8 клас

Задача 1

0б. – розглянуті часткові випадки або відсутні суттєві просування

+1б. – розглянути правильно тільки числа Федора чи тільки числа Олексія

6б. – розв'язок вірний, але висновок зроблений спираючись ну неправильні факти

7б. – правильний розв'язок

Задача 2

0 балів - розв'язок неправильний або немає суттєвих просувань.

0 балів - розглянуто випадки турнірів для конкретної кількості команд.

0 балів - сказано, що задачу можна розв'язати методом математичної індукції, без подальших просувань.

1 бал - сформульовано ідею стратегії, що можна обрати одного гравця і відповідати про всі його матчі однаково, відповідно до кількості його очок.

3 бали - сформульовано стратегію дій Олексія, яка дійсно призводить до того, що він вгадує більше половини матчів.

+2 бали - пояснено, чому буде вгадано принаймні половину матчів.

+2 бали - пояснено, чому буде вгадано строго більше половини матчів.

-1 бал - у розв'язку наявні суттєві неточності.

-3 бали - в описі алгоритму є суттєва помилка (а саме помилка у виборі кожної наступної "кращої" команди), яку можна усунути.

Задача 3

0 б. Не сформульована ідея розв'язання

+1 б. При $x < y$ отримали $y^2 < y^2 + 2x < (y+1)^2 \Rightarrow y < \sqrt{y^2+2x} < y+1$.

+1 б. Отримали $y^2 + 2x > (y + \frac{2}{3})^2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}y$.

+1 б. Отримали $x^2 + 2y < x^2 + 3x < (x+2)^2$.

+1 б. $x < y \Rightarrow y - x \geq 1 \Rightarrow 2y > 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2y > (x+1)^2$.

+1 б. Отримали $x + 1 < \sqrt{x^2+2y} < x + 2 \Rightarrow [\sqrt{x^2+2y}] = x + 1$.

+1 б. $\sqrt{x^2+2y} - (x+1) > \frac{2}{3} \Rightarrow$ отримали $y > \frac{5}{3}x$.

+1 б. $xy > (\frac{2}{3}y)(\frac{5}{3}x) = \frac{10}{9}xy$.

Задача 4

0 балів - кроки, що не призводять до розв'язку

0 балів - розв'язок, у якому присутні помилкові переходи або припущення

0 балів - алгоритм розв'язку без відповідних обчислень

0 балів - розглянуті часткові випадки

0 балів - написана умова та малюнок

0 балів - доведення неможливості розташування точки T всередині/на стороні ромба

0 балів - вказано без доведення, що точка T лежить на бісектрисі кута AOB

0 балів - сказано (або доведення спирається на цей факт), що перпендикуляр з точки T попадає в вершину ромба

1 бал - вказано розташування центрів описаних кіл і є часткові просування в обчисленнях через центральні і вписані кути

7 балів - повний розв'язок

Задача 5

0б. – немає суттєвих просувань або розглянуті тільки часткові випадки

1б. – отримали з обґрунтуванням $a = (S - a)^2 \Rightarrow a^2 - (2S + 1)a + S^2 = 0$.
4б. – у рівностях виду $a_k = (S - a_k)^2$ окремо порівнюються ліві частини між собою та праві частини між собою і отримано суперечність, але при порівнянні правих частин допущено помилку.
6б. – повний розв’язок з деякими неточностями
7б. – повний розв’язок

Задача 6

0б. - немає значних просувань
+1б. - зроблена і обгрунтована додаткова побудова
+1б. - розглянуто і доведено існування рівнобедреного трикутника або паралелограма
7 б. - правильний розв'язок

Задача 7

1 бал - в роботі є лише правильна відповідь.
Оцінка (викреслено не більше $n - 3$ аеропортів) - 3 бали.
0 б. - розглянуто випадки n = 3, 4, 5; показано, що при n = 2 аеропорти закривати не можна.
1 б. - доведено, що друга викреслена вершина під час викреслення має степінь не більший за (n - 3);
2 б. - доведено, що друга викреслена вершина має степінь не більший за (n - 3), також викреслені вершини не могли степінь 1 та 0, але не вказано, що викреслювані вершини повинні мати різні степені (під час викреслення).
2 б. - не вказано, що викреслені вершини не могли мати степені 1 та 0 під час викреслення.
Приклад (схема з рівно $(n - 3)$ викресленими аеропортами) - 4 бали
0 б.- наведено приклади для маленьких n.
3 б. - наведений приклад не задовольняє умову при декількох малих значеннях n, або не розглянуто випадок $n = 3$.

Задача 8

0 балів - кроки, що не призводять до розв'язку.
0 балів - розглянуто лише часткові випадки
0 балів - ідея застосування ММІ без доведення переходу
0 балів - очевидні висновки про принцип отримання остач і дій із ними, вказання факту $n \geq m$,
0 балів - висновок, що розбиття на підмножини можливе, без строгого обґрунтування
7 балів - повний розв'язок

9 клас

Задача 1

3 бали - для парних n наведено конструкцію (окремі конструкції для n=4 без узагальнень - 0 балів)

+4 бали - якщо для непарного $n >= 5$ доводиться, що усі числа рівні

Окремі спроби випадку непарного n оцінюються так:

- правильне доведення лише для n=5 -- 1 бал
- розглядаються 2 послідовності з парними та непарними номерами, доводиться факт їх монотонності, але подальші висновки не обгрунтовані - 2 бали
- у правильному доведенні розглядається формула членів послідовностей, але вона не доводиться, а лише робиться висновок про її загальний вигляд по першим членам - 3 бали

Задача 2

0 балів - ідея взяти послідовні числа; не врахований випадок, в якому числа іноді йдуть послідовно та іноді зменшуються, зокрема неправильно виведені ланцюги з нерівностей.

+1 бал - явно вказано хоча б одне з тверджень:

- члени послідовностей або зростають на один, або зменшуються;
- є нерівність з авторського розв’язку
- число, що йде перед максимальним елементом, рівно на 1 менше за нього.

+2 бали - цілком вірно побудований приклад.

5 балів - доведена правильна оцінка.

-1 бал - неправильні перетворення нерівностей на рівності, які легко виправляються.

- 2 бали - недостатнє обґрунтування достатності взяти граничні значення для суперечності.

7 балів - повний розв’язок.

Задача 3

0 балів - задача відсутня, нерозв‘язана або просування не є суттєвими

+0 балів - використано факт, що радикальні осі BC, EF та PQ перетинаються в одній точці, без доведення вписаності чотирикутника PQEF

+1 бал - доведено, що чотирикутник BEFC вписаний

+1 бал - доведено, що прямі PE, QF перетинаються на описаному колі трикутника ABC в точці, діаметрально протилежній до точки A

7 балів - наведено повний розв’язок задачі

-1 бал - використання тривіальних, але несформульованих фактів, що потрібні для розв’язання

Задача 4

0 балів - якщо доведено тільки те, що $[\sqrt{x^2 + 2y}]$=x при $y < x$
- якщо доведено, що C=1 при x=y

1 бал - доведено, що $\{\sqrt{x^2 + 2y}\} < y/x$ при $y < x$

4 бали - доведено, що $C = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ задовольняє умову задачі, але не показано, що воно найменше

+1 бал - наявна ідея ($\frac{x}{y} \approx \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) побудови контрприкладу при $C < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Задача 5

0 балів - викладки містять логічні помилки, міркування не приводять до результату

+ **1 бал** - доведено, що усі числа невід'ємні
+ **1 бал** - отримано співвідношення між числами та сумою усіх цих чисел
+ **2 бали** - отримано розв'язки квадратного рівняння та проведено їх аналіз

7 балів - розв'язання задачі з обгрунтуванням усіх проміжних кроків

-2 бали - не обгрунтовано, що з рівності $a_i + \sqrt{a_i} = a_j + \sqrt{a_j}$ випливає рівність $a_i = a_j$.

-1 бал - не вказана невід'ємність усіх чисел, але вона використовується

Задача 6

0 балів - зроблений підрахунок деяких кутів

3 бали - доведено, що точки $L_1K_1L_2K_2$, де K_2 та L_2 $-$ середини відрізків BK та CL, лежать на одному колі

-1 бал - відсутнє доведення ключового факту, необхідного для повного розв'язання

Задача 7

0 балів - розв'язання для неправильно зрозумілої умови; розглянуто часткові випадки для малих n; Доведено, що не можна з трьох різних чисел отримати 3 витончені пари; Спроба лише за означення витонченої пари побудувати граф та розглядати ланцюги; наведена лише відповідь; ідея, що зі збільшенням n кількість витончених пар збільшується; розв'язок відсутній.

+2 бали - наведено правильний приклад.

+1 бал - є ідея побудувати граф та розглянути цикл будь-якої парності.

-1 бал - необгрунтовано, що в прикладі дійсно будуть різні числа.

-1 бал - посністю необгрунтовано, що для будь-якого числа існує єдине доповнення до витонченої пари, що менше за дане число.

7 балів - повний розв'язок.

Задача 8

2 бали – є правильна відповідь і побудовано приклад графу, але немає доведення, що він задовольняє умову єдиності розбиття;

2 бали – є правильна відповідь і присутні індуктивні міркування побудови прикладу;

4 бали – є правильна відповідь, побудовано приклад з перевіркою єдиності розбиття;

4 бали – є правильна відповідь і доведено, що шукане число не перевищує n^2.

10 клас

Задача 1

+1 б. - повний розбір випадків k=1,2,3,4

+1 б. - розбір чисел від 5 до 9.

+1 б. - сформульована словесна ідея про те, що степінь десятки у добутку більше, ніж у самому k

+2 б. - порахована або обмежена знизу степінь входження десятки у добуток

+ 2б. - доведена необхідна нерівність і зроблені висновки, що k<=10

Задача 2

0б. — розглянуто конкретні можливі ходи гравців та інші несуттєві просування, що не ведуть до правильного розв'язку;

1б. — наявні натяки на правильну стратегію 1 гравця;

3б. — описана з невеликими неточностями стратегія першого гравця;

5б. — описана тільки стратегія першого гравця;

7б. — повний розв'язок;

-1б. — не описано, чому стратегія гарантує відсутність у таблиці трьох жовтих клітинок підряд;

-1б. — не доведено, чому стратегія гарантує, що в будь-якій послідовності немає більше ніж 2 жовтих клітин з одного рядка.

Задача 3

0б – немає розв'язання, несуттєві просування, переформульовано умову задачі;

0б. – вказано достатність доведення рівності кутів між дотичною та хордою і відповідним вписаним кутом;

0б. – вказано достатність доведення рівності відрізків виходячи з підрахунку степенів точок;

1б. – показано, що BKIW та CLIW – дельтоїди, де W – середина дуги BC;

2б. – Зведено задачу до доведення того, що PI є бісектрисою трикутника KPL;

2б. – Доведено задачу у припущенні колінеарності точок P, L та $\omega \cap AC$ та аналогічної колінеарності;

7б – повне розв'язання.

Задача 4

7 балів – Задачу розв'язано.

4 бали – Доведено нерівність $a_n - a_{n-1} \le a_{n+1} - a_n$ або еквівалентну нерівність, що виражає опуклість послідовності a_n.

3 бали – Задачу розв'язано за умови, що послідовність a_n задовольняє нерівність $a_n - a_{n-1} \le a_{n+1} - a_n$.

-1 бал – Помилка, що легко виправляється (описка).

Задача 5

0б - рішення відсутнє, несуттєві просування;

0б - доведено задачу з припущенням, що у паралелограма сусідні сторони рівні;

0б - доведено задачу з припущенням, що довільний чотирикутник в якому два рівні кути є вписаним;

3б - доведення OAE рівнобедренний трикутник;
3б - OBCD паралелограм;
1б - висновок;
-1б - несуттєві недоліки;
-2б - суттєві недоліки;
7б - повне розв'язання.

Задача 6

7 балів — Наведено приклад многочленів (або доведено їх існування), для яких виконується нерівність $b > 2023a$ з повним обґрунтуванням;

6 балів — Наведено правильний приклад многочленів, для яких виконується нерівність $b > 2023a$, але обґрунтування містить недоліки, які легко усуваються;

4 бали — Задачу розв’язано, спираючись (без обгрунтування) на властивість “необмеженості коефіцієнтів кругових многочленів”.

1 бал — Наведено правильну відповідь або наведено правильну відповідь з неправильним її обгрунтуванням.

0 балів — Наведено неправильну відповідь або є спроба доведення нерівності $b \leq 2003a$.

Задача 7

0 б. — неправильний розв’язок
1 б. — наведено правильний приклад;
+2 б. — доведено, що для довільних трьох чисел серед їх різниць будуть не більше двох різних степенів входження двійки;
3 б. — розглянуто випадок різних степенів входження двійки в усі числа (що включає в себе правильний приклад);
7 б. — повний розв`язок;
-1 б. — невеликі недоліки в доведенні;
-2 б. — великі недоліки в доведенні;
-3 б. — відсутній спуск, який показує, що з чисел з одним степенем входження двійки можна перейти до декількох таких груп;

Задача 8

0б. — відповідь;
0б. — ідея з тим, що треба розбити вершини на дві групи по 2023 та проводити ребра 1 кольору між ними, а решта ребер пофарбувати в унікальні кольори, але у перший колір фарбуються тільки 2023 ребра, що утворюють паросполучення.

11 клас

Задача 1

7 балів – повний розв'язок
1 бал – якщо зафіксовано тільки, що числа взаємнопрості.

-1 бал – арифметична чи логічна помилка, що не впливає на результат.
-1 бал – необґрунтована нерівність $a^2 + 1 < bc$, де a<b<c.
-1 бал – необґрунтований випадок, коли a=1.

Задача 2

- **0б.** – суттєві просування відсутні
- **+3б.** – наведено приклад для $1010 \cdot 2022$ прямих кутів
- **1б.** – доведено, що кожен з відрізків є катетом не більше ніж для двох трикутників або що два прямих кути з вершинами у заданих точках не можуть мати спільну сторону
- **2б.** – доведено, що існує не більше ніж 1010 прямих кутів з вершиною у заданій точці
- **2б.** – сформульовано без доведення, що існує не більше ніж 1010 прямих кутів з вершиною у заданій точці, з чого отримано розв'язок задачі
- **-1б.** – недостатні обґрунтування у доведенні оцінки
- **7б.** – повне розв'язання

<u>Зауваження:</u> за розв'язання задачі у припущенні, що кути $A_I A_J A_k$ та $A_k A_j A_i$ різні, бали не знімалися

Задача 3

В критеріях нижче ми використовуємо позначення з офіційних розв'язань.

- **7 балів** – повне розв'язання.
- **+1 бал** – вказано, що точки C, A, P, E утворюють гармонічну четвірку.
- **+1 бал** – стверджується, що точка E є точкою дотику двох вказаних кіл.
- **+2 бали** – у припущенні, що чотирикутники $PKRN$ та $PLQM$ є паралелограмами (або в еквівалентному припущенні) доведено, що описані кола трикутників AMN і CKL проходять через точку E.
- **+1 бал** – у припущенні, що чотирикутники $PKRN$ та $PLQM$ є паралелограмами (або в еквівалентному припущенні) показано, що ці кола дотикаються один до одного у точці E.
- **0 балів** – задача відсутня або у роботі немає істотних просувань, наприклад, **не** ставляться бали за незавершені обчислення в координатах, тригонометрією тощо; за той факт, що C є ортоцентром трикутника AQR; за малюнок до задачі, на якому кола з умови проходять через точку E.

Задача 4

В критеріях нижче ми використовуємо позначення з офіційних розв'язань.

ВАЖЛИВО: яка б у вас не була кількість балів - прочитайте критерії на нуль. У “позитивних” критеріях ви знайдете ті просування та міркування, які журі оцінило; у “нульових” - ті, які побачило, але НЕ оцінило.

- **7 балів** – повне розв'язання.
- **+1 бал** – доведено непарність функції.
- **+0 балів** – отримано $f(0) = 0, xf(x) = f(x^2), f(xf(x)) = xf(x)$ чи подібні рівності;
- **+0 балів** – міркування про те, що достатньо довести ін'єктивність f або сюр'єктивність $xf(x)$;
- **+0 балів** – розгляд оберненої до f функції без обґрунтування її існування;
- **+0 балів** – з рівності $f(yf(y)) = f(y^2)$ робиться висновок, що $yf(y) = y^2$ без жодного обґрунтування;
- **+0 балів** – розгляд неперервних функцій; розгляд обмежених функцій;
- **+0 балів** – перевірка функцій типу $kx + b, \frac{k}{x}$; відповідь з перевіркою (та без);
- **+0 балів** – використання $f(x + y) = f(x) + f(y)$ без жодного обґрунтування;
- **+0 балів** – підстановки з арифметичними помилками;
- **+0 балів** – підстановки, які ні до чого не ведуть; або які ведуть, але жодних потрібних висновків з них не зроблено: $x = 0$; $y = 0$; $y = 1 - x$; $y = -x, y = \pm 1$; $x = a$ (де $f(a) = 1$) тощо;
- **+0 балів** – показано, як розв'язати задачу за припущення, що f - сюр'єкція; проведено міркування про множину таких a, що $f(a) = a$

Журі НЕ знає розв'язків, суть яких - у доведенні сюр'єктивності чи розгляді подібних множин. Якщо учасники покажуть подібний розв'язок, де це буде відігравати суттєву роль, це просування може бути оцінене.

Наступні бали можна отримати одним з двох шляхів. Бали з різних шляхів не сумуються.

Перший шлях:

- **+2 бали** – доведено, що в разі, якщо f не є тотожнім нулем, то НЕ існує такого $x \neq 0$, що $f(x) = 0$;
- **+1 бал** – рівність (6) з авторського розв'язку

Бал нараховується тільки у разі, якщо виписана безпосередньо ця рівність. Якщо, наприклад, виписані рівності (5) та (1), але не проведено віднімання одного від іншого, цей бал НЕ нараховується.

Другий шлях

Нагадування. Бали з різних шляхів НЕ сумуються!

- **+2 бали** – доведено рівність $f(x + 1) = f(x) + 1$
- **+1 бал** – рівність $f(f(y)) = f(y)$

Якщо показано, що $f(f(y^2)) = f(y^2)$, *але не зроблено перехід до довільного y, або показано, що f(yf(y))=yf(y) і проведені міркування щодо сюр'єктивності yf(y), то цей бал НЕ нараховується.*

- **+0 балів** – $f(x + r) = f(x) + r, f(rx) = rf(x)$ для довільного раціонального r.

Журі НЕ знає розв'язків, які б використовували ці рівності. Якщо хтось з учасників покаже розв'язок, у якому ці рівності відіграватимуть суттєву роль, ці просування можуть бути оцінені.

Задача 5

7 балів – наведено контрприклад

0 балів – будь-які міркування, що не ведуть до розв'язання задачі.

Задача 6

- **7 балів** – повне розв'язання.
- **3 бали** – для точок X_1 та Y_1, що лежать на променях AB та AC відповідно та задовольняють рівності $AX_1 \cdot AB = AY_1 \cdot AC = AM^2$, показано, що $\angle KX_1M = \angle ACB$, $\angle KY_1M = \angle ABC$ та вписаність чотирикутника BX_1Y_1C.
- **1 бал** – розглянуто середини сторін AB та AC або вони чітко позначені на малюнку.
- **1 бал** – показано, що достатньо довести рівність $AX \cdot AB = AY \cdot AC$.
- **0 балів** – задача відсутня або у роботі немає істотних просувань.

Задача 7

ВАЖЛИВО: яка б у вас не була кількість балів - прочитайте критерії на нуль. У "позитивних" критеріях ви знайдете ті просування та міркування, які журі оцінило; у "нульових" - ті, які побачило, але НЕ оцінило.

- **7 балів** – повне розв'язання.
- **+0 балів** – розібрано випадки pa, paqb, тощо;
- **+0 балів** – неправильна відповідь (p1p2...pk, nn2n3 тощо);
- **+0 балів** – загальні фрази типу "гарні числа траплятимуться достатньо часто", посилання на "комбінаторні правила";
- **+0 балів** – міркування про кількість дільників числа n;
- **+0 балів** – формулювання (без жодного обґрунтування), що простих дільників у n не більше двох;
- **+0 балів** – спроби довести, що довільний простий дільник p в максимальному степені входження обов'язково буде гарним;
- +**0 балів** – розібрані випадки конкретних значень n (2,3,6,14 тощо) і зроблені висновки з ситуації саме для цих конкретних n без жодних загальних обґрунтувань;
- +**0 балів** – твердження, що гарний дільник разом з наступним та попереднім обов'язково мають утворювати геометричну прогресію;
- +**0 балів** – спроба довести, що для довільного простого дільника q знайдеться гарний дільник вигляду pqs, де p - найменший простий дільник n;
- +**0 балів** – умова задача переформульована в термінах степеня входження простих чисел;
- **+0 балів** – твердження, що якщо у n було k гарних дільників, і n було домножено на просте p>n, кількість гарних дільників стала рівною 2k+1; та інші подібні міркування;
- **+0 балів** – міркування для ланцюжка дільників, у якому присутні НЕ всі дільники n (наприклад, відсутні p2p3 тощо);
- **+1 бал** – правильна відповідь.

Якщо наведена відповідь неповна - наприклад, забуто про степені простих, або не вказано, що p2>p1 - то цей бал НЕ нараховується.

- **+2 бали –** доведено, що перед кожним простим, окрім найменшого, стоїть гарний дільник;
- +**1 бал –** міркування, що якщо (b,c)=1 і b>a, то b НЕ є дільником ac.

Зауваження. Попередні два пункти критеріїв НЕ додаються.

- **+1 бал –** показано, що степінь входження найменшого простого дільника p1 в n рівний (позначення з авторського розв'язку);

Якщо під час доведення НЕ розібрано випадок, коли після p2 наступним дільником у послідовності є p3, а не p1+1, то цей бал НЕ нараховується.

- **+1 бал –** початок доведення того, що після простого pk мають йти дільники pkp1, pkp12, ...

Якщо в роботі наведені міркування, які пояснюють, чому післянаступний після простого - це pkp12, але, власне, ні цей висновок, ні подальші не зроблені, то це трактується саме як початок доведення вказаного факту.

Задача 8

- **0б.** – суттєві просування відсутні
- **2б.** – наведено приклад для 1012 міст
- **-1б.** – у прикладі допущені незначні помилки
- **5б.** – задачу розв'язано за припущення, що максимальна компонента зв'язності містить **рівно** 1011 вершин
- **-1б.** – в одному з випадків допущено помилку, що не вплинула на розв'язання
- **7б.** – повне розв'язання