"Усі узагальнення помилкові, з поміж них і це".
Дізраелі

Математичний бій № 4

Молодша ліга

1.1. Для натурального числа $m \ge 3$ визначимо величину $S(m) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}$. Для $n, k \ge 3$ порівняйте два числа $S(kn)$ та $S(k) + S(n)$.

Відповідь: $S(kn) < S(n) + S(k)$.

Розв'язання. Доведемо, що $S(kn) - S(k) < S(n) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{nk} + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{nk}\right) > \frac{1}{2}.$$

Розглянемо такі доданки:

$$A_1 = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k},\ A_2 = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \ldots + \frac{1}{3k},\ \ldots,\ A_{n-1} = \frac{1}{(n-1)k+1} + \frac{1}{(n-1)k+2} + \ldots + \frac{1}{nk}.$$

Розглянемо величину

$$d_j = \frac{1}{j} - A_j = \frac{1}{j} - \frac{1}{jk+1} + \frac{1}{jk+2} + \ldots + \frac{1}{jk+k} = \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+1}\right) + \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{jk} - \frac{1}{jk+k}\right) =$$

$$= \frac{1}{jk(jk+1)} + \frac{2}{jk(jk+2)} + \ldots + \frac{k}{jk(jk+k)} > \frac{1+2+\ldots+k}{jk(jk+k)} = \frac{k(k+1)}{2jk(jk+k)} = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{1}{j(j+1)} > \frac{1}{2j(j+1)} = \frac{1}{2j} - \frac{1}{2(j+1)}.$$

Звідси випливає, що

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{nk}\right) = d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} + \frac{1}{n} >$$

$$> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2},$$

що й треба було довести.

1.2. Скільки існує трицифрових чисел $\overline{xyz}$, для яких існує таке трицифрове число $\overline{abc}$, для якого справджується рівність: $\overline{xyz} = \overline{abc} + \overline{ab} + a$?

Відповідь. 801.

Розв'язання. Кожне трицифрове число $A = \overline{abc}$ визначає певне число $X = \overline{abc} + \overline{ab} + a$, при цьому, якщо $A_1 > A_2$, то відповідні числа $X_1 > X_2$. Залишається з'ясувати для скількох з цих чисел відповідна сума буде більше ніж трицифрова. Бачимо, що

$899 + 89 + 8 = 996$ – трицифрове.

$900 + 90 + 9 = 999$ – трицифрове.

$901 + 90 + 9 = 1000$ – чотирицифрове.

Таким чином шуканих трицифрових чисел стільки, скільки існує трицифрових чисел між 100 та 900, тобто їх 801.

2.1. Іванко виписує послідовність квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами. На попередньому кроці він має многочлен $ax^2 + bx + c$, тоді з нього він може записати один з двох тричленів – або $cx^2 + bx + a$, або $a(x+d)^2 + b(x+d) + c$ для деякого дійсного d. Чи можна, починаючи з тричлена $x^2 - 2x - 1$ отримати за скінченну кількість кроків многочлен $2x^2 - x - 1$?

Відповідь: ні..

Розв'язання. Очевидно, що перший крок зберігає дискримінант тричлена. Перевіримо те саме для другої дії:

$$a(x+d)^2+b(x+d)+c=ax^2+(2ad+b)x+(ad^2+bd+c)\ \Rightarrow$$

$$D=(2ad+b)^2-4a(ad^2+bd+c)=4a^2d^2+4abd+b^2-4a^2d^2-4abd-4ac=b^2-4ac,$$

як бачимо і тут дискримінант зберігається. Оскільки дискримінант початкового тричлену дорівнює $D_1=8$, а другого – $D_2=9$, то зрозуміло, що вказане перетворення неможливе.

2.2. Іванко виписує послідовність квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами. На попередньому кроці він має многочлен ax^2+bx+c, тоді з нього він може записати один з двох тричленів – або cx^2+bx+a, або $a(x+d)^2+b(x+d)+c$ для деякого дійсного d. Чи можна, починаючи з тричлена x^2-2x-1 отримати за скінченну кількість кроків многочлен $2x^2-1$?

Відповідь: можна.

Розв'язання. Покажемо потрібні кроки:

$$x^2-2x-1\xrightarrow{(1)}-x^2-2x+1\xrightarrow{(d=-1)}-x^2+2\xrightarrow{(1)}2x^2-1.$$

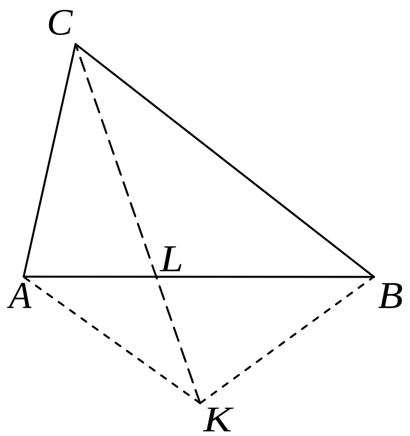

Рис. 1

3. Бісектриса CL трикутника ABC дорівнює стороні AC. На промені CL вибрана така точка K, для якої $\angle CAL+\angle CAK=180°$. Доведіть, що $CK=CB$.

Розв'язання. Оскільки ΔCAL рівнобедрений (рис. 2), то $\angle CAL=\angle CLA$. Звідси $\angle CAK=\angle CLB$, $\angle LCA=\angle BCL$ (бо CL – бісектриса) та $CA=CL$, то $\Delta CAK=\Delta CLB$ з стороною та двома прилеглими кутами. Звідси й випливає, що $CK=CB$.

4.1. Нехай D – середина сторони BC ΔABC. Точки E та F вибрані відповідно на сторонах AC та AB таким чином, щоб $DE=DF$ та $\angle BAC=\angle EDF$. Доведіть, що $DE\geq\frac{1}{4}(AB+AC)$.

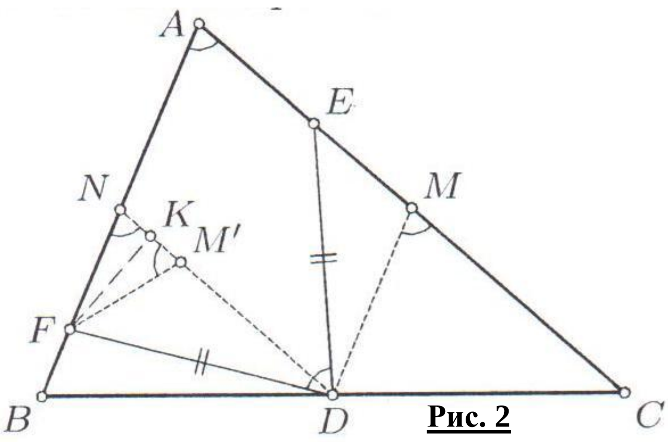

Рис. 2

Розв'язання. Без обмеження загальності вважаємо, що $AB\leq AC$. Нехай M, N – середини сторін AC, AB відповідно, точка $M'\in DN$ така, що $DM'=DM$. Звідти випливає, що $\angle M'DF=\angle MDE$, $\angle M'DF=\angle MDE$ (бо $\angle NDM=\angle BAC=\angle EDF$), тому $\Delta DME=\Delta DFM'$, тоді

$$\angle FM'N=180°-\angle DM'F=180°-\angle DME=\angle BAC=\angle FNM',$$

звідки випливає, що $\Delta FM'N$ – рівнобедрений. Середина K відрізку $M'N$ – основа перпендикуляра з F на $M'N$, тому $DF\geq DK=\frac{1}{2}(DM'+DN)=\frac{1}{4}(AB+AC)$.

4.2. Чи можна виготовити прямокутну коробкою з дном площею не більше 16 клітин, на дні якої без накладань можна помістити два тістечка у формі хреста, що складається з 5 клітин?

Відповідь: так.

Розв'язання. Приклад наведений на рис. 3. Якщо обчислити площу цього прямокутника, то вийде, що вона дорівнює рівно 16.

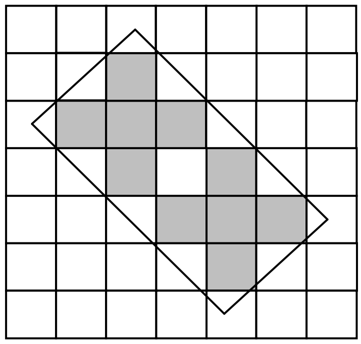

Рис. 3

5. Є граф G, у якого з кожної вершини виходять принаймні $2m-1$ ребро. Доведіть, що множину його вершин можна поділити на дві підмножини A та B таким чином, щоб з кожної вершини підмножини A виходить мінімум m ребер до вершин підмножини B та з кожної вершини підмножини B виходить мінімум m ребер до вершин підмножини A.

Розв'язання. Розглянемо усі можливі поділи множини на дві підмножини $A \bigcup B$, що попарно не перетинаються. Серед таких поділів виберемо таке, у якого найбільша кількість ребер, що мають кінцями вершини з різних підмножин. Якщо таких поділів декілька, то виберемо будь-яке з них. Покажемо, що це розбиття задовольняє умови задачі. Якщо це не так, то розглянемо довільну вершину $x \in A$, яка порушує умову задачі, тобто з x виходить менше ніж m ребер до вершин підмножини B. Але тоді з вершини x до вершин з множини A виходить не менше m ребер. Тобі розглянемо розбиття на такі множини $A_1 = A \setminus \{x\}$ та $B_1 = B \bigcup \{x\}$. Тоді очевидно, що ребер, що мають кінці у вершинах різних множин A_1, B_1, більше ніж то було для множин A, B. Одержана суперечність завершує доведення.

6.1. Наташа та Маша обирають додатне ціле число k і потім грають у гру на таблиці 9×9. Наташа на своєму ході обирає одну порожню клітинку і записує туди 0. Маша на своєму ході записує 1 у порожню клітинку. Розпочинає Наташа, при цьому після кожного її ходу йдуть k ходів Маші. Якщо у кожному рядку та стовпчику у деякий момент гри сума чисел стає непарною, Маша виграє. Якщо дівчата повністю заповнили таблицю (і Маша за цей час не виграла), то виграє Наташа. Знайдіть найменше k таке, що у Маші є виграшна стратегія.

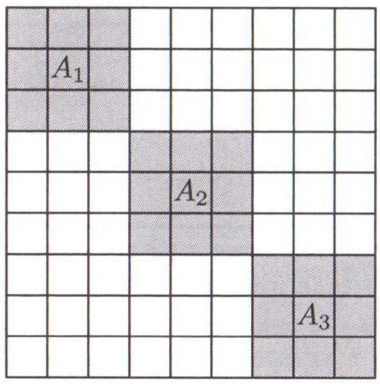

Рис. 4

Відповідь: Найменше k, при якому Маша виграє, це $k=3$.

Розв'язання. Покажемо спочатку, що Маша виграє при $k=3$. Розглянемо квадрати 3×3 A_1, A_2 та A_3 (Рис. 4). Назвемо квадрат 3×3 *покритим*, якщо у кожному його рядку та стовпці присутня рівно одна 1. Якщо Маша покриває квадрати A_1, A_2 та A_3 не записуючи нічого у інші клітини, вона виграє, тому що сума у всіх рядках та стовпчиках непарна.

Очевидно, що якщо щонайбільше один 0 (і жодної 1) записані у будь-якому квадраті 3×3 після кроку Наташі, то Маша може покрити цей квадрат, тому що $k=3$. У Маші така стратегія: якщо Наташа записує 0 у будь-яких непокритий квадрат A_1, A_2 або A_3, то Маша зразу покриває його. У протилежному випадку Маша покриває будь-який непокритий квадрат 3×3. Таким чином, Маша виграє після трьох серій своїх ходів.

Покажемо, що у Наташі є виграшна стратегія для $k\in\{1, 2\}$. Зрозуміємо, що якщо у Маші є виграшний хід, лише 8 рядків та 8 стовпчиків мають непарну суму перед ходом Маші, і її виграшний хід – це написати 1 на перетині єдиного «парного» рядка з єдиним «парним» стовпчиком. Це означає, що якщо у Маші є виграшний хід, від єдиний.

Тепер очевидно, що Наташа виграє при $k=1$. Якщо у Маші є виграшний хід після її ходу, Наташа записує 0 у цю клітину і Маша втрачає свій єдиний шанс виграти. У протилежному випадку Наташа записує 0 у будь-яку порожню клітину. Цей хід не змінює жодну суму у рядках та

стовпчиках і у Маші не з'явиться виграшний хід. Ця стратегія дозволяє Наташі заповнити усю таблицю не надаючи Маші можливості виграти.
У випадку $k=2$ Наташа буде використовувати таку саму стратегію, як при $k=1$. Ця стратегія не дає Маші шансу виграти на її першому кроці. На другому кроці Маша не може виграти, тому що після кожного другого кроку таблиця містить парне число одиниць, що виключає можливість, що у кожному з (непарне число) дев'яти рядків буде непарне число одиниць.

6.2. В країні є 2019 міст, при цьому попарні відстані між цими містами усі різні. З кожного міста відправляється посланець, що їде місто, що є найближчим до його міста. Доведіть, що принаймні в одне місто не прибуде жодний посланець.

Розв'язання. Розглянемо два міста, що розташовані на найменший відстані, позначимо їх А та Б. Очевидно, що посланець з міста А рушить в місто Б та навпаки. Якщо ще хоч один посланець прибуде в місто А чи Б, то за принципом Діріхле буде принаймні одне місто, в яке не прибуде жодний посланець. Інакше, просто виключаємо ці два міста з розгляду і в нас лишиться аналогічна ситуація з 2017 містами. Продовжимо ці міркування, поки не лишиться 1 місто, в яке не прибуде жодний посланець.

7. Нехай p – просте число, $n \ge p-1$ – натуральне. Доведіть, що якщо $np+1$ – точний квадрат цілого числа, то $n+1$ можна подати у вигляді суми рівно p квадратів натуральних чисел.

Розв'язання. Нехай $np+1=a^2$, тоді $np=(a-1)(a+1)$.
Випадок 1. $p \mid a-1$, то $a=kp+1$ для деякого натурального k. Тоді $1+np=(kp+1)^2 \Rightarrow n=k^2p+2k$ та $n+1=k^2p+2k+1=k^2+2k+1+(p-1)k^2=(k+1)^2+(p-1)k^2$. Оскільки $a>1$, тому $k>0$, звідки усі доданки у правій частині натуральні і твердження доведене.
Випадок 2. $p \mid a+1$, то $a=kp-1$ для деякого натурального k. Аналогічно попередньому отримаємо, що $n+1=(k-1)^2+(p-1)k^2$. Якщо $k \ge 2$ – твердження доведене. Якщо $k=1$, то $n+1=p-1$ та $n=p-2<p-1$ – суперечність.

8. Розвяжіть в натуральних числах рівняння: $2019^x+4^x=x^{2018}$.

Відповідь: розв'язків немає.
Розв'язання. Останні цифри першого доданку лівої частини 9, при непарному x, та 1 – при парному x. Аналогічно, для другого доданку остання цифра 4 або 6, таким чином ліва частина має останньою цифрою 3 при непарному x та 7 при парному x. Зрозуміло, що квадрат натурального числа не може закінчуватися на жодну з цих цифр.

9. У кімнаті знаходиться n дітей, у кожного з яких є принаймні 1 цукерка. Далі в раундах 1, 2 і так далі відбувається додавання цукерок та їхній перерозподіл відповідно до такого правила: якщо в раунді k у дитини кількість цукерок взаємно проста з k, то він отримує додаткову цукерку. Покажіть, що після достатньо великої кількості раундів, у дітей буде не більше двох різних варіантів кількості цукерок.

Розв'язання. Якщо у раунді k дитина має $k-1$ чи $k+1$ цукерку, то він отримує додаткову цукерку. І це продовжується кожного наступного раунду.
Тепер розглянемо деяку дитину та її різницю між кількістю цукерок та раундом. Якщо на початку у дитини була 1 цукерка, то далі в нього стане 2, а далі вже стане у кожному раунді $k-1$ цукерка. Для усіх інших різниця кількості цукерок та раунду додатна. У кожному раунді вона або не змінюється, або зменшується на 1. Якщо різниця дорівнює $d>1$, то за принаймні d раундів

вона зменшиться на 1. Дійсно, якщо маємо раунд k, а цукерок $k+d$, то нехай $k \equiv l \pmod{d}$. Якщо $l=0$, то вони мають спільний дільник d. Інакше в раунді $k+d-l$ настане момент, коли вони будуть кратні d. Таким чином усі ці діти в певний момент будуть мати рівно по $k+1$ цукерці, що й треба було довести.

10.1. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого кількість нулів, яким закінчується число $(n+10)!$ на 2018 більше за кількість нулів, яким закінчується число $n!$.

<u>Відповідь</u>: $n = 5^{2017} - 10$.

<u>Розв’язання</u>. З умови задачі випливає, що добуток $(n+1)(n+2)\ldots(n+10)$ має ділитися на 5^{2018}. Серед цих множників рівно два діляться на 5, при цьому принаймні один з них не ділиться навіть на $5^2 = 25$. Таким чином другий має ділитися на 5^{2017}. Таким чином $n \ge 5^{2017} - 10$. А тепер легко бачити, що для числа $n = 5^{2017} - 10$ вказана умови виконується, тому воно є шуканим.

10.2. Знайдіть усі натуральні $n \ge 2$, для яких існує таке його подання $n = a^2 + b^2$, де a – найменшийц дільник n відмінний від 1, b – довільний дільник n.

<u>Відповідь</u>: $n=8$ та $n=20$.

<u>Розв’язання</u>. Очевидно, що якщо n – непарне, то a, b – непарні, тому n – парне – суперечність. Таким чином n – парне, то $a=2$ і b – парне. Звідси $4 = n - b^2 \,\vdots\, b$. Таким чином $b \in \{2;\ 4\}$ $\Rightarrow$ $n=8$ та $n=20$.

<u>Середня ліга</u>

1. Задача 1 молодшої ліги.

2. Нехай дійсне число $x \in (0;1)$ має подання у вигляді десяткового дробу $0,c_1c_2c_3\ldots$, позначимо через $B(x)$ множину усіх підпослідовностей послідовності цифр (c_n), що містять рівно 6 послідовних цифр. Наприклад, $\frac{1}{22} = 0{,}0454545\ldots$, тоді $B(\frac{1}{22})$ складається з трьох елементів: 045454, 454545 та 545454. Знайдіть найменшу можливу кількість елементів множини $B(x)$ для усіх ірраціональних чисел проміжку $(0;1)$.

<u>Відповідь</u>: 7.

<u>Розв’язання</u>. Покажемо, що шукане число – це 7. Спочатку покажемо, що відповідне ірраціональне число існує. Число будується таким чином. В десятковому розкладі цифри 1 стоять окремо, після k-ї цифри 1 йде $k+4$ цифри 0. Нижче зображений початок цього розкладу:

$$x = 0,\ 100000\ 1000000\ 10000000\ 100000000\ldots$$

Тоді неважко збагнути, що $B(x)$ складається рівно з 7 елементів:

$$000000,\ 000001,\ 000010,\ 000100,\ 001000,\ 010000 \text{ та } 100000.$$

Позначимо через $B_k(y)$ – сукупність елементів, довжики k (в умові йдеться про 6), і покажемо, що кількість елементів не більше від k, то це число раціональне. Доведемо це ММІ по k. Для $k=1$ – все очевидно. Припустимо, що деякого k все доведене. Покажемо, для $k+1$.
Кожна підпослідовність довжини $k+1$ розпочинається з послідовності довжини k. Таким чином кожна підпослідовність довжини k має відповідати принаймні одній підпослідовності довжини

$k+1$. Таким чином $B_k(y)$ має не більше елементів ніж $B_{k+1}(y)$. Тепер для заданого y будемо вивчати можливу кількість елементів $B_k(y)$ та $B_{k+1}(y)$. Якщо $B_k(y)$ містить не більше k елементів, то з припущення індукції воно є раціональним. Таким чином залишається розглянути випадок, коли обидві ці множини містять по $k+1$ елементу. Але внаслідок бієкції між елементами цих множин, то означає, що у кожній послідовності з $(k+1)$-го елемента останній член цієї послідовності визначається першими k елементами. Це означає, що існують $i<j$, для яких однакова група цифр після i-ї співпадає з групою цифр після j-ї. але тоді наступні цифри після тих груп мають співпадати, бо $(k+1)$-ша цифра визначається попередніми k, як висновок – число періодичне, починаючи з деякого місця, а тому раціональне.

3. Нехай вписане в трикутник ABC коло дотикається до його сторін BC, AC та AB у точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Позначимо через I, O – центри вписаного та описаного кіл ΔABC, H_1 – ортоцентр $\Delta A_1B_1C_1$. Доведіть, що точки I, O та H_1 колінеарні.

Розв'язання. Нехай A_1A_2, B_1B_2 та C_1C_2 – висоти $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 4). Добре відомо, що $\Delta A_1B_1C_1$ – гострокутний, чиї висоти є бісектрисами педального $\Delta A_2B_2C_2$. Таким чином точка H_1– інцентр $\Delta A_2B_2C_2$. Тоді

$$\angle AC_1A_2 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle A = \tfrac{1}{2}\angle B + \tfrac{1}{2}\angle C,$$

$$\angle C_1A_2B_2 = \angle C_1A_1B_1 = 180^\circ - \angle C_1A_1B - \angle B_1A_1C =$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle B) - (90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle C) = \tfrac{1}{2}\angle B + \tfrac{1}{2}\angle C.$$

Звідси випливає, що $A_2B_2 \parallel AB$, з аналогічних паралельностей випливає, що $\Delta A_2B_2C_2$ та ΔABC гомотетичні. Тому пари точок O, I та O_1, H_1 також гомотетичні, де O_1 – центр описаного кола навколо трикутника $A_2B_2C_2$, а отже на одній прямій. Помітимо, що O_1 центр кола дев'яти точок для трикутника $A_1B_1C_1$. Отже достатньо довести, що O_1, I та H_1 на одній прямій, що рівносильне тому, щоб довести, що центр кола дев'яти точок, центр описаного кола та ортоцентр лежать на одній прямій (якщо подивитись на трикутник $A_1B_1C_1$), що є загально відомим фактом, бо центр кола дев'яти точок лежить на прямій Ейлера.

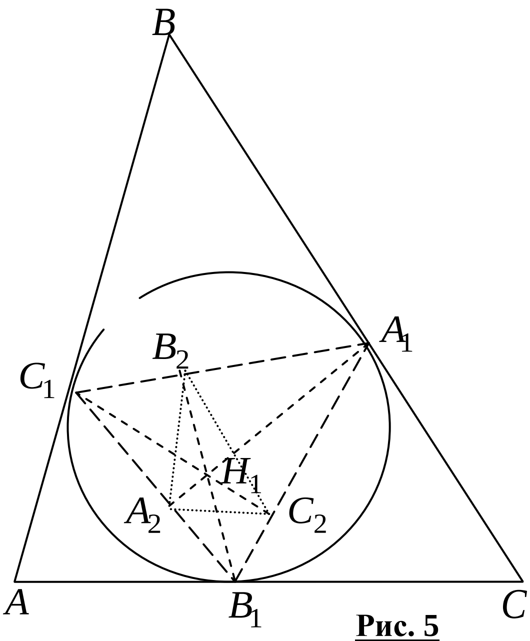

Рис. 5

4. Задача 4.1 молодшої ліги.

5. Задача 5 молодшої ліги.

1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3

Рис. 6

6. Є фігура *принц* на шахівниці 6×6. Він може зробити 1 стрибок по вертикалі чи по горизонталі, довжини стрибків складають по черзі 1 та 2 клітинки, і перший хід має довжину 1. Чи можна знайти таке початкове поле, починаючи з якого принц зможе обійти усі поля шахівниці побувавши на кожному полі рівно один раз?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Припустимо, що так апослідовність ходів існує. Розглянемо таку нумерацію полів шахівниці (рис. 6). Стрибок на 1 переводить принца з парної клітинки на непарну та навпаки. Стрибок на 2 зберігає парність клітини, де був принц. Припустимо, що шукана послідовність ходів існує, позначимо клітини, на яких він був послідовно через P_1, P_2, …, P_{36}. Тоді серед полів P_2, P_3, P_4 та P_5 кожне з чисел $1, 2, 3, 4$ зустрічається рівно один раз, бо перші два однакової парності, два наступні – іншої. Це справджується для будь-якої четвірки ходів P_{4k+2}, P_{4k+3}, P_{4k+4} та P_{4k+5} $\forall k = \overline{0,\ 7}$. Таким чином між P_2 та P_{33} кожне з чисел $1, 2, 3, 4$ зустрічаються рівно по 8 разів. На дошці число 4 має рівно 8 входжень, тому серед полів P_1, P_2, P_{35} та P_{36} немає цих чисел. Оскільки хід $P_{34} \to P_{35}$ довжиною 2, то ці поля мають однакову парність, таким чином вони непарні, бо там не може бути числа 4. Таким чином P_{36} має бути парним, так, як і число P_1, тому обидва цих числа мають номери 2. Таким чином розпочати можна було б лише з поля, що позначене числом 2. Але, якщо пофарбувати іншим чином дошку, то матимемо аналогічні оцінки (рис. 7), і відповідно так само розпочати можна було б з полів за номером 2. Але серед цих полів немає перетинів, тому шуканої комбінації ходів не існує.

1	**2**	3	4	1	**2**
2	3	4	1	**2**	3
3	4	1	**2**	3	4
4	1	**2**	3	4	1
1	**2**	3	4	1	**2**
2	3	4	1	**2**	3

Рис. 7

2	3	4	1	**2**	3
1	**2**	3	4	1	**2**
4	1	**2**	3	4	1
3	4	1	**2**	3	4
2	3	4	1	**2**	3
1	**2**	3	4	1	**2**

7. Визначіть усі прості p, для яких вираз $2p^2 - 3p - 1$ є кубом натурального числа.

Відповідь: $p = 2$ та $p = 3$.

Розв'язання. Нехай для деякого натурального n справджується рівність: $2p^2 - 3p - 1 = n^3$. Тоді $n^3 = 2p^2 - 3p - 1 < 2p^2 \le p^3 \Rightarrow n + 1 \le p$.

Розглянемо спочатку випадок $p = n + 1 \Rightarrow n^3 - 2n^2 - n + 2 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-1)(n+1) = 0$. Таким чином умову задовольняють прості числа $p = 2$ та $p = 3$.

Нехай тепер $p > n + 1$. Тоді

$$2p^2 - 3p = p(2p - 3) = n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1).$$

Оскільки p – просте та більше $n+1$, тому $p \mid n^2 - n + 1$. Таким чином $n^2 - n + 1 = kp$ і матимемо, що $2p - 3 = (n+1)k \Rightarrow k$ – непарне. Підставимо $p = \frac{1}{2}(k(n+1) + 3)$ в рівність $n^2 - n + 1 = kp$:

$$2n^2 - (k^2 + 2)n - (k^2 + 3k - 2) = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно натурального n, тому дискримінант цього рівняння має бути точним квадратом цілого числа:

$$(k^2 + 2)^2 + 4 \cdot 2(k^2 + 3k - 2) = k^4 + 12k^2 + 24k - 12 \text{ –}$$

точний квадрат. Для $k \ge 9$ легко отримуємо, що

$$(k^2 + 6)^2 < k^4 + 12k^2 + 24k - 12 < (k^2 + 7)^2,$$

що означає, що це число не може бути точним квадратом. Залишається перебрати інші k, про які ми пам'ятаємо, що воно непарне. Перевіркою отримуємо, що $k^4 + 12k^2 + 24k - 12$ – точний квадрат лише для $k = 1$, але тоді розв'язавши квадратне рівняння $2n^2 - (k^2 + 2)n - (k^2 + 3k - 2) = 0$ отримаємо, що $n = 2$ та як наслідок $p = 3$.

8. Аліса та Боб визначають число, що містить 2018 цифр, вибираючи цифри зліва направо. Аліса починає першою та кожну цифру вибирають по черзі. Вони мають дотримуватися правила, що кожна наступна цифра має відрізнятися від попередньої за модулем 3. Останнім ходом, якщо Боб досягне того, що одержане 2018-цифрове число кратне 3, то він вважається переможцем. Інакше перемагає Аліса, хто переможе за правильної гри обох гравців?

Відповідь: перемагає Аліса.

Розв'язання. Зрозуміло, що можна обмежитися лише цифрами $1, 2, 3$. Розглянемо 4 останніх ходи гравців – два Аліси та два Боба. Аліса передостаннім ходом робить так, щоб сума 2015 виставлених цифр не була кратна 3. Це вона завжди зможе зробити, бо в неї є два варіанти вибору цифри, що не кратна 3. Після наступного ходу Боба сума цифр стане рівною $z \in \{1, 2, 3\}$ за модулем 3. Але при цьому Боб не міг поставити цифру z. Тоді Аліса ставить цифру z своїм останнім ходом і сума 2017 цифр стане рівною $2z \equiv -z \pmod 3$. Таким чином Боб, щоб виграти має поставити цифру z, але за правилами не має права цього зробити. Тому перемагає Аліса.

9. Для яких цифр z має місце властивість: для довільного натурального k існує натуральне число n таке, що число n^9 закінчується щонайменше на k цифр z?

Відповідь: $z \in \{0, 1, 3, 7, 9\}$.

Розв'язання. Випадок $z = 0$ – очевидний. Якщо z – парне та ненульове, то n – парне, тому n^9 має ділитися принаймні на 2^9, але таку умову не задовольняють такі набори цифр: 22, 444, 666 та 8888. Аналогічні міркування з цифрою 5 показують, що число, що закінчується на 55 не ділиться на 5^9.

Нехай тепер $z \in \{1, 3, 7, 9\}$, розглянемо число $b = \underbrace{zz\ldots z}_{k}$, тоді $(z, \varphi(10^k)) = (z, 4 \cdot 10^{k-1}) = 1$, тоді з відомої властивості існують такі цілі числа x, y, що задовольняють рівності: $zx + \varphi(10^k)y = 1$. Покажемо, що шукане значення $n = b^x$. Оскільки $(b, 10^k) = 1$, то з теореми Ейлера $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, якщо $(a, m) = 1$:

$$(b^x)^9 = b^{9x} \equiv b^{9x + \varphi(10^k)y} = b^1 = b \pmod{10^k},$$

що й треба було показати.

10. Знайдіть найменше значення ε, для якого справджується умова: якщо T – гострокутний трикутник з кутами α, β, γ, то існує рівнобедрений чи прямокутний трикутник з кутами α', β', γ', для якого

$$|\alpha - \alpha'| \le \varepsilon, \ |\beta - \beta'| \le \varepsilon, \ |\gamma - \gamma'| \le \varepsilon.$$

Відповідь: $\varepsilon = 10^\circ$.

Розв'язання. Нехай кути записані таким чином $\alpha < \beta < \gamma$, і число ε максимальне з таких, що якщо змінити будь-які з кутів на ε ми не отримаємо ні рівнобедрений, ні прямокутний трикутник. Таким чином мають виконуватися такі нерівності:

$$\gamma < 90^\circ - \varepsilon, \ \beta - \alpha > 2\varepsilon, \ \gamma - \beta > 2\varepsilon.$$

Але тоді можемо записати такі нерівності:

$$\beta < \gamma - 2\varepsilon < 90^\circ - 3\varepsilon, \ \alpha < \beta - 2\varepsilon < 90^\circ - 5\varepsilon \Rightarrow$$

$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma < 90^\circ - \varepsilon + 90^\circ - 3\varepsilon + 90^\circ - 5\varepsilon = 270^\circ - 9\varepsilon \Rightarrow 9\varepsilon < 90^\circ \text{ та } \varepsilon < 10^\circ.$$

Покажемо, що шукане значення $\varepsilon = 10^\circ$. Достатньо розглянути трикутник з кутами $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$ та $\gamma = 80^\circ$. Неважко зрозуміти, що для отримання рівнобедреного трикутника слід змінити кути на 10°, так само і для прямокутного трикутника треба змінити більший кут на 10°.

Старша ліга

1.1. Про многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами відомо, що існує нескінченно багато пар різних цілих чисел (x, y) таких, що $P(x)+P(y)=2P(\frac{x+y}{2})$. Доведіть, що графік $P(x)$ має центр симетрії.

Розв'язання. Доведемо, що за умови задачі множина значень, які може приймати $\frac{x+y}{2}$ є обмеженою. Покладемо $z=\frac{x+y}{2}, t=\frac{x-y}{2}$. Тоді рівність з умови матиме вигляд $2P(z)=P(z+t)+P(z-t)$. Спробуємо зрозуміти, що відбудеться, якщо у цій рівності розкрити дужки.
Нехай $P(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0, a_n\neq 0$. Згрупуємо у $P(z+t)$ коефіцієнти при степенях змінної t, тобто перепишемо $P(z+t)$ у вигляді $P(z+t)=P_0(z)+P_1(z)t+P_1(z)t^2+\cdots+P_n(z)t^n$, де $P_i(z)$ - многочлен від змінної z для кожного i від 0 до n. Звернемо увагу на декілька очевидних властивостей цих многочленів. А саме, $P_0(z)=P(z)$ та для кожного i від 0 до n $\deg P_i=n-i$, *а* старший коефіцієнт $P_i(z)$ має той самий знак, що й a_n (справді, старший моном $P_i(z)$ з'являється при розкритті дужок у виразі $a_n(z+t)^n$). Замінивши t на $-t$ отримає мо:

$$P(z-t)=P(z)-P_1(z)t+P_1(z)t^2-\cdots+(-1)^nP_n(z)t^n.$$

Тоді

$$P(z+t)+P(z-t)-2P(z)=P_2(z)t^2+P_4(z)t^4+\cdots+P_{2\left[\frac{n}{2}\right]}(z)t^{2\left[\frac{n}{2}\right]}. \qquad (1)$$

Нагадаємо, що для довільного многочлена $F(x)$ з дійсними коефіцієнтами знак $F(x)$ при $x\to-\infty$ та при $x\to+\infty$ залежить лише від знаку старшого коефіцієнта $F(x)$ та парності $\deg F(x)$. А тоді, оскільки усі многочлени від змінної z у правій частині останньої рівності мають степені однакової парності та старші коефіцієнти одного знаку, існує таке $M>0$, що для довільного $z, |z|>M$, та довільного $t\neq 0$ усі доданки у правій частині рівності (1) будуть одного знаку. Тобто за умови $|z|>M$ для довільного $t\neq 0$ $P(z+t)+P(z-t)-2P(z)\neq 0$. Отже, якщо $2P(z)=P(z+t)+P(z-t)$, то $|z|\leq M$. Тож якщо $P(x)+P(y)=2P(\frac{x+y}{2})$, то $\left|\frac{x+y}{2}\right|\leq M$. Оскільки відрізок $[-M, M]$ містить лише скінченну кількість цілих або напівцілих чисел, то існує таке число z_0, що для нескінченної кількості пар різних цілих чисел (x, y), які задовольняють рівність з умови, $\frac{x+y}{2}=z_0$. Тобто існує нескінченно багато цілих x таких, що $P(x)+P(2z_0-x)=2P(z_0)$. У обох частинах цієї рівності записані многочлени від змінної x та рівність виконана у нескінченній кількості точок, а тому вона є справедливою для довільного дійсного x. Але тоді точка $(z_0, P(z_0))$ є центром симетрії графіка $P(x)$.

Зауваження. З формули Тейлора випливає, що $P_i(z)=\frac{P^{(i)}(z)}{i!}$, *де* $P^{(i)}(z)$ *позначає i-ту похідну многочлена P у точці* z.

1.2. Задача 1 молодшої ліги.

2. Задача № 2 () середня ліга

3.1. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписаний в коло. Прямі AD та BC перетинаються в точці E. Точки M, N вибрані на сторонах AD, BC відповідно таким чином, щоб $AM:MD=BN:NC$. Описані коло ΔEMN та чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точках X, Y. Доведіть, що прямі AB, CD та XY перетинаються в одній точці або паралельні.

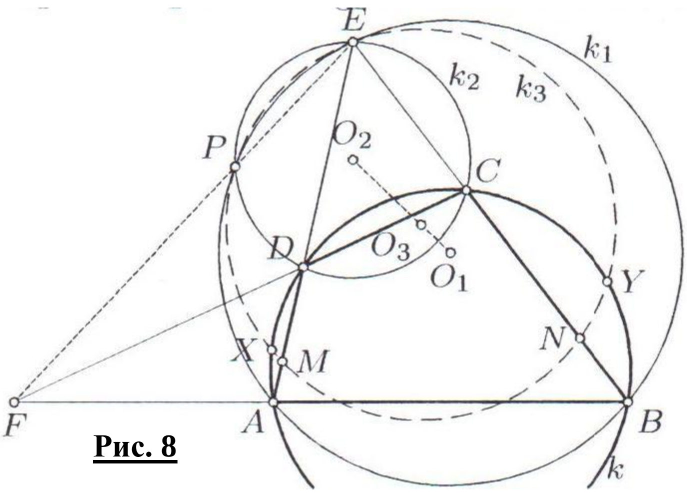

Рис. 8

Розв'язання. Якщо $AB \| CD$, то твердження очевидне. Точки X, Y симетричні відносно серединного перпендикуляра до відрізків AB і CD. Звідки зрозуміло, що $AB \| CD \| XY$.

Нехай тепер AB та CD не паралельні (рис. 8). Позначимо через k_1 та k_2 описані кола ΔEAB та ΔECD перетинаються вдруге в точці $P \neq E$. Тоді маємо такі рівності кутів:

$$\angle PAD = \angle PBE,\ \angle PDA = 180° - \angle PDE = 180° - \angle PCE = \angle PCB.$$

Тому $\Delta PAD \sim \Delta PBC$, крім того точка $M \in \Delta PAD$ відповідає при цій подібності точці $N \in \Delta PBC$, тому $\angle PME = \angle PNE$. Таким чином точки E, P, M, N лежать на одному колі, яке позначимо через k_3. Оскільки $FA \cdot FB = FC \cdot FD$, то F має однаковий степінь відносно кіл k_1, k_2 та кола k, що описане навколо $ABCD$. Тому вона лежить на радикальній осі EP кіл k_1, k_2. Оскільки $FA \cdot FB = FE \cdot FP$, то F лежить на радикальній осі кіл k_1, k_3, тобто на лінії XY.

3.2. Задача 3 середньої ліги.

4. Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Пярма l ділить $\angle AOB$ навпіл. Через (a, b, c) позначатимемо невироджений трикутник, що утворений цими трьома прямими. Доведіть, що описагі кола трикутників $\Delta_1 = (l, AB, CD)$ та $\Delta_2 = (l, AD, BC)$ дотикаються.

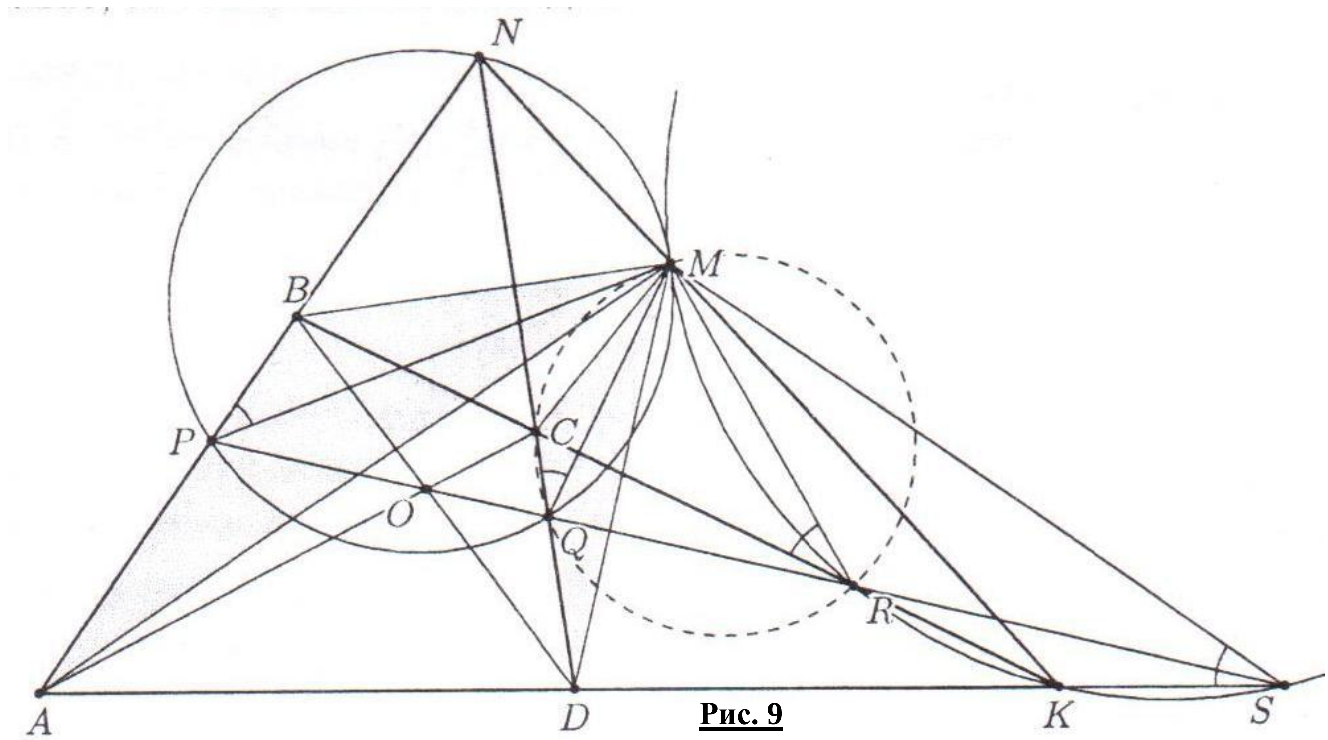

Рис. 9

Розв'язання. Нехай пряма l перетинає відрізки AB та CD у точках P та Q відповідно, а прямі BC та AD у точках R та S (рис. 9). Далі позначимо точки перетину прямих таким чином: $AB \cap CD = N$, $AD \cap BC = K$, тоді $\Delta_1 = PQN$, $\Delta_2 = RSK$.

Нехай M – точка Мікеля прямих AB, BC, CD та DA. Оскільки з відомих фактів з вписаності чотирикутника $ABCD$ $M \in NK$ і ця точка є центром поворотної гомотетії, що перетворює $\Delta ABM \to \Delta DCM$. Оскільки $\frac{AP}{BP} = \frac{AO}{BO} = \frac{DO}{CO} = \frac{DQ}{CQ}$, то точки P та Q є відповідними точками цих подібних трикутників, що дає рівність $\angle MPB = \angle MQC$, тому точки P, Q, M, N лежать на одному колі, яке ми позначимо через w_1. Звідси точки R, S, M, K лежать на іншому колі, яке ми позначимо через w_2, бо точка M є точкою Мікеля прямих AB, DC, PQ, DA. Залишається показати, що ці кола дотикаються.

Точки C, Q, M, R лежать на одному колі, бо точка M є точкою Мікеля прямих AD, BC, PQ, DC, оскільки $M \in \omega_{DQS} \cap \omega_{DCK}$. Позначимо через $\alpha = \angle MPN$. Якщо до кола w_1 провести дотичну у точці M, то кут між цією та прямою NK дорівнює α. А якщо провести дотичну до кола w_2 у точці M, то кут між нею та прямою NK також дорівнює α, оскільки:

$$\angle MPN = \angle MQC = \angle MRC = \angle MSK,$$

звідки ці дотичні співпадають, що й треба було довести.

5. На дошці записані декілька натуральних чисел. Визначимо такі операції:

- Кожні два сусідні числа, наприклад, n та $n+1$, можна витерти та записати замість них число $n-2$.
- Кожні два числа, що відрізняються на 4, наприклад, n та $n+4$, можна витерти та записати замість них число $n-1$.

В обох випадках можуть записуватись цілі числа, які не обов'язково є натуральними. Якщо ми не можемо застосувати жодну з двох операцій, процес завершується. Знайдіть найбільше можливе ціле c для якого справджується така властивість: які б натуральні числа не були записані на початку та який процес до них не застосували б, на дошці усі числа залишаться більшими або рівними c.

<u>Відповідь</u>: $c = -3$.

<u>Розв'язання</u>. Спочатку покажемо, що є набір натуральних чисел, після певного процесу які призводять до появи числа (-3). Для початкових чисел $1, 2, 3, 4, 5$ маємо такий процес:

$$1, 2, 3, 4, 5 \xrightarrow[2,\,3]{(1)} 0, 1, 4, 5 \xrightarrow[4,\,5]{(1)} 0, 1, 2 \xrightarrow[1,\,2]{(1)} -1, 0 \xrightarrow[-1,\,0]{(1)} -3.$$

Покажемо, що при довільних початкових натуральних числах отримати число менше від (-3) не можливо. Нехай w – дійсний корінь многочлена $P(x) = x^3 + x^2 - 1$. Тоді $w^3 + w^2 = 1 \Rightarrow$

$$w^{n+1} + w^n = w^{n-2}. \qquad \textbf{(1)}$$

Оскільки

$$Q(x) = x^5 + x - 1 = (x^2 - x + 1)P(x) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1),$$

тому $Q(w) = w^5 + w - 1 = 0 \Rightarrow$

$$w^{n+4} + w^n = w^{n-1}. \qquad \textbf{(2)}$$

Тепер ми бачимо, що якщо розглянути записані числа як степені числа w, то їхня сума не змінюється. Наприклад, перехід від $1, 2, 3, 4, 5 \xrightarrow[2,\,3]{(1)} 0, 1, 4, 5$, тобто $2, 3 \to 0$ відповідає рівності $w^3 + w^2 = w^0$. З рівності

$$w^{k_1} + w^{k_2} + \ldots + w^{k_l} < w^1 + w^2 + w^3 + \ldots = \tfrac{w}{w^5} = \tfrac{w}{1-w} = w^{-4}$$

випливає, що найбільше можливе значення $c = -3$.

6. Задача № 6 () середня ліга.

7. Задача № 7 () середня ліга

8.1. Нехай $n > 6$ – натуральне число. Доведіть, що якщо $n+1$ – просте число, то число $[\frac{(n-1)!}{n^2+n}]$ – парне.

Розв'язання. Позначимо $p = n+1$, тоді $p \geq 7$ та $p-1$ – складене число. Запишемо його таким чином: $p-1 = ab$, $1 < a, b \leq p-2$. З теореми Вільсона випливає, що $p-1 \mid (p-2)!$. Таким чином $(p-2)! = k(p-1)$. Оскільки $p \geq 7$ множина $\{1, 2, \ldots, p-2\}$ містить принаймні два парні елементи. Нехай $ord_2(p-1) = l$, тоді множина $\{1, 2, \ldots, p-2\} \setminus \{2^l, \frac{p-1}{2^l}\}$ містить принаймні один парний елемент, то k – парне.
Оскільки $(p-1)! = k(p-1)^2 \equiv k \pmod{p}$, з теореми Вільсона $k \equiv -1 \pmod{p}$. Таким чином $k = mp-1$. Оскільки k – парне, то m – непарне. Тоді

$$\frac{(n-1)!}{n(n+1)} = \frac{(p-2)!}{p(p-1)} = \frac{(p-1)!}{p(p-1)^2} = \frac{k(p-1)^2}{p(p-1)^2} = \frac{k}{p} = \frac{mp-1}{p} = m - \frac{1}{p} \Rightarrow \left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right] = m-1$$

– парне, що й треба було довести.

8.2. Задача № 8 () середня ліга

9. Задача № 9 () середня ліга.

10. Задача № 10 () середня ліга.