Міністерство освіти і науки України

Інститут модернізації змісту освіти

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**ІV етап Всеукраїнської**

**олімпіади з математики**

**LXІІ Всеукраїнська олімпіада юних математиків**

**Умови та вказівки до розв’язань задач**

***2 тур***

*Те, що ти не робиш,*

*завжди важливіше того, що ти робиш.*

Дилема працівника

*Ужгород, 5 квітня 2023 року*

8 клас

**8–5.** Чи існують чисел, не усі з яких однакові, кожне з яких дорівнює квадрату суми усіх інших чисел?

*(Богдан Рубльов)*

***Відповідь:*** ні.

***Розв’язання.*** Припустимо, що такі числа існують. Оскільки вони дорівнюють деяким квадратам, кожне з цих чисел невід’ємне. Позначимо суму усіх цих чисел через . Виберемо одне з цих чисел, позначимо його через , тоді а також

Якщо існує два різних що задовольняють цій умові, то за теоремою Вієта їх добуток дорівнює Однак це означає, що одне з них більше що суперечить доведеному вище. Таким чином, існує єдине можливе звідки і випливає, що всі числа рівні.

**Рис. 1**

**8–6.** В опуклому п’ятикутнику виконуються такі умови: , та . Доведіть, що .

*П’ятикутник називається опуклим, якщо його діагоналі розташовані всередині п’ятикутника.*

*(Антон Тригуб)*

***Розв’язання*.** Нехай промені та перетинаються в точці (рис. 1). Тоді паралелограм, а – рівнобедрений, оскільки . Отже,

**8–7.** В країні аеропортів, деякі пари з яких з'єднані двосторонніми авіарейсами. Кожного дня уряд закриває аеропорт з якого літає строго найбільша кількість авіарейсів. Яку найбільшу кількість днів це може продовжуватись?

*(Федір Юдін)*

**Рис. 2**

***Відповідь:***  день для , дні для .

***Розв’язання.***  Використовуватимемо очевидну інтерпретацію мовою графів, і для зручності перейдемо до доповнень графів. Тепер кожного дня прибиратиметься вершина строго найменшої степені.

Зрозуміло, що коли залишаються вершини, більше нічого не відбуватиметься. Для ця оцінка досягається якщо з’єднати дві з трьох вершин ребром.

Покажемо, що якщо в якийсь момент було вершини, їх вже не буде менше ніж . Дійсно, припустимо, що були вершини , і спочатку прибрали а потім . Тоді вершина не може бути з’єднана з жодною з вершин . Також помітимо, що в графі з трьох вершин вершина також не може бути з’єднана з жодною з вершин . Але тоді графі з цих чотирьох вершин степінь була не менше степені , суперечність.

Для прикладу розглянемо такий граф: ланцюг з вершин , де з’єднані кожні дві сусідні вершини, і ще до того ж з’єднана з (рис. 1). Зрозуміло, що будуть прибиратись по черзі вершини .

**8–8.** Задана множина з натуральних чисел таких, що всі вони дають різні остачі при діленні на деяке натуральне число . Доведіть, що для будь-якого натурального дану множину можна розбити на непустих підмножин таким чином, що суми чисел в даних підмножинах також попарно різні по модулю .

*(Антон Тригуб)*

***Розв’язання:*** Нехай ці числа - . Досить показати, що можна вибрати такі два з цих чисел (з ), що всі числа дають різні остачі при діленні на , тоді ми можемо по черзі об’єднувати числа разів, і отримати твердження задачі.

Якщо якесь з чисел ділиться на , наприклад, , то об’єднати можна числа .

Замінимо ці числа на їх остачі при діленні на і відсортуємо. Нехай . Тоді можна об’єднати . Дійсно: для довільного , і , тому ця остача не зустрічається серед інших.

**Рис. 3**

9 клас

**9–5.** Задача **8–5**

**9–6.** Всередині трикутника існує така точка , що . Промені та перетинають сторони та у точках та відповідно. Точки та вибрані на відрізках та відповідно так, що та . Нехай – середина сторони . Доведіть, що – прямий.

*(Антон Тригуб)*

***Розв’язання*.** Нехай та – середини відрізків та відповідно (рис. 3). Тоді та . Отже, . З рівнобедрених трикутників та маємо, що , а тоді лежать на одному колі з діаметром . Також помітимо, що

Отже, , також лежить на колі з діаметром . Звідси, .

**9–7.** Дано попарно різних натуральних чисел. Назвемо пару чисел *витонченою,* якщо їх сума є натуральним степенем двійки. Для кожного знайдіть найбільшу можливу кількість *витончених* пар.

*(Олексій Масалітін)*

***Відповідь:***

***Розв’язання.*** Доведемо, що існує не більше *витонченої* пари ММІ за База для очевидна, доведемо перехід. Нехай твердження доведено для доведемо його для чисел. Позначимо через найбільше з них, припустимо, що число міститься в деяких двох *витончених* парах. Тоді і – степені двійки. Позначимо через таке число, що Тоді і більші за але менші за тому що суперечить тому, що числа попарно різні. За припущенням індукції, серед інших чисел не більше ніж *витончені* пари, тому всього їх не більше ніж що закінчує доведення переходу. Залишилось показати, що *витончена* пара може бути для будь-якого Дійсно, оберемо Тоді пари є витонченими для

***Альтернативне розв’язання.*** Розглянемо наступний граф на вершинах. Кожному числу поставимо у відповідність деяку вершину, а дві вершини з’єднаємо ребром, якщо відповідні їм числа утворюють *витончену* пару. Припустимо, що розглянутий граф має цикл. Тоді нехай числа, що відповідають вершинам цього циклу – Це означає, що числа є степенями двійки. Без обмеження загальності, нехай – найбільше з цих чисел. Позначимо через таке число, що Тоді і більші за але менші за тому що суперечить тому, що числа попарно різні. Таким чином, цей граф не має циклів, тобто він має не більше ніж ребро. Залишилось показати, що *витончена* пара може бути для будь-якого Дійсно, оберемо Тоді пари є витонченими для

**9–8.** Яка найбільша кількість ребер може бути в графі на вершинах, якщо існує рівно один спосіб розбити його вершини на пар таким чином, що в кожній парі вершини з’єднані ребром?

*(Антон Тригуб)*

***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Розглянемо це розбиття на пари, позначимо вершини , де вершини з’єднані ребром для кожного від до . Помітимо, що для кожних двох пар , між ними проведено не більше двох ребер: адже не можуть бути одночасно проведеними ребра - тоді б ми могли замінити вибрані ребра на ці, і все ще отримати досконале парування, а також не можуть бути одночасно проведеними ребра . Таким чином, всього може бути проведено не більше ніж ребер.

Приклад виглядає наступним чином: проведемо всі ребра вигляду , а також для кожних проведемо ребра . Розглянемо довільне досконале парування в цьому графі. Помітимо, що вершина з’єднана лише з , тому в ньому має бути ребро . Серед вершин що лишились, вершина з’єднана лише з , тому в паруванні має бути ребро . Продовжуючи аналогічно, всі ребра будуть в цьому паруванні.

10 клас

**10–5.** Задача **8–6**

**10–6.** Нехай , та – многочлени з цілими коефіцієнтами, при цьому справджується рівність: . Позначимо через та максимальний з модулів коефіцієнтів многочленів та відповідно. Чи обов’язково виконується умова ?

*(Дмитро Петровський)*

***Відповідь****.* ні, не обов’язково.

***Розв’язання.*** В якості прикладу можна взяти наступні два многочлени:

Тоді та , при цьому .

***Альтернативне розв’язання.*** Розглянемо такі два многочлени:

За побудовою , тобто многочлен – існує. Оскільки

Сума коефіцієнтів многочлена дорівнює , а кількість коефіцієнтів дорівнює , бо він має степінь . Тому за принципом Діріхле там є коефіцієнт, що не менший за

Зрозуміло, що при достатньо великих буде справджуватись нерівність:

**10–7.** Дано попарно різних натуральних чисел. Для кожної пари цих чисел розглядається різниця Для кожної з цих різниць Влада записує степінь входження двійки в неї. Яку найбільшу кількість різних чисел могла виписати Влада?

*(Олексій Масалітін)*

***Відповідь:***

***Розв’язання.*** Доведемо, що існує не більше різних степеней входження ММІ за База для очевидна, доведемо перехід. Нехай твердження доведено для доведемо його для чисел. Припустимо, що всі числа мають однакову степінь входження двійки . Якщо то поділимо ці числа на зрозуміло, що степінь входження двійки в усі різниці зменшилась на тому кількість різних серед них не змінилась. Тепер можемо вважати, що всі числа непарні і додати до них тоді жодна з різностей не зміниться, а числа стануть парними. Будемо повторювати таку операцію. Зрозуміло, що єдине непарне число, яке не зменшується після операцій додавання і ділення на максимальний степінь входження двійки – це Оскільки чисел більше ніж одне, сума цих чисел буде зменшуватись після кожної пари операцій, тож рано чи пізно ми отримаємо набір чисел, серед яких є числа з різним степенем входження двійки.

Поділимо числа на групи за степенем входження двійки (степені дорівнюють відповідно ). Зрозуміло, що в різницю для () двійка входить в степені тому серед різниць між різними групами є лише різних степенів входження. Для кожної з цих груп можна застосувати припущення індукції, тому кількість різних степенів входження в різниці чисел з не перевищує Таким чином, кількість різних степеней входження не більша за

Залишилось показати, що різних степеней входження може бути для будь-якого Дійсно, оберемо Тоді пари для мають різні степені входження.

***Альтернативне розв’язання.*** Доведемо, що існує не більше різних степенів входження. Дійсно, нехай є пар, в яких степені входження двійки в різницю чисел пари попарно різні. Тоді розглянемо наступний граф на вершинах. Кожному числу поставимо у відповідність деяку вершину, а дві вершини з’єднаємо ребром, якщо відповідні їм числа утворюють одну з розглянутих пар. Зрозуміло, що всього ребер тож розглянутий граф має цикл. Тоді нехай числа, що відповідають вершинам цього циклу – Тоді степені входження двійки в різниці попарно різні. Без обмеження загальності, нехай степінь входження двійки в число – найменша з них. Тоді всі інші різниці діляться на тому тому ділиться на що суперечить припущенню. Залишилось показати, що різних степеней входження може бути для будь-якого Дійсно, оберемо Тоді пари для мають різні степені входження.

**10–8.** Розглянемо повний граф на вершинах, ребра якого пофарбовані в якісь кольори. Називатимемо граф -*гарним*, якщо всі вершини графу можна розбити на пари таким чином, що серед кольорів, у які пофарбовані ребер, що з’єднують вершини в парах, рівно різних. Чи могло таке статись що граф -гарний та -гарний, але не є -гарним?

*(Антон Тригуб)*

***Відповідь***: так.

***Розв'язання.*** Пронумеруємо вершини графа числами від до Розглянемо тоді наступний граф: всі ребра між вершинами різної парності пофарбовано в колір , а всі інші ребра пофарбовано у свої унікальні кольори. Розглянемо будь-яке розбиття вершин на пари. Нехай в з цих пар вершини мають різну парність, а в – однакову.

Помітимо, що – парне число, адже парні числа, що не входять в пар, де числа різної парності, мають розбиватися на пари між собою. Таким чином, непарне, і принаймні одне ребро кольору в нас є. Таким чином, всього різних кольорів буде

непарне число, тобто рівно кольорів бути не може.

Звідси також видно, що отримати будь-яку непарну кількість кольорів можна, вибравши відповідний та розбивши решту непарних чисел між собою на пари і парних чисел між собою на пари.

11 клас

**11–5.** Назвемо многочлен *мішаним*, якщо він має як додатні так і від'ємні коефіцієнти (нуль ми не рахуємо ні додатнім ні від'ємним). Чи правда, що добуток двох мішаних многочленів завжди є мішаним многочленом?

**Рис. 4**

*(Вадим Коваль)*

***Відповідь:*** Не обов’язково.

***Розв’язання.*** Наведемо такий контрприклад:

Обидва ці многочлени мішані, а їхній добуток не мішаним, оскільки

**11–6.** Нехай – середина медіани трикутника . На стороні знайшлася така точка , що та , а на стороні знайшлася така точка , що та . Доведіть, що точки лежать на одному колі.

*(Михайло Штанденко)*

***Розв’язання***. Нехай – середина , а – середина . Тоді точки , та лежать на одній прямій – середній лінії , що паралельна (рис. 4). Далі маємо, що , отже чотирикутник – вписаний, аналогічно також вписаний. Отже , тому точки , , та лежать на одному колі, звідки , тобто чотирикутник вписаний, що і треба було довести.

***Зауваження:*** В даній конфігурації чотирикутник – гармонічний.

**11–7.** Для натурального числа випишемо усі його дільники . Дільник назвемо *гарним*, якщо не ділиться на , . Знайдіть всі , у яких гарних дільників менше ніж кількість різних простих дільників.

*(Михайло Штанденко)*

***Відповідь***. та , де , де – прості числа.

***Розв’язання***. Спочатку доведемо, що якщо число має принаймні три різні прості дільники, то воно нам не підходить. Нехай – кількість різних простих дільників та два найменші прості дільники . Тоді зрозуміло, що існує , що перші підряд декілька дільників числа будуть числами . Одразу помітимо що взявши в якості всі прості дільники числа крім найменшого, матимемо чисел, що задовольняють умову. Дійсно, всі дільники, що менші простого числа взаємно прості з цим числом, тоді , а з того, що і випливає вищесказане. Залишилося знайти ще одне гарне число. Нехай . Тоді дільник є гарним. Дійсно, після нього не може йти дільник, що ділиться на , тому що найменший з таких, ще не вибраних це , а . Отже - наступний складений дільник. Тоді візьмемо останнє просте число, що буде йти підряд після (можливо ), після якого наступним буде йти складене число . Тоді воно буде шуканим -им гарним числом. Тепер нехай не ділиться на . Тоді наступним складеним дільником буде . Якщо між та є хоча б один простий дільник, то візьмемо, аналогічно, останній з них в якості нашого -ого гарного числа. В інакшому ж випадку, - будуть послідовними дільниками, а значить і будуть послідовними дільниками, проте тоді дільник буде шуканим, адже оскільки - степінь входження простого в число , то не буде ділитися на , а не буде ділитися на , проте , причому ділиться на більше одного простого дільника числа , а значить його ми ще не рахували, що ми і хотіли довести.

Якщо число є степенем простого, то, очевидно, воно нам підходить, бо в нього зовсім немає гарних дільників.

Залишилося розглянути випадок, коли число має два різні прості дільники, які позначимо . Тоді зрозуміло, що існує , що перші підряд декілька дільників числа будуть числами . Дільник є гарним, а значить є єдиним гарним дільником нашого числа. Звідси наступним після буде дільник, що ділиться на , проте найменший такий з ще не використаних є , а отже він і іде після . Проте , звідси наше число не ділиться на . Тоді, аналогічно, дільники будуть послідовними дільниками, а дільник буде гарним. Отже , звідки , причому , звідки і випливає наведена відповідь.

Нескладною перевіркою переконуємося, що обидві відповіді дійсно задовольняють умову.

**11–8.** У країні міст, кожні два з яких з’єднані в обидва боки рівно одним з трьох видів транспорту – залізницею, повітряним сполученням чи автомобільним шляхом. У цю країну приїхав турист, який має усю транспортну схему. Він обирає проїзний квиток на один з видів транспорту та місто з якого розпочинає подорож. Він хоче відвідати якомога більше міст, але користуючись лише проїзним на вказаний тип транспорту. Яку кількість міст гарантовано може відвідати турист? Протягом маршруту він може повертатися в міста, яких вже побував.

*(Богдан Рубльов)*

***Відповідь:*** міст.

***Розв’язання*.** Нехай у нас є повний граф, кожне ребро якого пофарбоване в один з трьох кольорів. Покажемо, що завжди буде існувати компонента зв’язності принаймні одного з кольорів, що має потужність .

Спочатку покажемо, що можна організувати розфарбування ребер таким чином, щоб компоненти зв’язності одного кольору більшої ніж з вершин не існувало. Позначимо кольори номерами – 1-й, 2-й та 3-й. Розіб’ємо вершини на групи по – групи «А», «Б», «В» та «Г». Нехай усі вершин груп «А» та «Б» з’єднані ребрами кольору 1, усі вершини групи «В» – кольором 2, групи «Г» – кольором 3. Проміж собою усі вершини з’єднані ребрами тих кольорів, як це показане на рис. 5. Тому групи «А» чи «Б» утворюють компоненту зв’язності з вершин кольору 1. Групи «А» та «В» кольору 2, групах «Б» та «Г» – кольору 3. Більшої компоненти зв’язності за кількістю вершин очевидно не існує.

**Рис. 5**

Припустимо, що існує таке розфарбування, при якому найбільша компонента зв’язності містить менше вершин. Розглянемо таке з них, при якому відповідь в задачі найменша.

Розглянемо найбільшу компоненту зв’язності по одному з кольорів. Саме ця компонента, точніше кількість вершин в ній, і є відповіддю в задачі. При наявності однакових вибираємо будь-яку. Нехай вони відповідають кольору 1. Позначимо цю компоненту як . Нехай в цю компоненту входять рівно вершин. Зауважимо, що при цьому між вершинами цієї компоненти не усі ребра мають колір 1. Але якщо ми перефарбуємо усі ребра цієї компоненти в колір 1, то від цього відповідь в задачі не зміниться. При цьому не існує вершин компоненти , з яких може виходити ребро кольору 1, зовні цієї компоненти , тобто у вершину, що не належить компоненті .

Далі розглянемо серед усіх інших вершин найбільшу компоненту зв’язності по кольору 2 чи 3. До неї віднесемо усі вершини, що пов’язані між собою кольором 2, тобто також ті, до яких можна дістатися через вершини компоненти . Наприклад, якщо , , а для вершини справджуються умови: . Тоді ми вважаємо, що , але не вважаємо, що . Тобто вершина не може належати водночас двом компонентам (цей принцип буде зберігатися і в подальшому). Кількість вершин у компоненті позначимо через . Тепер можемо усі вершини цієї компоненти проміж собою зв’язати ребрами лише кольору 2, за потреби перефарбувавши частину з них. При цьому знову таки відповідь у задачі не зміниться.

Тепер позначимо через ту групу вершин компоненти , що з’єднані принаймні з однією вершиною компоненти ребром кольору 2, нехай їх кількість . Тоді можна усі ребра між вершинами та вершинами компоненти перефарбувати у колір 2. Вони й до цього перефарбування утворювали компоненту зв’язності по кольору 2, але оскільки першою була обрана компонента по кольору 1, то сумарна кількість вершин .

Далі усі вершини компоненти , що не потрапили до групи , об’єднаємо в групу , їх кількість позначимо через . З цих вершин можуть до кожної вершини компоненти виходити лише ребра кольору 3. Але тоді вершини групи та компоненти утворюють компоненту зв’язності по кольору 3. Але тоді з вершин групи не можуть виходити ребра кольору 1 та 3 до усіх вершин, що не потрапили до компонент та . Якщо є ребро кольору 3, то компонента зв’язності по кольору 3 стане більшою від компоненти , а це суперечить її побудові. Тому усі вершини, що не входять до компонент та зв’язані по кольору 2(оскільки не пусте). Позначимо усі ці вершини як компонента . Так само з вершин групи до виходять лише ребра кольору 3. Але тоді між собою компоненти та мають бути зв’язаними лише ребрами кольору 1. Тобто вони утворюють компоненту зв’язності по кольору 1. Але ми з самого початку обрали найбільшу компоненту зв’язності по кольору 1, яка має вершин. Тому в групах та разом не більше ніж вершин, звідки , що й завершує доведення.