Розв’язання завдань Київської математичної он-лайн ЕКСПРЕС-олімпіади

«Чим менше сумлінності,
Тим більше усього іншого»
Корисне правило (із «законів Мерфі»)

I етап

7 клас

1. На кожній клітині шахівниці 8×8 стоїть по одному гному – брехуну чи лицарю. Відомо, що брехуни завжди кажуть неправду, а лицарі завжди кажуть правду. Сусідами вважаються гноми, що розташовані у клітинках зі спільною стороною. Яка найбільша кількість гномів на шахівниці могли б сказати фразу: «Серед моїх сусідів брехунів більше, ніж лицарів»?

Відповідь: 64.
Розв’язання. Якщо поставити брехунів та лицарів у шаховому порядку, наприклад, на чорні клітинки – брехунів, а на білі – лицарів, то кожний міг би сказати таку фразу.

2. Для скількох з 22-х заданих чисел 2000, 2001, …, 2021 існує натуральне число, яке має добуток цифр, що дорівнює відповідному заданому числу?

Відповідь: 2.
Розв’язання. Розкладемо на множники усі ці числа. Якщо серед множників присутній такий, що більший від 9, то таке число не може стати шуканим. Тому достатньо розкласти на усі прості множники, а просто знайти усі ті числа. У наведеному списку виділені саме одноцифрові прості множники.
$2000 = 2^4 \cdot 5^3$, $2001 = 3 \cdot 667$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 143$, 2003, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, $2005 = 5 \cdot 401$, $2006 = 2 \cdot 1003$, $2007 = 3^2 \cdot 223$, $2008 = 2^3 \cdot 251$, $2009 = 7^2 \cdot 41$, $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, 2011, $2012 = 4 \cdot 503$, $2013 = 3 \cdot 671$, $2014 = 2 \cdot 1007$, $2015 = 5 \cdot 403$, $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, 2017, $2018 = 2 \cdot 1009$, $2019 = 3 \cdot 673$, $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, 2021.
Як бачимо, шуканий розклад мають лише числа 2000 та 2016.

3. Знайдіть усі натуральні x, для вираз $x^4 - 195x^2 + 225$ є простим числом. У відповідь впишіть суму усіх знайдених таких x.

Відповідь: 15.
Розв’язання. Зробимо такі перетворення виразу:

$$x^4 - 195x^2 + 225 = x^4 + 30x^2 + 225 - 225x^2 = (x^2 + 15)^2 - 225x^2 =$$
$$= (x^2 + 15 - 15x)(x^2 + 15 + 15x).$$

Оскільки при натуральних x обидва множники різні, то це значення може стати простим числом, якщо менший з цих множників дорівнюватиме 1, а більший – простому числу.

$$x^2 + 15 - 15x = 1 \Rightarrow x^2 - 15x + 14 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 14) = 0.$$

Розглянемо ці два можливих значення x.
$x = 1 \Rightarrow x^2 + 15 + 15x = 31$ – просте число.
$x = 14 \Rightarrow x^2 + 15 + 15x = 421$ – просте число.

4. Сова принесла Віслючку Іа квадратний торт завбільшки 99×99. Вінні Пух одразу вирізає собі з цього торта чотири квадратні шматочки завбільшки 33×33 зі сторонами, що паралельні сторонам торта, але не обов'язково по лініях сітки 99×99. Після цього Віслючок вирізає собі з частини торту, що лишилася квадратний шматок зі сторонами, що також паралельні сторонам торта. На який найбільший шматок торта може розраховувати Іа? У відповідь введіть сторону квадратного шматочка Віслюка.

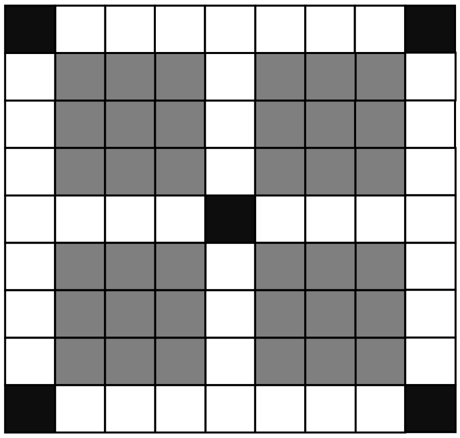

Рис. 1

Відповідь: 11.
Розв'язання. Якщо Вінні Пух виріже ось такі 4 шматочки, як то показане на рис. 1 сірим, то Іа зможе максимум вирізати квадрат зі стороною 11.
Навпаки, якщо Іа відмітить 5 чорних квадратиків зі стороною 11, то Вінні кожним своїм шматочком може покрити не більше одного, а тому Іа завжди зможе вирізати собі шматочок, зі стороною не менше, ніж 11.

5. Мавпа стає щасливою, коли з'їдає три різні фрукти. Яку найбільшу кількість мавп можна ощасливити, маючи 20 груш, 30 бананів, 40 персиків та 50 яблук?

Відповідь: 45.
Розв'язання. Відкладемо 50 яблук, кожна мавпа може з'їсти не більше 1 яблука, значить ці 90 інших фруктів мають з'їсти мавпи не менше ніж по 2 кожна. Тому мавп не може бути більше 45. Те, що 45 можна нагодувати очевидно.

8 клас

1. За круглим столом сидять 2021 людина, кожний з яких або лицар, тобто завжди каже правду, або брехун, який кожного разу бреше. Їм роздали по одній картці, на кожній з карток написане по одному числу; при цьому усі числа на картках різні. Глянувши на картки сусіда ліворуч та праворуч, кожний з 2021 людини за столом, сказав: «Число на моїй картці більше, ніж у кожного з обох моїх сусідів». Після цього k з 2021 людини за столом сказали: «Моє число менше, ніж у кожного з двох моїх сусідів». При якому найбільшому k це могло статися?

Відповідь: 2019.
Розв'язання. Нехай **A** та **B** – люди, яким дісталося найбільше та найменше число відповідно. Оскільки вони обидва сказали першу фразу, **A** – лицар, а **B** – брехун. Але, якщо вони б сказали другу фразу, то **A** збрехав би, а **B** сказав би правду; обидві ці події – неможливі. Тому **A** та **B** сказати другу фразу не можуть, тому $k \leq 2019$.
Ситуація, при якій решта 2019 людей зможуть сказати другу фразу, можлива. Роздамо картки усім, хто сидить за столом числа по колу в порядку зростання: $1, 2, \dots, 2021$. При цьому картка з число 2021 дісталася лицарю, решта – брехунам. Тоді першу фразу можуть сказати усі, а другу – усі, окрім тих, хто має картки 1 та 2019.

2. Задача **7.2.**

3. Задача **7.3.**

4. Задача **7.4.**

5. Задача **7.5.**

9 клас

1. Задача **8.1.**

2. Знайдіть найменше натуральне число, що має добуток цифр в межах від 2000 до 2021.

Відповідь: 4789.
Розв'язання. Розкладемо на множники усі ці числа. Якщо серед множників присутній такий, що більший від 9, то таке число не може стати шуканим. Тому достатньо розкласти на усі прості множники, а просто знайти усі ті числа. У наведеному списку виділені саме одноцифрові прості множники.
$2000 = 2^4 \cdot 5^3$, $2001 = 3 \cdot 667$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 143$, 2003, $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, $2005 = 5 \cdot 401$, $2006 = 2 \cdot 1003$, $2007 = 3^2 \cdot 223$, $2008 = 2^3 \cdot 251$, $2009 = 7^2 \cdot 41$, $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, 2011, $2012 = 4 \cdot 503$, $2013 = 3 \cdot 671$, $2014 = 2 \cdot 1007$, $2015 = 5 \cdot 403$, $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, 2017, $2018 = 2 \cdot 1009$, $2019 = 3 \cdot 673$, $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, 2021.
Як бачимо, шуканий розклад мають лише числа 2000 та 2016. Саме серед цих множників треба побудувати найменше натуральне число.
Для $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ це має бути щонайменше п'ятицифрове число, бо кожний множник 5 породжує цифру. З множника $16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ шуканим є перший варіант, що дає меншу першу цифру. Таким чином, для цього числа найменшим є 25558.
Для $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ можемо утворити щонайменше чотирицифрове число, $4 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7$, тому шуканим є число 4789.

3. У трикутнику ABC проведена медіана BD. Виявилося, що бісектриси кутів ABD та ACB перпендикулярні. Знайдіть найбільшу можливу градусну міру кута BAC.

Відповідь: $45°$.
Розв'язання. Нехай K – точка перетину перпендикулярних бісектрис (рис. 2). Тоді

$$\angle KCB + \angle KBD + \angle DBC = 90°.$$

Розглянемо кути ΔABC:

$$180° = \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC =$$
$$= 2\angle KCB + 2\angle KBD + \angle DBC + \angle BAC.$$

Звідси $\angle BAC = \angle DBC$. Таким чином $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ за двома кутами. Позначимо $BC = a$, $AD = DC = \frac{1}{2}b$, тоді з наголошеної подібності $\frac{a}{\frac{1}{2}b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\sqrt{2}$. Таким чином

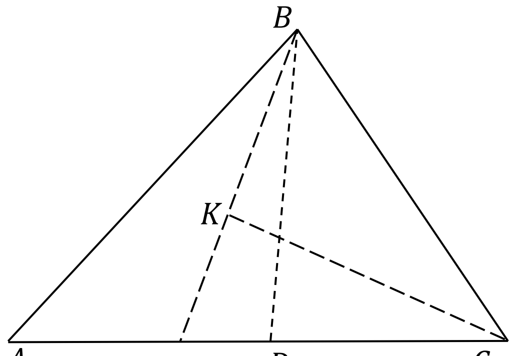

Рис. 2

максимальне можливе значення $\angle BAC$ в ΔABC зі сторонами a та $a\sqrt{2}$ досягається у випадку, коли пряма AB дотикається до кола з центром у точці C та радіусом a. За таких умов ΔABC рівнобедрений та прямокутний і $\angle BAC = 45°$. Для такого трикутника умови задачі справджуються.

4. Цілі числа $x_0, x_1, \dots, x_5$ задовольняють рівності:

$$x_0 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_5) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_5).$$

Яке найбільше значення може приймати вираз $x_0 x_1 \dots x_5$?

Відповідь: 0.
Розв'язання. Якщо принаймні одне з чисел $x_i = 0$, $i = \overline{0,5}$, то $A = x_0 x_1 \dots x_5 = 0$. Якщо одне з чисел $x_i = \pm 1$, $i = \overline{1,5}$, то $A = 0$.. Таким чином $|x_i| > 1$, $i = \overline{1,5}$. Але тоді

$$0 < x_0^2 = (1 + x_1)^2 \dots (1 + x_5)^2 = (1 - x_1^2) \dots (1 - x_5^2) < 0,$$

одержана суперечність показує, що завжди $A = 0$.

5. Петрик хоче виписати усі можливі послідовності з 10 натуральних чисел, у кожній з яких хоча б раз зустрілася 3, а будь-які два її сусідніх члени відрізняються не більше ніж на 1. Скільки послідовностей йому доведеться виписати?

<u>Відповідь</u>: 58025.
<u>Розв'язання</u>. Розглянемо усі послідовності (a_k) з n членів, в яких кожні два сусідніх члени відрізняються не більше ніж на 1. Розглянемо також послідовність сусідніх різниць з $n-1$ члена: $b_i = a_{i+1} - a_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Усі її члени дорівнюють 0, ± 1. Тому послідовностей (b_k) усього 3^{n-1}. Щоб побудувати шукану послідовність треба додати певне число до кожного члена обраної послідовності (b_k). Нехай S усі шукані послідовності, в яких мінімальний член не перевищує 3. Тоді кожній послідовності (b_k) відповідає рівно по одній послідовності з мінімальним членом $1, 2$ та 3. Тобто усіх таких послідовностей 3^n. Але звідки треба викинути усі ті, в яких 3 не зустрічається. Це усі можливі послідовності з 1 та 2, а таких рівно 2^n. Загалом маємо $3^n - 2^n$, тому відповідь в нашій задачі $3^{10} - 2^{10} = 59049 - 1024 = 58025$.

<u>10 клас</u>

1. Задача **9.2.**

2. Задача **9.3.**

3. Задача **9.4.**

4. У трикутнику ABC відповідні сторони дорівнюють a, b, c та задовольняють умову $ab = c^2 - b^2$. Знаючи, що $\angle BCA = 100°$, знайдіть градусну міру середнього за величиною кута ΔABC.

<u>Відповідь</u>: $\beta = 50°$.
<u>Розв'язання</u>. Запишемо теорему косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 100° \Rightarrow c^2 - b^2 = a^2 - 2ab\cos 100° = ab \Rightarrow a - 2b\cos 100° = b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 + 2\cos 100°}{1} = \frac{\sin(80° - \beta)}{\sin\beta} \Rightarrow \sin(80° - \beta) = (1 + 2\cos 100°)\sin\beta \Rightarrow \sin(80° - \beta) = \sin\beta - 2\sin 10°\sin\beta \Rightarrow \cos(10° + \beta) = \sin\beta - \cos(\beta - 10°) + \cos(\beta + 10°) \Rightarrow \sin\beta - \sin(100° - \beta) = 0 \Rightarrow 2\sin(\beta - 50°)\cos 50° = 0 \Rightarrow \beta = 50° \Rightarrow \alpha = 30°.$$

5. Задача **9.5.**

<u>11 клас</u>

1. До натурального числа N додали найбільший його власний дільник і отримали число вигляду 10^k. Знайдіть найбільше можливе таке число N.

<u>Відповідь</u>: 75.
<u>Розв'язання</u>. Нехай p – найменший простий дільник числа N, тоді $N = mp$ та $10^k = N + m = m(p + 1)$. Зрозуміло, що $p \neq 2$, бо ліва частина не кратна 3. Тому розклад числа N на прості множники складається з непарних простих чисел, тому й N – непарне. Звідси непарне і число m. Тому $m = 5^l$. Але це означає, що $N \vdots 5$, тому $p = 3$ або $p = 5$.
Якщо $p = 3$, то $4m = 10^k$. Щоб m було непарним, має бути $4m = 100$ та $m = 25$, тоді $N = 75$ – задовольняє умову.
Якщо $p = 5$, то $6m = 10^k$ – суперечність із-за подільності на 3.

2. Задача **9.3.**

3. Послідовність чисел $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ задовольняє такі умови: $a_1 = a_{2021}$ та для $n = \overline{1, 2020}$ справджується рівність: $a_n + 3a_{n+1} = a_{n+1}^2 + 4$. Які можливі значення може приймати a_{1000}?

Відповідь: 2.
Розв'язання. З умов випливає, що $a_n = a_{n+1}^2 - 3a_{n+1} + 4 \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_{n+1} - 2)^2 \geq 0$. Таким чином $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{2021}$. Таким чином рівність $a_1 = a_{2021}$ можлива лише за умов, що усі члени послідовності рівні. А це означитиме, що $(a_n - 2)^2 = 0$ для кожного n, тому $a_{1000} = 2$.

4. Задача **10.4.**

5. Задача **9.5.**

II етап

7 клас

1. На яку найменшу кількість квадратів можна розрізати сходи, що складаються з 15 сходинок (рис. 3)?

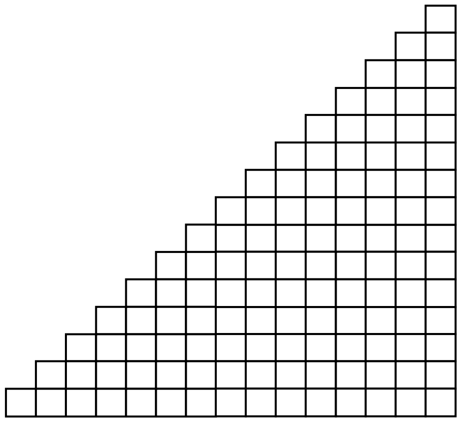

Рис. 3

Відповідь: 15.
Розв'язання. Зрозуміло, що кожні ліві квадратики кожного рядка не можуть потрапити в один квадрат розрізання, тому найменша кількість можливих квадратів розрізання – це 15.
Покажемо, що ця оцінка досягається (рис. 4).

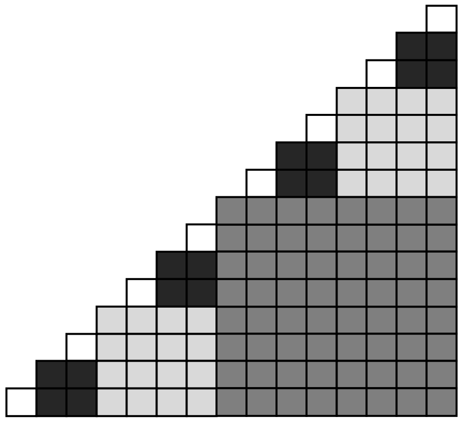

Рис. 4

2. Чому може дорівнювати значення виразу $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y}$, якщо для x, y справджується рівність:
$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}.$$

Відповідь: -1.
Розв'язання. Зробимо перетворення заданої рівності:
$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow$$
$$(x^2+y^2+2)(xy+1) = 2(x^2+1)(y^2+1) \Leftrightarrow (x-y)^2(1-xy) = 0.$$
Оскільки для пошуку значення заданого виразу неможлива рівність $x = y$, то $xy = 1$. Тоді простими перетвореннями отримуємо, що
$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{x-y} = \frac{y-x}{xy(x-y)} = -1.$$

3. Бісектриса рівнобедреного трикутника, що проведена з вершини, у два рази менша за іншу бісектрису. Знайдіть градусну міру найменшого кута цього трикутника.

Відповідь: 36°.

Розв'язання. Нехай A – вершина рівнобедреного ΔABC, а його бісектриса AM удвічі менша бісектриси BD (рис. 5). На продовженні бісектриси AM за точку M відкладемо відрізок $MK = AM$. Тоді $BK||AD$ та $AK = 2AM = BD$. Якщо P – точка перетину бісектрис ΔABC, то $BP = KP$. Позначимо $\angle ABP = \alpha$. Тоді $\angle PKB = \angle PBK = 3\alpha$. Оскільки $BK = AB$, то

$$\angle BAK = \angle AKB = \angle PKB = 3\alpha.$$

З прямокутного ΔAMB знаходимо, що

$$\angle BAK = \angle BAM = 90° - \angle ABM = 90° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 18°$$
$$\Rightarrow \angle ABC = 36°.$$

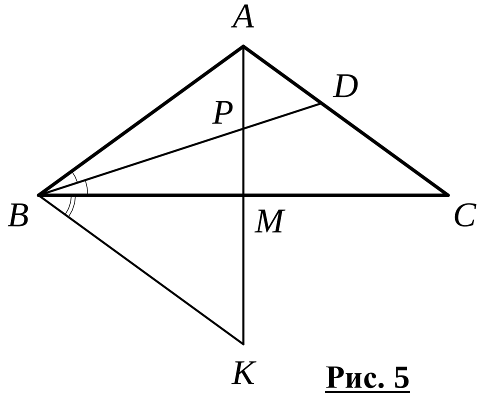

Рис. 5

4. Нехай $n > 1$– натуральне число. Випишемо дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$, та приведемо кожну з них до нескоротного вигляду; суму чисельників отриманих дробів позначимо через $f(n)$. При яких натуральних n з множини $\{2, 2019, 2020, 2021\}$ числа $f(n)$ та $f(2015n)$ мають різну парність? У відповідь запишіть суму тих значень n, що задовольняють умову задачі.

Відповідь: 6062.
Розв'язання. Покажемо, що умова задачі справджується для усіх натуральних $n > 1$. Нехай $n = 2^t m$, де m – непарне число. Розглянемо дріб $\frac{k}{n}$. Якщо k ділиться націло на 2^{t+1}, то чисельник цього дробу буде парним, інакше – непарним. Серед чисел $1, 2, \dots, n-1$ є рівно $\frac{m-1}{2}$ таких, що діляться на 2^{t+1}. Тому в сумі $f(n)$ є рівно $n - 1 - \frac{m-1}{2}$ непарних доданків. Таким чином $f(n)$ – парне тоді і тільки тоді, коли числа $n-1$ та $\frac{m-1}{2}$ мають однакову парність, тобто для таких двох випадків: $n = 2l + 1$ та $m = 4s + 1$, або $n = 2l$ та $m = 4s + 3$.
Тепер зауважимо, що числа n та $2015n$ мають однакову парність, крім того числа m та $2015m$ при непарному m мають різні остачі при діленні на 4.

8 клас

1. На яку найменшу кількість квадратів можна розрізати сходи, що складаються з 11 сходинок (рис. 6)?

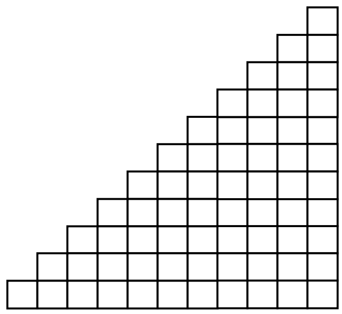
Рис. 6

Відповідь: 12.
Розв'язання. Зрозуміло, що кожні ліві квадратики кожного рядка не можуть потрапити в один квадрат розрізання, тому можливих квадратів розрізання не менше 11. Але якщо тих квадратиків рівно 11, то правий нижній квадратик має потрапити разом з середнім з крайніх лівих квадратиків (рис. 7). І така ж саме ситуація має відбуватися на кожному кроці, коли сходи розпалися на 2 частини, кожна з яких так само має розрізатися таким чином, щоб правий нижній квадратик потрапляв до відповідного середнього з лівих квадратиків. Але надалі бачимо, що обійтися 11 квадратиками не вийде.

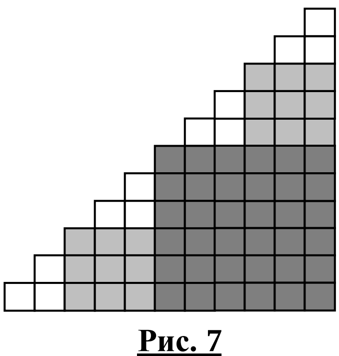
Рис. 7

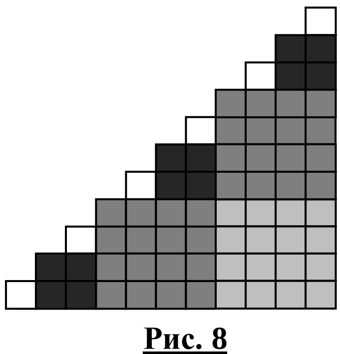
Рис. 8

Покажемо, що оцінка 12 квадратиків досягається (рис. 8).

2. Задача **7.2.**

2. Задача 7.3.

4. Задача 7.4.

9 клас

1. Задача **8.1.**

2. Про послідовність (a_n) відомо, що $a_n = n^2$, $n = \overline{1,5}$ та для усіх натуральних n справджується умова $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Знайдіть значення a_{2021}.

Відповідь: 25.
Розв'язання. Одразу зауважимо, що
$$a_{n+4} + a_n = a_{n+3} + a_{n-1} = \cdots = a_5 + a_1 = 25 + 1 = 26.$$
Тому $a_{n+8} + a_{n+4} = a_{n+4} + a_n = 26 \Rightarrow a_{n+8} = 26 - a_{n+4} = 26 - (26 - a_n) = a_n$. Оскільки $2021 = 252 \cdot 8 + 5$, то $a_{2021} = a_5 = 25$.

3. Задача **7.4.**

4. У рівнобедреному трикутнику ABC сторони $AB = AC = 20$, $BC = 18$. Точка D вибрана на основі BC таким чином, що $BD < DC$. Точка E – симетричний образ точки C відносно прямої AD. Прямі BE та AD перетинаються в точці F. Знайдіть значення добутку $AD \cdot AF$.

Відповідь: 400.
Розв'язання. З умов задачі $\Delta ADC = \Delta ADE$, тому $\angle ABC = \angle ACD = \angle AED$ (рис. 9). Тому точки A, D, B, E – циклічні $\Rightarrow \angle FBD = \angle EAD = \angle CAD$, звідки точки A, B, F, C також циклічні $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB = \angle AFB \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AFB \Rightarrow AD \cdot AF = AB^2 = 400$.

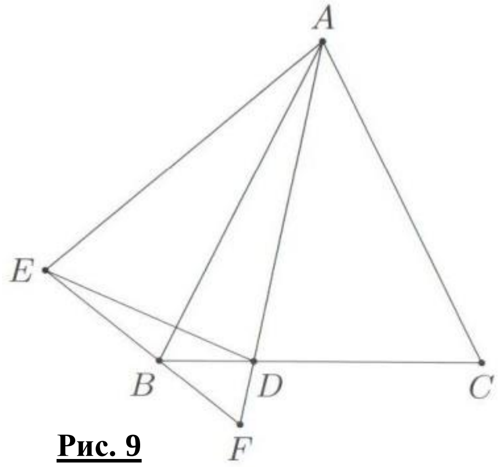

Рис. 9

10 клас

1. Задача **9.2.**

2. Задача **7.4.**

3. Продовження бісектриси CK трикутника ABC перетинає описане навколо цього трикутника коло у точці L. Точка I – центр вписаного кола ΔABC. Відомо, що $IK = KL = 4$. Знайдіть довжину CI.

Відповідь: 8.
Розв'язання. Нехай C_1 – середина AB, I_c – центр зовнівписаного кола ΔABC, що відповідає вершині C, C_2, C_3 – точки дотику вписаного та зовнівписаного кіл до сторони AB (рис. 10). Оскільки C_1 ділить C_2C_3 навпіл, то $IL = LI_c$. Оскільки внутрішня та зовнішня бісектриси ділять відрізок CK у однакових відношеннях внутрішнім та зовнішнім чином, маємо
$$\frac{CI}{IK} = \frac{CI_c}{KI_c} \Leftrightarrow \frac{CI}{\frac{1}{2}IL} = \frac{CI + 2IL}{\frac{3}{2}IL} \Leftrightarrow CI = IL = IK + KL = 8.$$

4. Ми вибираємо 100 точок на координатній площині. Нехай N – кількість таких трійок з вибраних різних точок (A, B, C), у яких точки A та B мають однакову ординату, а точки B та C мають рівні абсциси. Яке найбільше значення може приймати величина N при довільному виборі цих 100 точок?

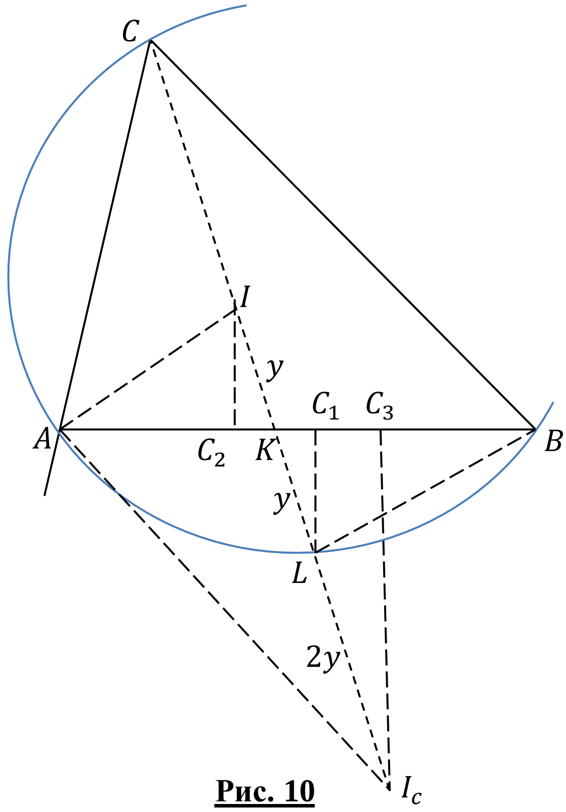

Рис. 10

Відповідь: 8100.
Розв'язання. Припустимо, що ми образи усі точки, координати яких задовольняють умову $1 \le x \le 10$ та $1 \le y \le 10$. Для кожної обраної точки B можна підібрати 9 варіантами точку A та 9 варіантами точку C, тому усього таких трійок точок (A, B, C) буде $100 \cdot 9 \cdot 9 = 8100$.
Припустимо були обрані інші 100 точок, нехай вони лежать на k горизонтальних лініях, нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – кількості вибраних точок на цих прямих. Порахуємо кількість трійок точок (A, B, C), в яких A та B лежать на першій горизонталі l, а B та C мають однакові абсциси. Для довільної точки $C \notin l$, існує єдина точка $B \in l$ з однаковою абсцисою з B, тому шуканих трійок існує не більше $(a_1 - 1)(100 - a_1)$. Звідси $N \le \sum_{j=1}^{k}(a_j - 1)(100 - a_j)$. Використаємо умову $a_1 + \ldots + a_k = 100$, матимемо, що

$$N \le 101\sum_{j=1}^{k} a_j - \sum_{j=1}^{k} a_j^2 - 100k = 10100 - 100k - \sum_{j=1}^{k} a_j^2 \le 10100 - 100k - \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 =$$
$$= 10100 - 100k - \frac{10000}{k} \le 10100 - \left(\frac{10000}{k} + 100k\right) \le 10100 - 2000 = 8100,$$

що й треба було довести.

11 клас

1. Задача **9.2.**

2. Задача **7.4.**

3. Задача **10.3.**

4. Задача **10.4.**

III етап

7 клас

1. При яких натуральних a число $3a + 2021$ ділиться націло на $a + 6$?

Відповідь: 1997.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$\frac{3a+2021}{a+6}=\frac{3a+18+2003}{a+6}=3+\frac{2003}{a+6}.$$

Оскільки число 2003 – просте, то щоб вираз був цілим число значення $a+6$ має дорівнювати 2003. Таким чином шукане значення 1997.

2. У бібліотеці було 200 книг, частину з яких взяли для навчання 6 студентів. По завершенні навчання вони вирішили поділитися один з одним цими книгами таким чином. Перший віддав другому 10% своїх книг та ще 1. Після цього другий віддав третьому 10% усіх своїх книг, що в нього на цей момент були (тобто з урахуванням отриманих від першого) та ще 2. Після цього третій віддав четвертому 10% усіх своїх книг, що в нього на цей момент були та ще 3. І так далі, на завершення шостий віддав першому 10% усіх своїх книг, що в нього на цей момент були (тобто з урахуванням отриманих від п'ятого) та ще 6 книг. По завершенню, у кожного із студентів виявилося стільки ж книг, скільки й було до початку обміну. Скільки книг лишилося в бібліотеці від тих 200 книг?

Відповідь: 25.
Розв'язання. Зрозуміло, що кожного разу передавалася та ж саме кількість книг. Позначимо цю величину через x. Тоді якщо в першого з самого початку було X_1 книг, то маємо рівність: $x=\frac{1}{10}X_1+1$ $\Rightarrow X_1=10(x-1)$. Аналогічно, для кількості книг другого X_2 маємо рівність: $x=\frac{1}{10}(X_2+x)+2\Rightarrow$ $X_2=10(x-2)-x,\ X_3=10(x-3)-x,\ \ldots,\ X_6=10(x-6)-x$. Таким чином $x>6$. Крім того, усього студенти взяли з самого початку

$$X_1+\cdots+X_6=10(x-1)+10(x-2)-x+\cdots+10(x-6)-x=55x-210\leq 200.$$

Звідси $x<8\Rightarrow x=7$. У хлопців було $55x-210=175$. Тобто в бібліотеці лишилося б 25 книг.

3. Квадрат розрізаний на трикутники та чотирикутники таким чином, що кожна сторона чотирикутника є стороною деякого трикутника і навпаки, кожна сторона трикутника є стороною деякого чотирикутника. Це саме стосується і сторін зовнішнього квадрату, які є сторонами деяких трикутників розбиття. Відомо, що усього всередині квадрата є 5 чотирикутників розбиття. Скільки максимум там може бути трикутників розбиття?

Відповідь: 8.
Розв'язання. Оскільки чотирикутників разом з зовнішнім квадратом 6, то разом вони мають $6\cdot 4=24$ сторони, кожна з яких є стороною одного з трикутників. Тому їх має бути рівно $24:3=8$.

8 клас

1. При яких цілих a число $\frac{3a+2021}{a+6}$ є цілим? У відповідь введіть суму усіх можливих значень a.

Відповідь: -24.
Розв'язання. Зробимо такі перетворення:

$$\frac{3a+2021}{a+6}=\frac{3a+18+2003}{a+6}=3+\frac{2003}{a+6}.$$

Оскільки число 2003 – просте, то щоб вираз був цілим число значення $a+6$ має дорівнювати одному з чотирьох значень: $-2003,-1,1$ або 2003. Таким чином шукані значення $-2009,-7,-5$ та 1997.

Тому відповідь задачі: $-2009-7-5+1997=-24$.

2. Задача **7.2.**

3. Дан прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою $AB=40$ та катетом $BC=32$. Нехай BK – бісектриса цього трикутника. Коло, що описане навколо ΔABK, перетинає вдруге сторону BC у точці L. Знайдіть CL.

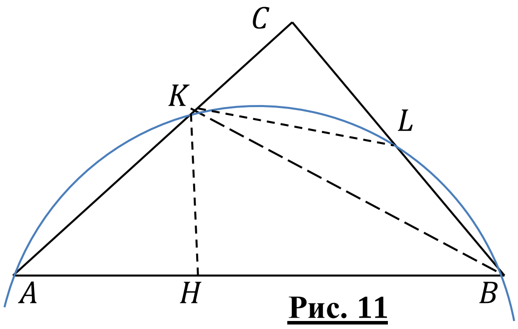

Рис. 11

Відповідь: 8.
Розв'язання. Проведемо перпендикуляр KH на гіпотенузу AB (рис. 11). Тоді $\Delta KHB=\Delta KCB$, бо в них рівні кути і спільна сторона. Тому $CB=HB$ та $KC=KH$. Як хорди, що спираються на рівні кути, маємо $AK=KL$. Тоді за рівними катетом та гіпотенузою $\Delta KHA=\Delta KCL$. Тому

$$CB+CL=HB+HA=AB\ \Rightarrow CL=AB-CB=8.$$

9 клас

1. Задача **7.2.**

2. Задача **8.3.**

3. По колу записані 25 натуральне число так, щоб будь-які два сусідні числа відрізнялися на їх НСД. Знайдіть найбільше натуральне n, на яке гарантовано буде ділитися добуток цих 25 натуральних чисел.

Відповідь: 49152.
Розв'язання. Зрозуміло, що два непарних числа не можуть стояти поруч, бо вони мають відрізнятися на свій НСД, а їхня різниця – парна, тобто вони мали б ділитися на парне число, що неможливо. Тому парних чисел в цій кількості не менше 13, тому є два сусідні парні числа і принаймні одне з них має ділитися на 4, бо інакше їх різниця $(4k+2)-(4l+2)=4(k-l)$ кратна 4. Якщо серед записаних чисел немає кратних 3, то поруч будуть стояти два числа з однаковою остачею при діленні на 3. Тому їхня різниця кратна 3 – суперечність. За виписаними оцінками добуток чисел гарантовано має ділитися на $2^{12}\cdot 4\cdot 3=49152$.
Ця оцінка досягається на такому наборі чисел: $4,3,2,1,2,1,\ldots,2,1,2$.

10 клас

1. Послідовність (x_n) така, що $x_0=0$ та $|x_{n+1}|=|x_n+1|\ \forall k\in\mathbf{N}$. Яке найменше можливе значення може приймати вираз $|x_1+x_2+\cdots+x_n|$, якщо $n=2021$.

Відповідь: 43.
Розв'язання. Розглянемо загальний випадок $n+1$ члена послідовності:

$$|x_1|=|x_0+1|,\ |x_2|=|x_1+1|,\ \ldots,\ |x_{n+1}|=|x_n+1|\Rightarrow$$
$$x_1^2=x_0^2+2x_0+1,\ x_2^2=x_1^2+2x_1+1,\ \ldots,\ x_{n+1}^2=x_n^2+2x_n+1.$$

Додаємо усі ці вирази і матимемо, що

$$2x_1+2x_2+\cdots+2x_n+n+1=x_{n+1}^2\ \Rightarrow\ x_1+x_2+\cdots+x_n=\frac{1}{2}(x_{n+1}^2-n-1)\ \Rightarrow$$

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = \frac{1}{2}(x_{n+1}^2 - (n+1)).$$

Таким чином шуканий мінімум досягається на значенні для найближчого до числа $n+1$ квадрата цілого числа x_{n+1}^2 однакової парності. Для нашого випадку $n+1 = 2022$. Найближчий парний квадрат – це $44^2 = 1936$. Тоді $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{2021}| \geq \frac{1}{2}|1936 - 2022| = 43$.

Залишається зрозуміти, що існує послідовність, для якої можливе досягання $x_{2022} = 44$. Отримаємо його «з кінця», тобто $x_{2022} = 44$, $x_{2023} = 43$, $x_{2020} = 42$, …, $x_{1978} = 0$, а далі просто усі непарні числа дорівнюють 1, а усі парні – 0.

2. В ряд виклали 43 білих та 47 чорних куль. На кожній з них записали, скільки куль іншого кольору знаходиться лівіше від неї. Виявилося, що сума чисел на білих кулях дорівнює 1000. Чому може дорівнювати сума чисел на чорних кулях?

Відповідь: 1021.
Розв'язання. Усього є $43 \cdot 47 = 2021$ пар куль, в якій одна біла та одна чорна. У кожній з них лівіша – або біла, або чорна куля. Сума чисел на білих кулях дорівнює кількості таких пар, де чорна куля лівіше. Сума чисел на чорних кулях – кількості пар, в яких біла куля лівіша. Оскільки на білих кулях сума чисел 1000, то сума чисел на чорних кулях дорівнює: $2021 - 1000 = 1021$.

3. Задача **9.3.**

11 клас

1. Задача **10.1.**

2. Задача **10.2.**

3. Задача **9.3.**