"Гнатися за нездійсненним – безумство"
Марк Аврелій

Усна особиста олімпіада

Молодша ліга

1. На дошці нарисований п'ятикутник, що має такі властивості:
- два кути рівні;
- існує три кути, з яких один дорівнює сумі двох інших;
- існує чотири кути, з яких один дорівнює сумі трьох інших;
- існує кут, що дорівнює сумі усіх інших.

Знайдіть усі кути п’ятикутника.

Відповідь: $270°$, $135°$, $67{,}5°$ та два кути по $33{,}75°$.
Розв’язання. Позначимо кути через $\alpha \ge \beta \ge \gamma \ge \delta \ge \varepsilon$, їхня сума $540°$. Далі з умов задачі послідовно знаходимо кути таким чином: $\alpha = \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 540° = 270°$, $\beta = \gamma + \delta + \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 270° = 135°$, $\gamma = \delta + \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 135° = 67{,}5°$, далі аналогічно $\delta = \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 67{,}5° = 33{,}75°$.

2. З натуральних чисел від 1 до 100 вибрали 50 таких, що сума жодних двох вибраних не дорівнює 100. Чи обов'язково серед вибраних чисел є квадрат натурального числа?

Відповідь: так.
Розв’язання. Якщо обране число 100, то воно вже є квадратом. Таким чином з пар чисел $(1,\ 99)$, $(2,\ 98)$, …. $(49,\ 51)$ можуть бути вибрані не більше одного числа. Таких пар усього 49, таким чином має бути обраним число 50, а також рівно по одному числу з кожної пари, а тому має бути обраним одне число з пари $(36,\ 64)$, тому обов'язково буде квадрат.

3. У Петрика є 12 різнокольорових вагончиків, але невідомо якого кольору скільки. Яких потягів він може сформувати більше – в яких 12 вагончиків чи 11? Потяги вважаються однаковими, якщо в них на кожному місці стоять однакового кольору вагончики.

Відповідь: однакова кількість.
Розв’язання. Якщо два потяги з 12 вагончиків різні, то й без останнього вагончику вони різні. Бо якщо вийшли потяги з 11 вагонів однаковими, то й останні вагони однакові. Таким чином кожний унікальний потяг з 12 вагонів породжує унікальний потяг з 11 вагонів. І навпаки, якщо потяги з 11 вагонів різні, то ми додамо по 12-му вагону і вийдуть різні потяги з 12 вагонів. Тобто їхня кількість однакова.

4. Знайдіть усі пари цілих чисел $(a,\ b)$, що задовольняють рівності: $(2a^2 + b)^3 = b^3 a$.

Відповідь: $(27,\ 729)$, $(8, 128)$, $(0,\ 0)$ та $(-1,\ -1)$.

Розв'язання. Пара $(0,\ 0)$ знаходиться очевидно, нехай надалі $ab \neq 0$. З заданої рівності a – точний куб цілого числа. Нехай $a = c^3 \ \Rightarrow\ 2c^6 + b = bc$ або $b(c-1) = 2c^6$. Зрозуміло, що c^6 та $c-1$ взаємно прості, тому $c-1$ має ділити 2. Залишається перебрати варіанти $c = 3$, $c = 2$, $c = 0$ та $c = -1$ і одержати наведені відповіді.

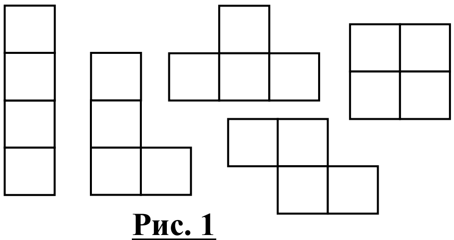

Рис. 1

5. Є 5 типів тетраміно – I, L, Y, Z, O (рис. 1) та фігура, яку ми назвемо *сходами* (рис. 2). Катерина хоче заповнити сходи фігурками тетраміно – фігурок скільки завгодно, та їх можна повертати та перегортати. Чи існує фігура, при присутності якої заповнення сходів усіма іншими фігурами неможливе?

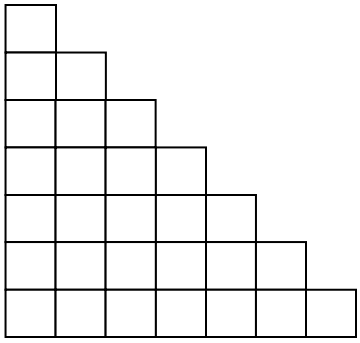

Рис. 2

Відповідь: ні.
Розв'язання. Негативну відповідь дають приклади, що показані на рис. 3–4.

6. Розглянемо трикутник ABC з прямим кутом при вершині A та висотою AF. Позначимо через I – інцентр цього трикутника, а через H – основу висоти, що проведена з точки I на сторону AB. Перпендикуляр з точки H на пряму BC перетинає цю пряму в точці E, а бісектрису $\angle ABC$ у точці D. Доведіть, що $\angle EFD = 45°$.

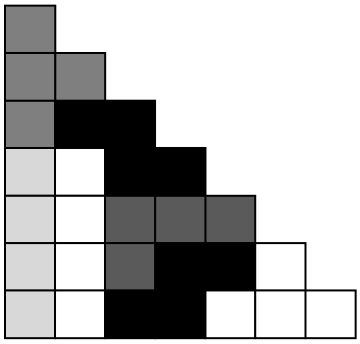

Рис. 3

Розв'язання. Позначимо $\angle ABI = \alpha$ та $\angle DAB = \beta$, тоді $\angle HDI = \angle BDE = 90° - \alpha$, звідки $\angle ADI = 90° - \alpha - \angle HDA$.
Оскільки AI – бісектриса прямого кута, то $\angle HAI = 45°$, тому $\angle AIH = 45°$ і $HA = IH$.
$\angle BHI = 90° \ \Rightarrow\ \angle HIB = 90° - \alpha = \angle HDI \ \Rightarrow\ HD = IH$.
З одержаного вище $HA = IH$, тому $\angle HDA = \angle HAD = \beta \ \Rightarrow$ $\angle ADI = 90° - \alpha - \beta$.
Нехай $K = AD \bigcap HI \ \Rightarrow\ \angle DKI + \angle KDI + \angle KID = 180°$, тобто $\angle HKA + \angle ADI + \angle HID = 180°$, звідси $(90° - \beta) + (90° - \alpha - \beta) + (90° - \alpha) = 180° \ \Rightarrow\ 2\alpha + 2\beta = 90°$.
Оскільки $AF \perp BC$, то $\angle ABF + \angle BAF = 90°$, тому $2\alpha + \beta + \angle DAF = 2\alpha + 2\beta \ \Rightarrow\ \angle DAF = \beta$.
Оскільки DA – бісектриса $\angle BAF$, то D – інцентр ΔBAF, тому DF – бісектриса $\angle AFB$, тому $\angle BFD = \angle EFD = 45°$, що й треба було довести.

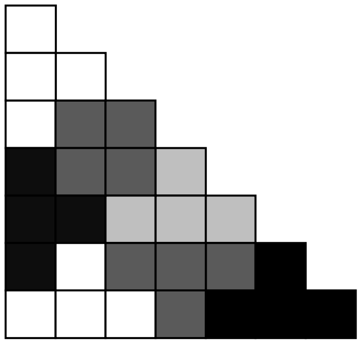

Рис. 4

7. На дошці написане число 12345. Можна додати до записаного числа будь-яку його ненульову цифру. Андрійко стверджує, що зможе десять тисяч разів зробити таку операцію, та після кожного застосування цієї операції результат буде непарним. Чи правий він?

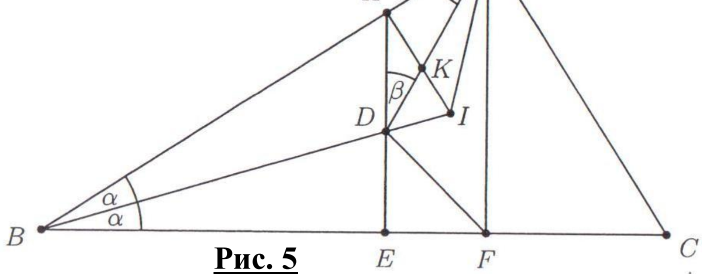

Рис. 5

Відповідь: не правий.

Розв'язання. Кожного разу додається щонайменше число 2, бо при додаванні 1 до непарного числа отримаємо парне число. Таким чином буде додане щонайменше 20000. Тому у певний момент, менше ніж за 5000 операцій, число потрапить в діапазон від 13000 до 13009. Оминути його неможливо, бо найбільше додавання можливе числа 8. Якщо Андрійко отримав непарне число саме з цього діапазону, то воно має усі ненульові цифри непарні. Тому йому доведеться додати до непарного числа непарну цифру і отримає парне число.

8. Знайдіть усі прості числа p для яких вираз $2p^3+4p^2-3p+12$ є п'ятим степенем натурального числа.

Відповідь: $p=11$.

Розв'язання. Запишемо усі остачі чисел за модулем 11 в таку табличку (рис. 6). Тут $f(n)=2n^3+4n^2-3n+12$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
n^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10
n^5	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10
$f(n)$	1	4	5	5	5	6	9	4	3	7	6

Рис. 6

Як бачимо усі остачі $f(n)$, які може мати п'ятий степінь цілого числа можуть набуватися лише при $n\equiv 0 \pmod{11}$. Оскільки нас цікавлять лише прості значення n, то єдиним можливим варіантом лишається число $p=11$. Перевіряємо це значення та знаходимо, що це і є шукана єдина відповідь.

Середня ліга

1. Медіани AD, BE та CF ΔABC перетинаються в точці M. Чи можливо, щоб кола з радіусами MD, ME та MF

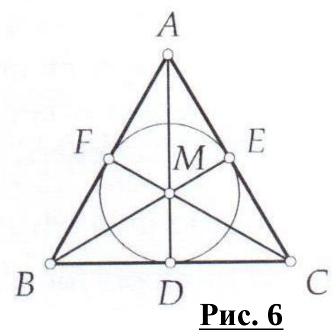

Рис. 6

а) усі мали площу, більшу від площі ΔABC,

б) усі мали площу, меншу від площі ΔABC,

в) усі мали площу, рівну площі ΔABC?

Відповідь: ***а), б)*** так, ***в)*** ні.

Розв'язання. а) Розглянемо рівносторонній трикутник (рис. 6). Для нього описані кола мають однакові радіуси, що дорівнюють третині медіани, тобто радіусу вписаного кола, а тому мають площу менші від площі трикутника.

б) Розглянемо рівнобедрений ΔABC з сторонами $AB=AC$, $BC=1$ та висотою $AD=6$ (рис. 7). Тоді $S(ABC)=3$. Тоді $BE=CF>\frac{1}{2}AD$, тому $ME=MF>\frac{1}{6}AD=1$, тому кола з радіусами ME, MF має площу більшу за $\pi>3$. Зрозуміло, що $MD=\frac{1}{3}MD=2$ і площа відповідного кола рівна 2π.

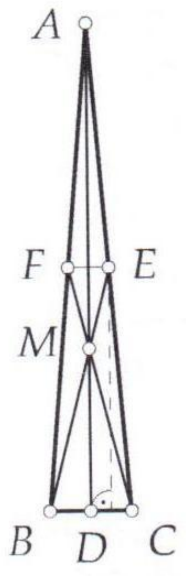

Рис. 7

в) Якщо припустити, що це можливе, то усі радіуси мають бути рівними, тому $MD=ME=MF$, звідки рівними є медіани $AD=BE=CF$, атому трикутник – рівносторонній, а це відповідає пункту ***а)*** задачі, тобто рівність неможлива.

2. Є 5 типів тетраміно – I, L, Y, Z, O (рис. 1) та фігура, яку ми назвемо *сходами* (рис. 2). Катерина хоче заповнити сходи фігурками тетраміно – фігурок скільки завгодно, та їх можна повертати та перегортати. Чи існують фігури з цих п'яти, без якої таке заповнення неможливе?

Відповідь: так.

Розв'язання. Розфарбуємо сходи у шаховому порядку, тоді чорних клітин на 4 більше (рис. 8). З п'яти фігур тільки Y містить різну кількість чорних та білих клітин при своєму розташуванні. Усі інші покривають завжди 2 білі та 2 чорні клітини. Таким чином фігура Y обов'язково має бути присутньою (і принаймні дві).

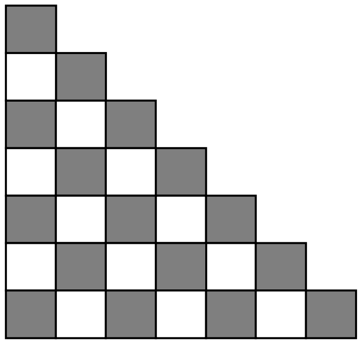

Рис. 8

3. Задача № 4 () молодша ліга.

4. Якщо a, b, c – сторони трикутника, то справджується нерівність:

$$2(a^3+b^3+c^3)<(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

Розв'язання. Зробимо такі перетворення: $a<b+c \Rightarrow a^3<a^2(b+c)$, аналогічно $b^3<b^2(c+a)$ та $c^3<c^2(a+b)$. Після додавання цих трьох нерівностей і матимемо шукане.

5. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, у якому $\angle ABC=\angle ACD$ та $\angle ACB=\angle ADB$. Припустимо, що описане коло ΔBCD не проходить через вершину A. Доведіть, що ΔOAC – прямокутний.

Розв'язання. Оскільки

$$\angle ABC+\angle CDA=\angle BCD<180^\circ$$

(рис. 9), то точка A всередині описаного кола w ΔBCD. Позначимо через C', D' – другі точки перетину прямих CA, DA з колом w. Тоді маємо таку рівність кутів:

$$\angle D'C'C=\angle D'DC=\angle ADC=\angle ACB.$$

Тому $BCC'D'$ – рівнобічна трапеція. Оскільки

$$\angle D'C'C=\angle CAD=180^\circ-\angle ADC-\angle ACD=.$$
$$=180^\circ-\angle ACB-\angle ABC=\angle CAB.$$

Тому $\Delta ABC\sim\Delta AC'D'$ за двома кутами, тому вони рівні, оскільки $BC=C'D'$. Таким чином A – середина хорди CC', тому $AC\perp OA$, що й завершує доведення.

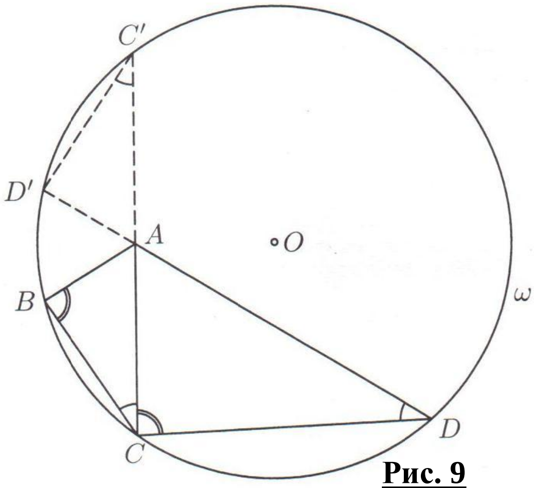

Рис. 9

6. Задача № 7 () молодша ліга.

7. На столі викладено n цукерок, за один хід гравець може з'їсти кількість цукерок, що дорівнює дільнику числа n, що більший від 1, але після його ходу має лишитися на столі принаймні 1 цукерка. Два гравці по черзі роблять такі ходи, програє той, хто не може зробити свій хід за правилами. При правильній грі обох, для яких початкових n перший гравець має виграшну стратегію?

Відповідь: усі парні $n\neq 2^{2k-1},\ k\in N$.

Розв'язання. Назвемо усі парні числа $n\neq 2^{2k-1}$ *гарними*, усі інші натуральні числа – *поганими*. Покажемо, що гравець, який має хід при гарному числі переводить позицію з поганим числом та супротивника. А гравець в поганій позиції будь-яким ходом лишає супротивнику гарну позицію (число).

Якщо спочатку стоїть парне число, що не є степенем числа 2, то там є непарний дільник, більший від 1, якщо гравець з'їсть саме ту кількість цукерок, то він залишить на столі погане число, бо воно непарне.

Якщо на початку непарна кількість цукерок (погане число), то усі дільники непарні, тому гравець має з'їсти непарну кількість дільників і тому залишить гарне число цукерок на столі. Дійсно, якщо він взяв $(2l+1)$ цукерку за умови, що $n=(2m+1)(2l+1)$, $l,\ m\in N$. Тоді залишиться кількість цукерок: $n-(2l+1)=(2l+1)2m$ – парне число, що не є степенем двійки.

Якщо на столі кількість цукерок є гарним числом 2^{2k}, то гравець може з'їсти половину і залишить 2^{2k-1} – погане число. Якщо на столі 2^{2k+1} цукерок (погане число), то при відніманні будь-якого дільника залишиться або парний степінь числа 2, або парне число – гарні числа.
Твердження доведене.

8. *Медіаною* двох раціональних додатних чисел $u=\frac{a}{b}$ та $v=\frac{c}{d}$ (кожне з них – нескоротний дріб) назвемо число $\frac{a+c}{b+d}$. Доведіть, що для довільних двох раціональних чисел u та x, існує нескінченно багато раціональних чисел v, для яких x є медіаною u та v.

***Розв'язання*.** Нехай $u=\frac{a}{b}$ та $x=\frac{c}{d}$, тоді $v=\frac{mc-a}{md-b}$, при достатньо великому m, щоб чисельник та знаменник були додатними числами. Неважко зрозуміти, що медіаною u та v буде саме число x. Залишається переконатися що нескінченна кількість з наведених чисел $v=\frac{mc-a}{md-b}$ є нескоротним дробом.

Лема. Якщо припустити, що дріб $\frac{mc-a}{md-b}$ – скоротний на деяке просте число p, то це число має ділити і $ad-bc$.

Доведення леми. Дійсно, якщо $p\mid mc-a$ та $p\mid md-b$, то

$$p\mid a(md-b)-b(mc-a)=m(ad-bc).$$

Якщо p не ділить m, то $p\mid a$ та $p\mid b$ $\Rightarrow$ початковий дріб $\frac{a}{b}$ був скоротним – одержана суперечність завершує *доведення леми*.

Якщо u та x – різні дробі, то $ad-bc\neq 0$, то це число має скінченну кількість дільників, зафіксуємо певне m та розглянемо прості дільники $p_1,\ \ldots,\ p_l$, на які можна скоротити дріб $\frac{mc-a}{md-b}$ принаймні при одному значенні m, з леми випливає, що їх скінченна кількість. Розглянемо деяке n, для якого дріб $\frac{nc-a}{nd-b}$ є скоротним. Тоді він скорочується на деяке p_i, при цьому має скорочуватися й дріб $\frac{m_ic-a}{m_id-b}$, але тоді $p_i\mid(n-m_i)c$ та $p_i\mid(n-m_i)d$. Якщо p_i не ділить $n-m_i$, то $p\mid c$ та $p\mid d$ $\Rightarrow$ дріб $\frac{c}{d}$ був скоротним – суперечність. Тому $p_i\mid n-m_i$ $\Rightarrow$ $n\equiv m_i \pmod{p_i}$. Вибираємо $n\equiv m_i+1 \pmod{p_i}$ для $i=\overline{1,\ l}$ та з Китайської теореми про остачі існує нескінченна кількість шуканих n. Твердження доведене.

Старша ліга

1. Середини сторін BC, CA та AB трикутника ABC позначили через D, E та F відповідно. Відобразимо точку перетину медіан M ΔABC відносно середин сторін D, E та F і отримаємо точки X, Y та Z відповідно. Відрізки XZ та YZ перетинають сторону AB у точках K та L. Доведіть, що $AL=BK$.

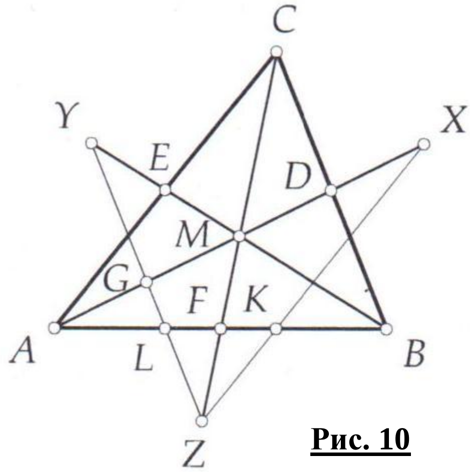

Рис. 10

***Розв'язання*.** Очевидно з властивостей медіан, що

$MY = MB = 2ME$ (рис. 10). Звідси $ABC = \mathrm{H}_M^{-1}(XYZ)$, тому $KL \parallel XY$ і точка F лежить на медіані ΔXYZ, що проведена з вершини Z. Тому $FK = FL$, а звідси й $AL = BK$.

2. Задача № 2 () середня ліга.

3. Задача № 4 () молодша ліга.

4. Задача № 7 () молодша ліга.

5. Задане коло k радіуса r та хорда AB цього кола, що довша за r. На хорді вибрана точка S, для якої $AS = r$. Серединний перпендикуляр до відрізку BS перетинає k у точках C та D. Пряма DS перетинає коло k вдруге у точці E. Доведіть, що ΔCSE – рівносторонній.

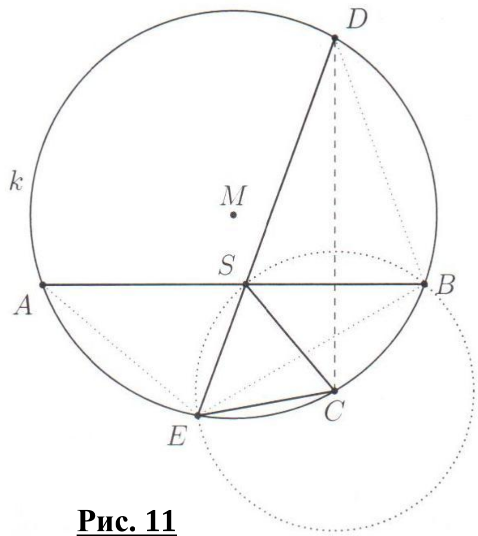

Рис. 11

Розв'язання. За побудови $CS = CB$ та $\angle CDB = \angle SDC = \angle EDC$. Тому $CE = CB = CS$. Тому можна побудувати коло k_1 з центром у точці C та радіусом CE, яке проходить через точки $E,\ S,\ B$ (рис. 11).

Оскільки $\Delta ASE \sim \Delta SDB$ за рівними кутами, то ΔASE – рівнобедрений з основою SE, тому $AE = AS = r$. Тобто дуга кола, що спирається на хорду довжиною радіуса, тому $\angle ABE = 30°$, але тоді, якщо розглянути коло k_1, то в ньому $\angle SBE = 30° \Rightarrow \angle SCE = 60°$, як центральний кут, що удвічі більше відповідного вписаного. Таким чином ΔCSE рівнобедрений з кутом $60°$, тобто він рівносторонній.

6. Нехай $a,\ b,\ c$ – сторони трикутника, тоді доведіть, що справджується нерівність:

$$a(b-c)^2 + b(c-z)^2 + c(a-b)^2 + (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \le 3(a^3+b^3+c^3).$$

***Розв'язання*.** Зробимо такі перетворення:

$$3(a^3+b^3+c^3) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) =$$
$$= 2(a^3+b^3+c^3) - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b) =$$
$$= (a^3+b^3-a^2b-ab^2) + (b^3+c^3-c^2b-cb^2) + (a^3+c^3-a^2c-ac^2) =$$
$$= (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 =$$
$$= (a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 -$$
$$+ c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 \ge c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2.$$

7. Задача № 8 () середня ліга.

8. На площині задані точки $O,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ такі, що площі кожного з трикутників OA_iA_j, $1 \le i < j \le 4$ не менше 1. Доведіть, що існує ΔOA_iA_j, що має площу не меншу ніж $\sqrt{2}$.

***Розв'язання*.** Позначимо через $S_{ij} = S(OA_iA_j)$, $1 \le i < j \le 4$. Без обмеження загальності будемо вважати, що промені OA_1, OA_2, OA_3 та OA_4 йдуть за рухом годинникової стрілки, при цьому $\angle A_1OA_2 = \alpha$, $\angle A_2OA_3 = \beta$ та $\angle A_3OA_4 = \gamma$. Тоді

$$S_{12}=\tfrac{1}{2}OA_1\cdot OA_2\,|\sin\alpha|,\; S_{13}=\tfrac{1}{2}OA_1\cdot OA_3\,|\sin(\alpha+\beta)|,\; S_{14}=\tfrac{1}{2}OA_1\cdot OA_4\,|\sin(\alpha+\beta+\gamma)|,$$
$$S_{23}=\tfrac{1}{2}OA_2\cdot OA_3\,|\sin\beta|,\; S_{24}=\tfrac{1}{2}OA_2\cdot OA_4\,|\sin(\beta+\gamma)|,\; S_{34}=\tfrac{1}{2}OA_3\cdot OA_4\,|\sin\gamma|.$$

З тригонометричних перетворень маємо, що

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta+\sin\alpha\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma),$$

тоді матимемо, що

$$S_{14}S_{23}\pm S_{12}S_{34}\pm S_{13}S_{24}=0.$$

А далі просто оцінюємо, що

$$\max_{1\le i<j\le 4} S_{ij}^2\ge S_{ij}S_{kl}=S_{ik}S_{jl}+S_{il}S_{jk}\ge 2,$$

що й треба було довести.