \equiv y^4 (mod\, p) \Rightarrow x^{4k+2} \equiv -y^{4k+2} (mod\, p)$.
З малої теореми Ферма $x^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$ та $y^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$ $\Rightarrow$ $x^{4k+2} \equiv y^{4k+2} \equiv 1 (mod\, p)$ – суперечність з попереднім результатом, що й доводить шукане.
Лема доведена.

Якщо y – парне, то рівняння не має розв'язків, бо то суперечить остачам за модулем 4. Нехай y – непарне, перепишемо рівняння таким чином:

$$x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4) = (y + 2)((y - 1)^2 + 3).$$

У правій частині рівності є простий дільник $p = 4k + 3$. Тому він ділить і праву частину, але з леми він має також ділити й 1. Таки чином шуканих чисел не існує.