**V Всеукраїнська олімпіада з математики**

**для учнів 5 – 7 класів**

*«Є два типи людей: ті, які поділяють людей на два типи,*

 *і ті, що їх не поділяють».*

*Поділ Барта*

**ІІ тур**

**7 клас**

**6.** Доведіть, що для довільного натурального числа $n$ існує натуральне число $N$, яке ділиться націло на $n$ і сума цифр якого дорівнює $n$. Наприклад, для числа $n=5$ одним з можливих значень $N$ може бути число $4010$. Відповідь обґрунтуйте.

**7.** Відомо, що сума усіх цілих чисел від $(-101)$ до $96$ включно дорівнює сумі усіх цілих чисел від $(-166)$ до числа $X$ включно. Знайдіть число $X$. Вкажіть усі можливі відповіді. Відповідь обґрунтуйте.

**8.** На олімпіаду приїхали $2022$ школярів. Голова оргкомітету повідомив, що серед учасників у будь-яких двох з них є рівно два інших спільних знайомих. Чи не помилився голова оргкомітету? Відповідь обґрунтуйте.

**Рис. 1**

$$I$$

$$II$$

$$III$$

$$IV$$

$$V$$

$$VI$$

**9.** Висоти гострокутного трикутника $ABC$ перетинаються у точці $H$, точка $K$ – середина відрізку $CH$. Доведіть, що $∠AKB$ – гострий. Відповідь обґрунтуйте.

**10.** Прямокутник поділений на $4$ квадрати, що позначені римськими числами $I$, $II$, $III$ і $IV$, та $2$ прямокутники, що позначені римськими числами $V$ та $VI$, як це показане на рис. 1. Усі ці шість фігур мають сторони, що визначаються натуральними числами. Сума площ двох прямокутників дорівнює $100$, а сторона квадрата $II$ дорівнює $1$. Знайдіть сторону квадрата за номером $III$. Відповідь обґрунтуйте.

Київ, 14 травня 2023 р.

На виконання завдання відводиться 2,5 години (150 хвилин)

Кожна задача оцінюється в 7 балів