XX Київський турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

<u>Перший тур</u>

«Найбільша наша омана в тому,
що ми вважаємо, що в нас ще багато часу…»

Умови та розв'язання задач

<u>Наймолодша ліга</u>

1.1. У кожного з 13 піратів є деяка кількість золотого піску. Вони можуть зустрічатися компаніями з будь-якої кількості, окрім усі разом, та ділити пісок порівну. Чи можуть вони гарантовано добитися, щоб після декількох таких зустрічей в усіх 13 піратів піску стало порівну?

<u>Відповідь</u>: ні.
<u>Розв'язання</u>. Нехай в одного пірата 1 кг піску, а в інших – 0 кг. Щоб в усіх них стало порівну піску, треба, щоб в кожного стало $\frac{1}{13}$ кг. Але це неможливо, бо при кожному кроці знаменники усіх дробів при розкладі на прості множники не будуть мати простого множника 13. Таким чином, поділити належним чином весь пісок не вдасться.

1.2. У кожного з 12 піратів є деяка кількість золотого піску. Вони можуть зустрічатися по двоє або по троє; при зустрічі поділяють весь золотий пісок, що є в них, порівну. Доведіть, що пірати можуть добитися, щоб після декількох таких зустрічей в усіх 12 піратів піску стало порівну.

<u>Розв'язання</u>. У трьох групах по 4 пірати в кожній робимо в усіх порівну. Для цього в кожній четвірці вони зустрічаються двічі по два пірати.
$$(a,b,c,d) \to \left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}\right) \to \left(\frac{a+b+c+d}{4},\frac{a+b+c+d}{4},\frac{a+b+c+d}{4},\frac{a+b+c+d}{4}\right).$$
Далі просто збираємо 4 групи по 3 пірати – по одному пірату з кожної групи – і в усіх 12 піратів стане порівну піску.

2. Побудуйте квадратний тричлен $f(x)$ такий, що для довільного натурального числа n існує натуральне число m, для якого справджується рівність:
$$f\left(\frac{n-2023}{n}\right) = \frac{m-2023}{m}.$$

<u>Відповідь</u>: наприклад, $f(x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2023}$.
<u>Розв'язання</u>. Розглянемо тричлен
$$f(x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2023} \Rightarrow f\left(1-\frac{2023}{n}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{2023}{n}\right)^2}{2023} = 1 - \frac{2023}{n^2} = \frac{n^2-2023}{n^2},$$
тобто $m = n^2$.

3.1. З вершин опуклого чотирикутника опустили перпендикуляри на відповідні діагоналі. Виявилося, що довжина кожної діагоналі не більше суми опущених на неї перпендикулярів. Знайдіть кут між відрізками, що з'єднують середини протилежних сторін чотирикутника.

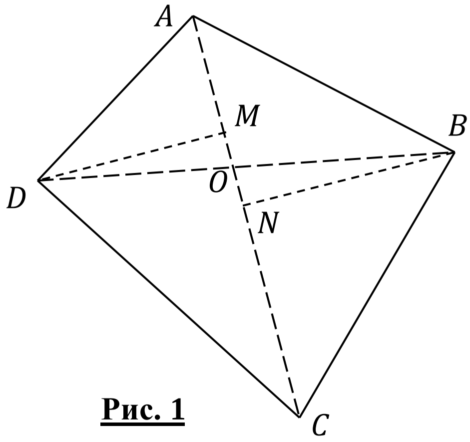

Рис. 1

Відповідь: 90°.
Розв'язання. Позначимо чотирикутник $ABCD$ та точку перетину його діагоналей O, опустимо на його діагональ AC перпендикуляри DM та BN (рис. 1). З нерівностей між перпендикуляром та похилою маємо, що

$$DM \leq DO, BN \leq BO \ \Rightarrow DB \geq DM + BN.$$

Аналогічно $AC \geq AP + CQ$, де AP та CQ – перпендикуляри на діагональ BD. Тоді

$$AC + BD \geq AP + CQ + DM + BN.$$

За умовою $DB \leq AP + CQ$ та $AC \leq DM + BN$, звідки

$$AC + BD \leq AP + CQ + DM + BN.$$

Щоб одночасно справджувалися ці умови, треба, щоб усі нерівності стали рівностями. Це означає, що усі похилі дорівнюють відповідним перпендикулярам, що можливо лише за умови перпендикулярності діагоналей.
Крім того, діагоналі рівні, оскільки $DB = DM + BN = AC$. Таким чином, чотирикутник, утворений з середин сторін $ABCD$ – квадрат, а тому відповідні відрізки, що з'єднують середини , є його діагоналями і тому перпендикулярні.

3.2. З вершин опуклого чотирикутника опустили перпендикуляри на відповідні діагоналі. Виявилося, що довжина кожної діагоналі не більше суми опущених на неї перпендикулярів. Знайдіть кут між діагоналями.

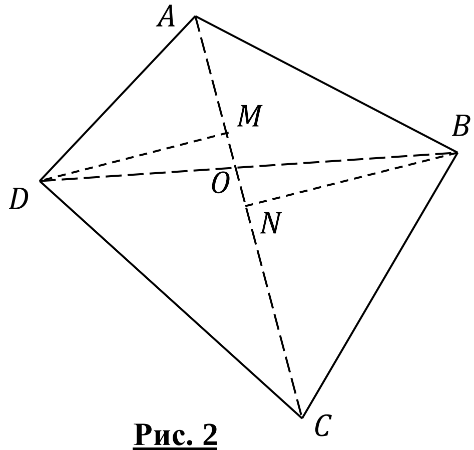

Рис. 2

Відповідь: 90°.
Розв'язання. Позначимо чотирикутник $ABCD$ та точку перетину його діагоналей O, опустимо на його діагональ AC перпендикуляри DM та BN (рис. 2). З нерівностей між перпендикуляром та похилою маємо, що

$$DM \geq DO, BN \geq BO \ \Rightarrow DB \geq DM + BN.$$

Аналогічно $AC \geq AP + CQ$, де AP та CQ – перпендикуляри на діагональ BD. Тоді

$$AC + BD \geq AP + CQ + DM + BN.$$

За умовою $DB \leq AP + CQ$ та $AC \leq DM + BN$, звідки

$$AC + BD \leq AP + CQ + DM + BN.$$

Щоб одночасно справджувалися ці умови, треба, щоб усі нерівності стали рівностями. Це означає, що усі похилі дорівнюють відповідним перпендикулярам, що можливо лише за умови перпендикулярності діагоналей.

4. Відрізки довжиною $1, 2, \dots, 200$ поділили на 50 груп. Чи обов'язково там буде група, в якій є 3 відрізки, з яких можна скласти трикутник?

Відповідь: так.
Розв'язання. З 101 відрізка довжинами $100, 101, \dots, 200$ принаймні 3 будуть в одній множині, і вони утворюють шукану трійку.

5.1. Є 5 таких типів плиток: $\underset{010}{\overset{101}{A}}$, $\underset{11}{\overset{110}{B}}$, $\underset{101}{\overset{1}{C}}$, $\underset{010}{\overset{100}{D}}$ та $\underset{01}{\overset{010}{E}}$, кожного типу по 1000 примірників. Ми хочемо викласти їх в ряд таким чином, щоб ряди з 0 та 1 утворювали однакові послідовності у верхньому та нижньому рядах, тоді послідовність плиток називається *чинною*. Наприклад, послідовність плиток DDC задає у верхньому ряду послідовність 1001001, а у нижньому 010010101. Оскільки верхня та нижня послідовності різні, то задана послідовність плиток DDC не є чинною. Доведіть, що не існує чинних послідовностей, що складаються лише з плиток B, C та D.

<u>Розв'язання</u>. Припустимо, що нам вдалося утворити чинну послідовність з плиток типів B, C, D. Верхній рядок завжди починається з 1. Тому через нижній рядок чинна послідовність не може починатися з плитки D. Так само вона не може починатися з C, бо тоді друга після C плитка має починатися з 0, а таких немає.
Таким чином, перша плитка має бути B. Тоді наступною може бути лише D. Поточно маємо такі послідовності: нагорі 110100 та знизу 11010. І знову наступна має бути лише D, матимемо такі послідовності: нагорі 110100100 та знизу 11010010; і ми зациклюємося на тому, що обов'язково маємо ставити плитку D і так до нескінченності. Таким чином, побудувати скінченну таку послідовність неможливо.

5.2. Є 5 таких типів плиток: $\begin{matrix}101\\A\\010\end{matrix}$, $\begin{matrix}110\\B\\11\end{matrix}$, $\begin{matrix}1\\C\\101\end{matrix}$, $\begin{matrix}100\\D\\010\end{matrix}$ та $\begin{matrix}010\\E\\01\end{matrix}$, кожного типу по 1000 примірників. Ми хочемо викласти їх в ряд таким чином, щоб ряди з 0 та 1 утворювали однакові послідовності у верхньому та нижньому ряду, тоді послідовність плиток називається *чинною*. Наприклад, послідовність плиток DDC задає у верхньому рядах послідовність 1001001, а у нижньому 010010101. Оскільки верхня та нижня послідовності різні, то задана послідовність плиток DDC не є чинною. Чи існує чинна послідовність, що складаються лише з плиток A, B та C.

<u>Відповідь</u>: існує.
<u>Розв'язання</u>. Приклад чинної послідовності може бути таким: $BABC$, для такої послідовності маємо такі рядки: 1101011101.

6. Павутиння має вигляд клітчатої сітки 100×100, тобто це межі усіх одиничних клітинок прямокутника 99×99. У якомусь з кутів сидить павук, а в деяких 100 вузлах висить 100 мух. За один хід павук переповзає в сусідній вузол. Чи вистачить йому 2020 ходів, щоб гарантовано з'їсти усіх мух?

<u>Відповідь</u>: так.
<u>Розв'язання</u>. Поділимо усе павутиння на 10 горизонтальних смуг, у кожній з яких буде по 10 горизонтальних ліній, щоб пройти від лівого до правого краю такої смужки треба зробити 99 горизонтальних ходів. Алгоритм дій павука. Нехай він з початку сидить у лівому нижньому куті.
Павук рухається по лівому нижньому краю першої смуги, доки не бачить над собою муху в цій смузі. Тоді він переповзає вгору на верхню лінію цієї смуги з'ївши муху, яка була в цій смузі (або декількох мух), і доповзає до верхньої лінії цієї смуги. Далі він рухається праворуч до того, як нова муха з'явиться на вертикалі цієї смуги. Тоді він повзе донизу і з'їдає мух на шляху і так далі. Діставшись до правого краю смуги, він повзе нагору до нижнього краю нової горизонтальної смуги і так далі.
Тепер порахуємо кількість ходів, які він має зробити. У кожній смузі окрім останньої він пройде небільше $99 + 9k + 10$ ходів, де k – кількість вертикалей, на яких були мухи в цій смузі. У останній смузі кількість ходів складає $99 + 9k$, бо вже не треба переходити на наступну смугу. Сума цих чисел не перевищує
$$10 \cdot 99 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 = 1980 < 2020.$$
Таким чином, павуку вистачить навіть менше 2020 ходів.

7. Відомо, що натуральні числа m, n задовольняють умову: $23n = 19m$. Доведіть, що число $n + 2m$ ділиться націло на 13.

<u>Розв'язання</u>. Виразимо із заданої рівності одну із змінних та підставимо в шуканий вираз:
$$n = \frac{19}{23}m \Rightarrow n + 2m = \frac{19}{23}m + 2m = \frac{65}{23}m.$$

Оскільки числа 65 та 23 не мають спільних дільників, то одержаний вираз ділиться націло на 65, а тому й на 13.

8. Для яких натуральних k існують натуральні числа a, b, для яких справджується рівність: $a^2 + b^2 = \underbrace{88\ldots8}_{k}\underbrace{22\ldots2}_{k}$?

Відповідь: 1.
Розв'язання. Якщо $k \geq 2$, то 822 та 222 дорівнюють 6 за модулем 8. Але квадрати за модулем 8 можуть дорівнювати 0, 1 або 4, тобто сума двох квадратів не може дати значення 6, отже, розв'язків не існує. Для $k = 1$ покладемо $a = 9$ та $b = 1$, тоді $a^2 + b^2 = 81 + 1 = 82$, тобто 1 задовольняє умові.

Молодша ліга

1.1. Задача № 1.1 наймолодшої ліги.

1.2. Задача № 1.2 наймолодшої ліги.

2. Задача № 2 наймолодшої ліги.

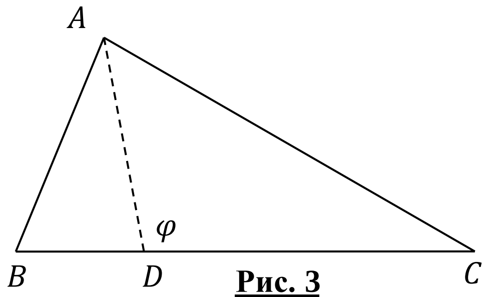

Рис. 3

3.1. З паперу вирізали n таких попарно різних трикутників, що будь-які два можна склеїти по стороні і при цьому утвориться трикутник. Відомо, що серед цих трикутників є принаймні один не прямокутний. Для якого найбільшого можливого n це можливо?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Припустимо, що умову задовольняють 5 таких трикутників: Δ_1, …, Δ_5. Виберемо у кожному з них найбільший кут, позначимо їх $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$. Без обмеження загальності вважаємо, що $\varphi_1 \geq \cdots \geq \varphi_5$. За умовою, що принаймні один з трикутників не прямокутний, при приєднанні до цього трикутника ще одного, один має бути тупокутним (рис. 3). Таким чином, $\varphi_1 > 90°$. Тоді усі інші трикутники повинні мати кут $180° - \varphi_1$, бо інші суміжні кути трикутника Δ_1 більші за φ_1. Аналогічна ситуація і з кутом φ_2 : усі інші трикутники, окрім Δ_1, мають мати кут $180° - \varphi_2$. При цьому зрозуміло, що $\varphi_1 > \varphi_2$, бо інакше у трикутника Δ_2 має бути кут $180° - \varphi_1 = 180° - \varphi_2$, а тому $\varphi_1 = \varphi_2 = 90°$ – суперечність.
Звідси випливає, що усі трикутники Δ_3, …, Δ_5 мають по два однакові кути, тобто подібні. Але тоді з двох з них не можна скласти при умові, що вони не прямокутні. Якщо ж вони прямокутні, то будь-які два мають однаковий катет. Тоді або 2 трикутники будуть рівними, або за подібністю квадрат довжини кожного катета дорівнює добутку довжин двох інших, а тому всі катети, а отже трикутники рівні. Одержана суперечність показує, що таких трикутників може бути не більше 4.

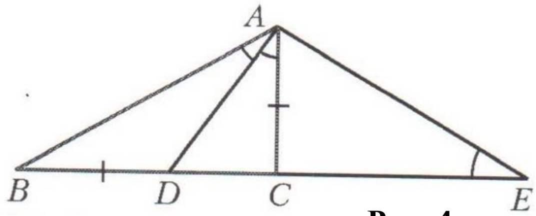

Рис. 4

Покажемо, що 4 такі трикутники отримати можна. Нехай ABC – прямокутний трикутник з прямим кутом при вершині C. Проведемо в ньому бісектрису AD (рис. 4), тоді $\angle DAB = \angle DAC = \alpha$. З усіх трикутників виберемо такий, для якого $AC = BD$. В якості обраних трикутників розглянемо такі: ΔABD та ΔACD. Далі будуємо такий ΔACE, що подібний до ΔACD. Деякі з цих трикутників вже утворюють разом більший трикутник. З ΔABD та ΔACE так само можна склеїти трикутник, якщо сумістити сторони BD та AC. Додамо до цього набору ще трикутник, в якому один з кутів $180° - \alpha$ з прилеглими сторонами до цього кута AD та CE. Неважко переконатися, що цей трикутник можна склеїти з трьома раніше побудованими.

3.2. Задача № 3.2 наймолодшої ліги.

4. У гострокутному трикутнику ABC проведена висота BE, пряма l – дотична до опсианого кола ΔABC у точці B, точка F – основа перпендикуляра, що проведений з точки C на пряму l. Доведіть, що $AB||EF$.

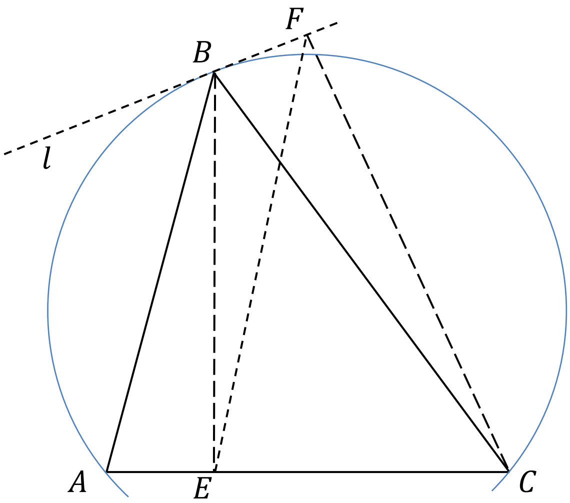

Рис. 5

Розв'язання. Оскільки $\angle BEC = \angle BFC = 90°$ (рис. 5), то чотирикутник $BFCE$ – вписаний. Звідси випливає, що $\angle FEC = \angle FBC$, за властивістю кута між хордою та дотичною маємо також, що $\angle FBC = \angle BAC = \angle FEC$, звідки й випливає шукана паралельність.

5.1. Є 5 таких типів плиток: $\underset{010}{\overset{101}{A}}$, $\underset{11}{\overset{110}{B}}$, $\underset{101}{\overset{1}{C}}$, $\underset{010}{\overset{100}{D}}$ та $\underset{01}{\overset{010}{E}}$, кожного типу по 1000 примірників. Ми хочемо викласти їх в ряд таким чином, щоб ряди з 0 та 1 утворювали однакові послідовності у верхньому та нижньому рядах, тоді послідовність плиток називається *чинною*. Наприклад, послідовність плиток DDC задає у верхньому ряду послідовність 1001001, а у нижньому 010010101. Оскільки верхня та нижня послідовності різні, то задана послідовність плиток DDC не є чинною. З'ясуйте, чи існує чинна послідовність, що складаються лише з плиток B, C, D та E?

Відповідь: не існує.
Розв'язання. Подивимось на кількості цифр 1 в плитках. У плитках B, D, E їх порівну зверху та знизу, а в плитці C – знизу більше. Це унеможливлює використання плиток типу C.
Оскільки верхній та нижній рядки мають містити однакову кількість цифр, то не можна використовувати жодної плитки типу B та E. Ну й зрозуміло, що через першу цифру з самих плиток D чинну послідовність не побудуєш. Таким чином – не існує.

5.2. Задача № 5.1 наймолодшої ліги.

6.1. У кожну з n однакових банок налито не більше, ніж на половину сиропу різної концентрації, проте в деяких банках вона може бути однаковою. Петрик знає точну концентрацію сиропу в кожній банці і може перелити з будь-якої банки в будь-яку іншу потрібну кількість сиропу, аби банка не переповнилася. За яку найменшу кількість переливань можна гарантовано досягти того, що деякі банки, можливо жодні, стануть порожніми, а в усіх інших банках буде сироп однакової концентрації? Концентрація – це відношення маси цукру до маси усього сиропу.

Відповідь: $n - 1$.
Розв'язання. Нехай середня концентрація сиропу $m\%$, тобто по завершенні саме така має бути в кожній непорожній банці. Якщо в якійсь банці вже є така концентрація, то відкладаємо її в бік та більше не розглядаємо. Якщо в якійсь банці, наприклад, А, концентрація сиропу більше $m\%$, то існує інша банка Б, в якій та концентрація менша за $m\%$. Розглянемо $k\%$ – середню концентрацію сиропу в банках А та Б, якщо $k = m$, то зливаємо сироп в одну банку та відкладаємо ці банки – вони задовольняють потрібному остаточному розподілу. Якщо $k > m$, то переливаємо сироп з А в Б, доки в Б він не стане рівним $m\%$. Аналогічно при $k < m$ переливаємо з банки Б в банку А до отримання концентрації $m\%$ у банці А. Після цього відповідно банку Б або банку А відкладаємо в сторону і в нас лишається $n - 1$ банка. За нашими діями у банках, що лишилися, налите не більше півбанки сиропу. З цим набором вчиняємо аналогічно. Коли залишаться дві останні банки, то їх треба просто злити в одну. Таким

чином, завжди достатньо буде $n-1$ переливання.
Покажемо, що меншою кількістю інколи обійтися не можна. Нехай в одній банці концентрація 60%, а в інших по $\left(50-\frac{10}{n-1}\right)\%$, причому в усіх банках порівну сиропу. Тоді середня концентрація дорівнює 50%. Кожним переливанням ми можемо зменшити кількість банок з концентрацією менше 50% максимум на одну, звідки й переливань треба буде не менше $n-1$.

6.2. Задача № 6 наймолодшої ліги.

7.1. Навколо круглого стола розставлені p тарілок на відстанях 1 м між сусідніми, де p – просте число. На кожній тарілці лежить 1 цукерочка. Біля однієї з тарілок стоять Карлсон та Малюк. Після цього вони починають діяти за такими правилами: Карлсон проходить навколо стола за рухом годинникової стрілки k метрів, де $0<k<p$, і бере зі стола цукерку, якщо вона там є. Після цього Малюк проходить навколо стола за рухом годинникової стрілки m метрів, де $0<m<p$ та $m\neq k$, і бере зі стола цукерку, якщо вона там є. Кому з них дістанеться більше цукерок після таких рухів?

<u>Відповідь:</u> Карлсону на 1 цукерку.
<u>Розв'язання</u>. З умов задачі зрозуміло, що Карлсон та Малюк, обійдуть у певному порядку усі тарілки по одному разу та повернуться до початкової тарілки з цукеркою через p кроків (але Карлсон першим і забере цю цукерку собі). Занумеруємо тарілки числами $0,1,\dots,p-1$, починаючи з тієї, біля якої розпочинають свій рух Карлсон та Малюк. Розглянемо довільну тарілку з номером $n>0$, нехай Карлсон до неї потрапить через a, а Малюк – через b ходів. Тоді до тарілки з номером $p-n$ вони потраплять відповідно через $p-a$ та $p-b$ ходів відповідно. Оскільки $ak-bm$ ділиться націло на p, то числа a та b – різні, бо k та m різні. Звідси випливає, що цукерки з тарілок n та $p-n$ вони заберуть по одній. Таким чином, у Карлсона буде на 1 більше за рахунок цукерки на початковій тарілці.

7.2. Задача № 7 наймолодшої ліги.

8.1. Петрик та Василь грають у таку гру: Петрик пише на дошці цифру 1. Василь після того приписує попереду чи позаду цієї цифри цифру 2, після цього до отриманого двоцифрового числа Петрик попереду чи позаду дописує цифру 3, і так далі. Останнім ходом до отриманого восьмицифрового числа Петрик дописує цифру 9 попереду чи позаду. Якщо отримаме число ділиться націло на 11, то перемагає Петрик, якщо ні – перемагає Василь. Хто переможе за правильної гри обох?

<u>Відповідь:</u> перемагає Петрик.
<u>Розв'язання</u>. Позначимо цифри, що знаходяться на позиції однакової парності з 1 – жовтими, усі інші синіми. Легко зрозуміти, що Петрик завжди для своїх цифр може обрати шуканий колір, після чого Василь отримує число з непарною кількістю цифр, а тому колір обрати не може, куди б він свою цифру не поставив – попереду чи позаду числа. Отож Петрик робить так, щоб жовтими стали такі цифри: $6,3$ та 7. Усі інші – сині. Тоді різниця сум цифр на парних та непарних позиціях дорівнює: $(2+4+5+8+9)-(1+3+6+7)=11$, тобто отримуємо число, що кратне 11.

8.2. Задача № 8 наймолодшої ліги.

<u>Середня ліга</u>

1. Нехай a,b,c – сторони трикутника. Доведіть, що справджується нерівність:
$$a^2+b^2+c^2\leq a\cdot\max\{b,c\}+b\cdot\max\{c,a\}+c\cdot\max\{a,b\}.$$

<u>Розв'язання</u>. Ліва та права частини не змінюються при перестановці a,b,c, тому без обмеження загальності вважатимемо, що $a \le b \le c$. Тоді задана нерівність переписується таким чином:

$$a^2 + b^2 + c^2 \le ac + bc + cb = ac + 2bc \Leftrightarrow (c-b)^2 \le a(c-a).$$

Зрозуміло, що з упорядкованості $a \le b \le c$ випливає $c - b \le c - a$, а з нерівності трикутника $c - b < a$, звідки й випливає остання нерівність.

2.1. Доведіть, що для n додатних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, добуток яких дорівнює 1, справджується нерівність:

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} + \left(\frac{a_n}{a_1}\right)^{n-1} \ge a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку таку нерівність:

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + (n-2)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} =$$

$$\underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}}_{n-1} + \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1}}_{n-2} + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1} \ge$$

$$\ge \frac{n(n-1)}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}}_{n-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-1}}_{n-2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{n-1}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\left(\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{n-2} \ldots \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{a_1^n}{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n}\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{n(n-1)}{2} a_1^2.$$

Якщо циклічно записати такі нерівності та додати їх усі, то кожний доданок лівої частини заданої нерівності буде входити $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ раз, тому коефіцієнт $\frac{n(n-1)}{2}$ скоротиться і ми отримаємо те, що й мали довести.

2.2. Задача № 2 наймолодшої ліги.

3. Задача № 3.1 молодшої ліги.

4.1. Задані два кола Ω_P та Ω_Q, які перетинаються в двох різних точках A та B. Побудуйте коло, яке містить всередині кола Ω_P та Ω_Q і яке дотикається до цих кіл внутрішнім чином у точках P та Q відповідно таких, що точки A, P та Q є колінеарними.

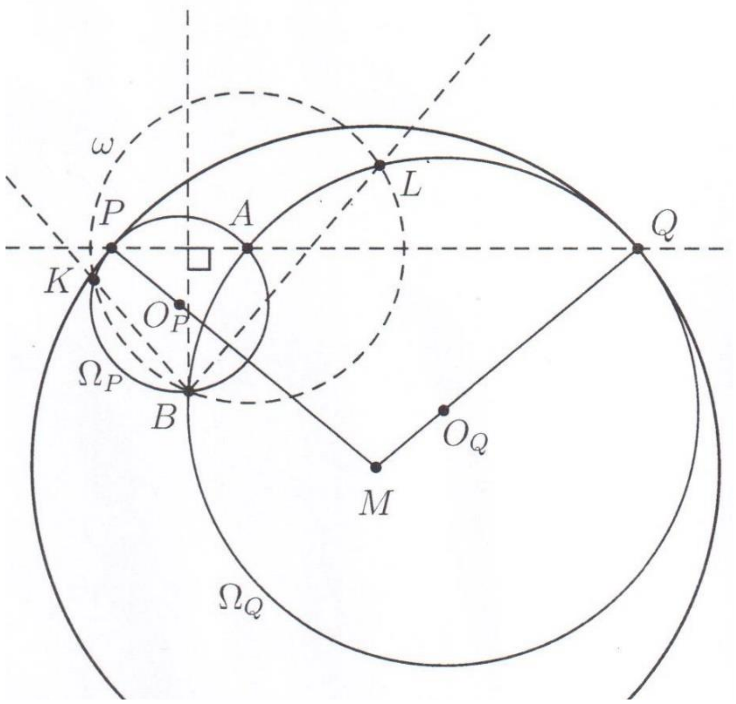

Рис. 6

Розв'язання. Нехай O_P та O_Q – центри кіл Ω_P та Ω_Q відповідно (рис. 6). Побудуємо коло ω з центром у точці A, що проходить через точку B, і нехай K та L – точки його перетину з Ω_P та Ω_Q відповідно. Далі побудуємо бісектрису $\angle KBL$, а далі перпендикуляр до цієї бісектриси, що проходить через точку A. Нехай P та Q – точки, де цей перпендикуляр перетинає Ω_P та Ω_Q відповідно, та M – точка, де перетинаються прямі PO_P та QO_Q. Коло з центром у точці M, що проходить через P, є шуканим колом.

Доведемо коректність побудови, тобто, що ми дійсно отримаємо шукане коло. При інверсії відносно кола ω два задані кола Ω_P та Ω_Q перейдуть у прямі BK та BL відповідно. Шукане коло перетворюється на коло γ, яке містить всередині точку A і дотичне до BK та BL. Точки дотику кола γ з BK та BL, скажімо, P' та Q', є образами до точок P та Q відповідно (це вже точки з самої умови). Оскільки точка A є колінеарною з кожною парою образів точок, A, P та Q колінеарні тоді і тільки тоді, коли A, P' та Q' колінеарні. У цьому випадку A, P, Q P' та Q' є колінеарними. Нарешті, оскільки $P'Q'$ перпендикулярно до бісектриси $\angle KBL$, точки P та Q повинні лежати на перпендикулярі до цієї бісектриси, який проходить через точку A.

4.2. Точка C лежить всередині півкруга з діаметром AB, I – центр вписаного у ΔABC кола. Промені AI та BI перетинають задане півколо у точках X та Y відповідно. Доведіть, що $XY \perp CI$.

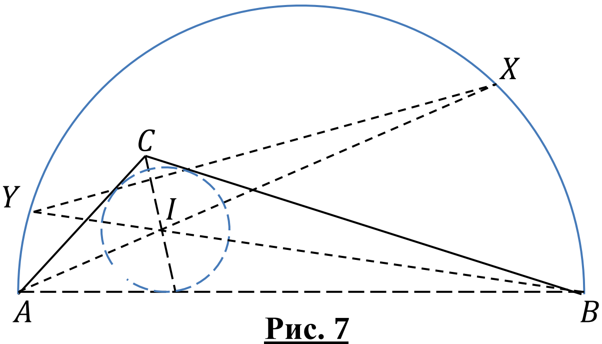

Рис. 7

***Розв'язання*.** Кут між AB та XY дорівнює

$$\frac{1}{2}|\smile AY - \smile BX| = \frac{1}{2}(\angle CAB - \angle CBA)$$

(вважаємо розташування як на рис. 7, інші випадки – аналогічні). З іншого боку, бісектриса CI утворює такий саме кут з висотою до AB, звідси й випливає твердження задачі.

5.1. Для натурального числа n визначимо множину $M = \{1, 2, 3, \dots, n^2 + n + 2\}$. Розглянемо підмножини A_1, A_2, …, A_n множини M такі, що для кожного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ множина A_k має $n^2 + k + 1$ елемент. Доведіть, що перетин усіх цих n підмножин містить принаймні 2 сусідні натуральні числа.

***Розв'язання*.** Підмножина A_n містить усі елементи множини M окрім одного, підмножина A_{n-1} містить усі елементи окрім двох, …, підмножина A_1 – усі елементи, окрім деяких n. Таким чином, перетин усіх підмножин має містити усі елементи окрім щонайбільше $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Таким чином, перетин міститиме не менше, ніж $n^2 + n + 2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 4)$ елементів.
Нехай перетин містить такі елементи: $1 \le x_1 < x_2 < \dots < x_m \le n^2 + n + 2$. Якщо припустити, що там немає сусідніх елементів, то мають справджуватися такі оцінки:

$$x_m \ge x_1 + 2(m-1) \ge 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n^2 + n + 2) = n^2 + n + 3,$$

суперечність, що завершує доведення.

5.2. Юрко та Марія грають у таку гру: на початку Юрко рисує довільний трикутник. Після цього Марія рисує пряму, що проходить через середину однієї з середніх ліній цього трикутника. Далі Юрко так само рисує пряму, що проходить через середину однієї з середніх ліній цього трикутника. Після чого трикутник виявляється розбитий на 4 частини. Юрку дістаються частина з максимальною площею (або одна з таких, якщо вона не одна) та з мінімальною, а Марії – дві інші. Перемагає той, в кого сума площ частин – більша. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію?

***Відповідь*:** ні.
***Розв'язання*.** Нехай D, E, F – середини відповідних сторін ΔABC (рис. 8). Позначимо через $K = AD \cap EF$. Марія може уникати поразки, якщо буде рисувати пряму, на якій розташована медіана. Тоді трикутник поділений на два трикутники однакової площі. Тоді нехай своїм ходом Юрко поділить трикутник на 4 частини: S_1 і S_2 – у ΔACD та S_3 і S_4 – у ΔAED. Оскільки $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, то якщо S_1 – максимальна з чотирьох, то S_2 – мінімальна. І Юркові дістанеться половина площі, як і Марії.
Так само і Юрко не програє, якщо гратиме так – якщо Марія проводить медіану, то Юрко отримує половину площі, якщо вона проводить не медіану, то Юркові достатньо провести самому медіану і так

само отримати половину площі.

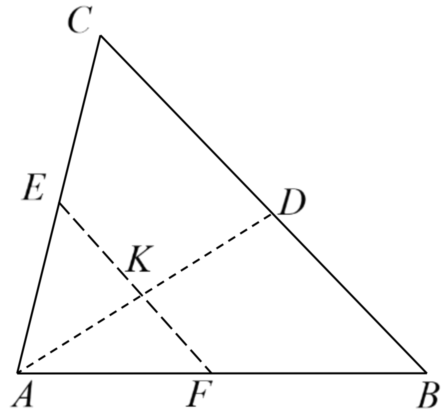

Рис. 8

6.1. Задача № 6.1 молодшої ліги.

6.2. Задача № 6 наймолодшої ліги.

7.1. Для натурального числа N позначимо його дільники таким чином: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_n = N$. Знайдіть усі такі числа $N < 1000$, для яких $d_2 d_3 d_6 = N$ та $d_2 d_3 < d_6$.

Відповідь: $256, 48, 405, 567$.

Розв'язання. Запишемо для дільників числа N такі рівності: $d_1 d_n = d_2 d_{n-1} = \dots = d_i d_{n+1-i}$. Загалом, якщо $N = d_a d_b$, то кількість дільників числа N дорівнює $n = a + b - 1$. Оскільки $d_2 d_3$ також дільник числа N, але за умовою він менший за d_6, то звідси випливає, що $d_2 d_3 = d_4$ або $d_2 d_3 = d_5$.

Для першого випадку $d_2 d_3 = d_4$ маємо, що $N = d_4 d_6$, а тому $n = 4 + 6 - 1 = 9$. Якщо $N = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ – розклад числа на прості множники, то матимемо, що $n = (p_1 + 1) \dots (p_m + 1)$. Для числа $n = 9 = 3 \cdot 3$ маємо два варіанти.

Варіант 1. $N = p^8 \Rightarrow$ і тоді рівність $d_2 d_3 = p^1 p^2 = d_4 = p^3$ справджується, тому усі числа $N = p^8$ умову задовольняють.

Варіант 2. $N = p^2 q^2, p < q$. Тоді маємо такі можливості.

- $p^2 < q$, тоді дільники мають такий вигляд: $1 < p < p^2 < q < pq < p^2 q < q^2 < pq^2 < p^2 q^2$, тоді рівність $d_2 d_3 = d_4$ набуває вигляду $pp^2 = q$ – суперечність з тим, що q – просте.
- $p < q < p^2$, і дільники мають такий вигляд: $1 < p < q < p^2 < pq < q^2 < p^2 q < pq^2 < p^2 q^2$, і рівність $d_2 d_3 = d_4$ набуває вигляду $qp = p^2$ – суперечність з тим, що $p \neq q$.

Для другого випадку $d_2 d_3 = d_5$ маємо, що $N = d_5 d_6$, а тому $n = 5 + 6 - 1 = 10$. Для числа $n = 10 = 2 \cdot 5$ маємо два варіанти.

Варіант 1. $N = p^9 \Rightarrow$ Але тоді рівність $d_2 d_3 = p^1 p^2 = d_5 = p^4$ не справджується.

Варіант 2. $N = p^4 q$. Тоді маємо такі можливості.

- $q < p$, тоді дільники мають такий вигляд: $1 < q < p < pq < p^2 < \cdots$ тоді рівність $d_2 d_3 = d_5$ набуває вигляду $pq = p^2$ – суперечність з тим, що $p \neq q$.
- $p < q < p^2$, і дільники мають такий вигляд: $1 < p < q < p^2 < pq < \cdots$, і рівність $d_2 d_3 = d_5$ набуває вигляду $qp = pq$, тому усі числа $N = p^4 q$ з $p < q < p^2$ умову задовольняють.
- $p^2 < q < p^3$, і дільники мають такий вигляд: $1 < p < p^2 < q < pq < \cdots$, і рівність $d_2 d_3 = d_5$ набуває вигляду $p^3 = pq$ – суперечність з тим, що q – просте.
- $p^3 < q < p^4$, і дільники мають такий вигляд: $1 < p < p^2 < p^3 < q < \cdots$, і рівність $d_2 d_3 = d_5$ набуває вигляду $p^3 = q$ – суперечність з тим, що q – просте.
- $p^4 < q$, і дільники мають такий вигляд: $1 < p < p^2 < p^3 < p^4 < \cdots$, і рівність $d_2 d_3 = d_5$ набуває вигляду $p^3 = p^4$ – суперечність.

Залишається підібрати шукані числа.

$N = p^8$, тоді $2^8 = 256 < 1000$, $3^8 = 6561 > 1000$.

$N = p^4 q$ з $p < q < p^2$, $2 < 3 < 2^2 = 4 \Rightarrow 16 \cdot 3 = 48$; $3 < 5 < 3^2 = 9 \Rightarrow 81 \cdot 5 = 405$; $3 < 7 < 3^2 = 9 \Rightarrow 81 \cdot 7 = 567$; $5 < 7 < 5^2 = 25 \Rightarrow 625 \cdot 7 > 1000$.

7.2. Задача № 7 молодшої ліги.

8. Задача № 8.1 молодшої ліги.

Старша ліга

1. Знайдіть усі функції $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, які для довільних дійсних x, y задовольняють такі умови:

- $f\big(f(x^2) + y + f(y)\big) = x^2 + 2f(y)$;
- з умови $x \leq y$ випливає, що $f(x) \leq f(y)$.

Відповідь: $f(x) = x$.

Розв'язання. Позначимо умови з умови задачі через (*) та (**). Покажемо, що функція ін'єктивна. Покладемо в (*) $y = 0$: $f\big(f(x^2) + f(0)\big) = x^2 + 2f(0) \Rightarrow$

$$f\big(f(a) + f(0)\big) = a + 2f(0). \qquad (1)$$

для довільних невід'ємних a. Тобто для $a \geq 0$ ця функція ін'єктивна. Крім того, ця функція необмежена зверху, а тому якщо припустити, що $f(y_1) = f(y_2)$, то при однакових значеннях x маємо, що

$$f\big(f(x^2) + y_1 + f(y_1)\big) = f\big(f(x^2) + y_2 + f(y_2)\big),$$

можна вибрати достатньо велике x, для якого $f(x^2) + y_1 + f(y_1)$ та $f(x^2) + y_2 + f(y_2)$ додатні, а тому з ін'єктивності для додатних матимемо, що $f(x^2) + y_1 + f(y_1) = f(x^2) + y_2 + f(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, звідси f – ін'єктивна.

Покажемо, що $f(0) = 0$.

Випадок 1. Якщо $f(0) \leq 0$, то для $a = -2f(0)$ матимемо, що з (1): $f\big(f(-2f(a)) + f(0)\big) = 0$, тому існує таке c, для якого $f(c) = 0$. Покладемо в (*) $x = 0, y = c$, матимемо, що $f(f(0) + c) = 0 \Rightarrow f(0) + c = c \Rightarrow f(0) = 0$.

Випадок 2. Якщо $f(0) \geq 0$, покладемо в (*) $x = y = 0$: $f\big(2f(0)\big) = 2f(0)$. Покладемо $a = 3f(0) = f(0) + 2f(0) = f(0) + f\big(2f(0)\big)$, тоді з (1)

$$f(a) = f\Big(f\big(2f(0)\big) + f(0)\Big) = 2f(0) + 2f(0) = 4f(0) \Rightarrow$$

$$f\big(f(a) + f(0)\big) = f\big(5f(0)\big) = 3f(0) + 2f(0) = 5f(0).$$

Покладемо в (*) $x = 0, y = 2f(0)$:

$$f\Big(f(0) + 2f(0) + f\big(2f(0)\big)\Big) = f\big(5f(0)\big) = 5f(0) = 2f\big(2f(0)\big) = 4f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Тоді з (1) для $a \geq 0$ $f\big(f(a)\big) = a$. З (*) при $x = 0$ маємо, що $f\big(y + f(y)\big) = 2f(y)$. Тоді при $y = f(a)$

$$f\Big(f(a) + f\big(f(a)\big)\Big) = f(f(a) + a) = 2f\big(f(a)\big) = 2a.$$

Якщо ж $y = a$, то $f\big(a + f(a)\big) = 2f(a) \Rightarrow f(a) = a$ для усіх $a \geq 0$.

З рівності (*) для довільного фіксованого y підбираємо таке x, щоб $f(x^2) + y + f(y) > 0$, а тоді рівність (*) набуває такого вигляду:

$$f\big(f(x^2) + y + f(y)\big) = f(x^2) + y + f(y) = x^2 + y + f(y) = x^2 + 2f(y) \Rightarrow f(y) = y,$$

що й завершує доведення.

2. Задача № 2.1 середньої ліги.

3.1. Точки A, B, P лежать на колі Ω_1 таким чином, що $\angle APB$ – тупий, точка Q – основа перпендикуляра опущеного з точки P на пряму AB. Друге коло Ω_2 має центром точку P та радіус PQ. Дотичні з точок A та B до кола Ω_2 перетинають коло Ω_1 у точках F та H відповідно. Доведіть, що пряма FH дотикається до кола Ω_2.

Розв'язання. Нехай дотичні до кола Ω_2 з точок A та B перетинаються у точці C (рис. 9), точка S – основа перпендикуляра з точки P на пряму FH.

За побудовою, точка P – інцентр ΔABC, тому $\angle ABP = \angle CBP$, також чотирикутник $FPBA$ – вписаний, звідки $\angle ABP = \angle CFP = \angle CBP$.

З рівності $\angle FCP = \angle BCP$ та з спільної сторони CP випливає, що $\Delta FCP = \Delta BCP$, тому $FP = BP$.

З вписаності чотирикутника $FPBH$ маємо, що $\angle PFH = \angle CBP = \angle ABP$. Аналогічно $\angle PFS = \angle QBP$.

З останньої рівності кутів, а також з умов $\angle BQP = \angle FSP = 90°$ та $FP = BP$ маємо рівність $\Delta FPS = \Delta BPQ$, а тому $PS = PQ$. [redacted]
Звідси випливає, що точка S лежить на колі Ω_2, також $PS \perp FH$, тому FH – дотична до кола Ω_2, що й завершує доведення.

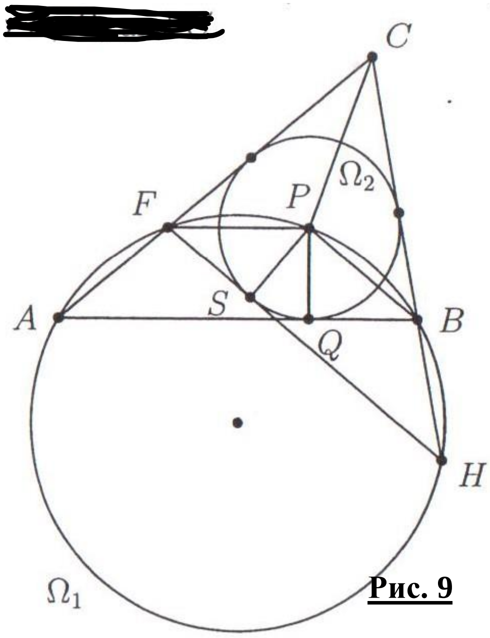

Рис. 9

3.2. Задача № 3.1 молодшої ліги.

4.1. Задача № 4.1 молодшої ліги.

4.2 Задача № 4.2 середньої ліги.

5.1. Задача № 5.1 молодшої ліги.

5.2 Задача № 5.2 середньої ліги.

6.1. На столі лежить n срібних монет. Петрик кожним ходом робить одну з двох дій – або докладає золоту монету і видає Василю стільки гривень, скільки срібних монет знаходиться на столі в цей момент, або прибирає зі стола срібну монету і видає Грицьку стільки гривень, скільки золотих монет знаходиться на столі в цей момент. Процес завершується, коли на столі залишаться лише золоті монети. Хто отримає більше грошей – Василь чи Грицько?

Відповідь: однаково.
Розв'язання. На початку було n срібних монет, на завершення – залишилося m золотих монет. Зобразимо це на координатній площині точками $(0, n)$ та $(m, 0)$ (рис. 10). Лінія, що проведена – це зміна монет на столі, якщо додається золота монета, то проводиться горизонтальний одиничний відрізок (направо), якщо прибирається срібна монета – проводиться вертикальний одиничний відрізок (донизу). Далі зрозуміло, що Василь отримує числа, що дорівнюють кількості сірих клітин у стовпчиках під проведеною лінією, а Грицько – числа, що дорівнюють кількості клітин, що записані у рядках лівіше від лінії. Зрозуміло, що цих клітин при таких підрахунках буде однакова кількість.

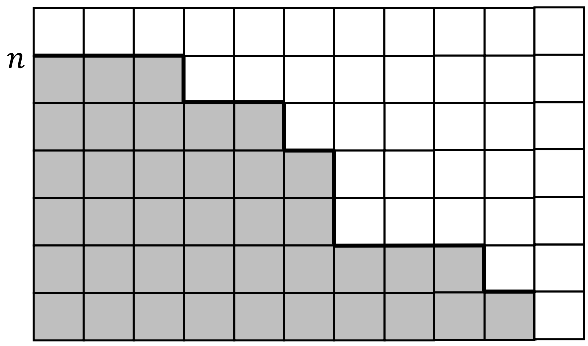

Рис. 10

6.2. Задача № 6.1 молодшої ліги.

7.1. Задача № 7.1 середньої ліги.

7.2. Задача № 7 молодшої ліги.

8.1. Нескінченна та зростаюча послідовність натуральних чисел (a_n) задовольняє умови: $a_n < n + 2020$ та $n^3 a_n - 1$ ділиться націло на a_{n+1} для довільних натуральних n. Доведіть, що $a_n = n, n \in N$.

Розв'язання. З умови зростання послідовності натуральних чисел a_n випливає, що $a_n \geq n$. Припустимо, що для деякого натурального k $a_k > k$. Виберемо таке натуральне m, для якого $m \vdots 2021!$ Та $m > k$. Тоді $\forall i = \overline{2, 2021}$ $(m, m + i) > 1$ (НСД), але з умови задачі випливає, що $(m, a_{m+1}) = 1$. Оскільки a_n зростаюча, то з умови $a_k > k$ випливає, що $a_{m+1} > m + 1$. Таким чином, з умов задачі $m + 1 < a_{m+1} < m + 2021$, звідси за побудови випливає, що $(m, a_{m+1}) > 1$. Одержана суперечність завершує доведення.

8.2. Задача № 8.1 молодшої ліги.