"Є люди, які ніколи не помиляються,
тому вони не обтяжені жодними розумними думками!
Йоганн Гете

Математичний бій № 3

Молодша ліга

1. Для натуральних чисел $a \neq b$ порівняйте числа A та B, де

$$A = (a^{2001} + b^{2001})(a^{2002} + b^{2002})(a^{2017} + b^{2017})(a^{2018} + b^{2018}) \text{ та}$$
$$B = (a^{2008} + b^{2008})(a^{2009} + b^{2009})(a^{2010} + b^{2010})(a^{2011} + b^{2011}).$$

Відповідь: $A > B$.
Розв'язання. Доведемо, що $A > B$. Покажемо, що

$$(a^{2001+k} + b^{2001+k})(a^{2018-k} + b^{2018-k}) > (a^{2008+k} + b^{2008+k})(a^{2011-k} + b^{2011-k}) \Leftrightarrow$$
$$a^{2001+k}b^{2018-k} + a^{2018-k}b^{2001+k} > a^{2008+k}b^{2011-k} + a^{2011-k}b^{2008+k} \Leftrightarrow$$
$$a^{2001+k}b^{2011-k}(b^{2007} - a^{2007}) + a^{2011-k}b^{2001+k}(a^{2007} - b^{2007}) \Leftrightarrow$$
$$a^{2001+k}b^{2001+k}(b^{10-2k} - a^{10-2k})(a^{2007} - b^{2007}) \text{ при } k = 0{,}1.$$

Оскільки a, b – різні натуральні числа, то два останні множника одного знаку – або обидва додатні, або обидва від'ємні. Звідси остаточно й маємо, що $A > B$.

2.1. На дошці записано декілька різних цілих додатних чисел. Середнє арифметичне цих чисел дорівнює десятковому числу, дрібна чистина якого дорівнює у точності $0{,}2016$. Яке найменше можливе значення середнього арифметичного цих чисел?

Відповідь: 313.
Розв'язання. Нехай s буде сумою, n кількістю та p цілою частиною середнього арифметичного чисел на дошці. Тоді ми можемо записати таки рівності:

$$\frac{s}{n} = p + \frac{2016}{10000} = p + \frac{126}{625},$$

що дає нам $625(s - pn) = 126n$. Числа 126 та 625 взаємно прості, отже $625 \mid n$. Таким чином, $n \geq 625$.
Числа на дошці різні, отже

$$p = \frac{s}{n} - \frac{126}{625} \geq \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} - \frac{126}{625} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n} - \frac{126}{625} \geq \frac{625+1}{2} - \frac{126}{625} > 312.$$

Ціле додатне число p таким чином щонайменше 313 і значення середнього арифметичного щонайменше $313{,}2016$.
Це число можна отримати з чисел $1, 2, \ldots, 624$ та 751. Тоді маємо, що

$$\frac{1 + 2 + \ldots + 624 + 751}{625} = \frac{312 \cdot 625 + 751}{625} = 313 + \frac{126}{625} = 313{,}2016.$$

2.2. У країні Дурнів у обігу є лише монети номіналом у $1, 2, 3, \ldots, 19, 20$ і інших не існує. У Буратіно була одна монета. Він купив морозиво та отримав одну монету решти. Далі знову купив таке саме морозиво і отримав решту у три монети різного номіналу. Буратіно хотів купити третє таке саме морозиво, але грошей не вистачило. Скільки коштує морозиво?

Відповідь: 7 сольдо.
Розв'язання. Оскільки сума трьох найменших монет, що Буратіно отримав в останню решту складає щонайменше $1+2=3=6$, то морозиво коштує мінімум 7 сольдо. Якби воно коштувало мінімум 8 сольдо, то навіть маючи на початку найбільшу монет у 20 сольдо, він зміг би після двох купіль морозива отримати в решту $20-16=4$ сольдо, що суперечить описаній ситуації. Те, що морозиво могло коштувати рівно 7 сольдо легко перевіряється.

3. У трикутнику ABC проведені медіани AA_1, BB_1 та CC_1, що перетинаються в точці T. При цьому $A_1B=A_1T$. На промені CC_1 за точку C_1 вибирається точка C_2, для якої $C_1C_2=\frac{1}{3}CC_1$ і аналогічно промені BB_1 за точку B_1 вибирається точка B_2, для якої $B_1B_2=\frac{1}{3}BB_1$. Доведіть, що чотирикутник TB_2AC_2 – прямокутник.

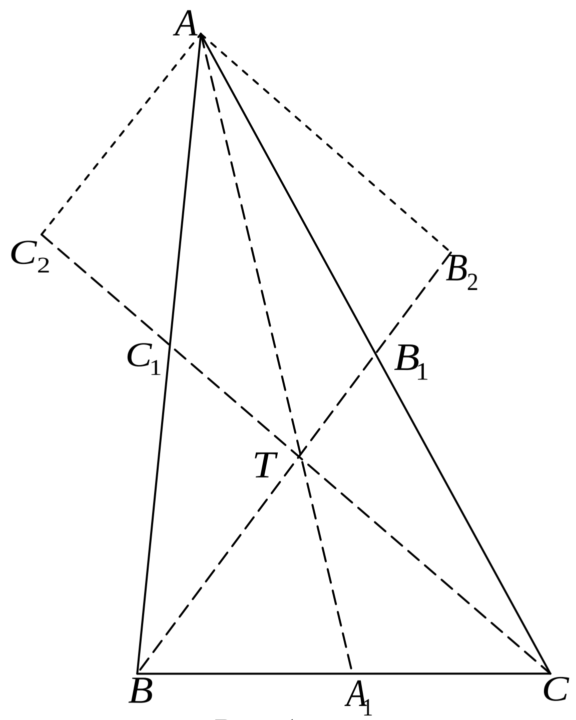

Рис. 1

Розв'язання. За умовою $BA_1=A_1T=\frac{1}{2}BC \Rightarrow A_1$ – центр описаного кола ΔBCT. Тому $\angle BTC=90^\circ=\angle B_2TC_2$ (рис. 1).
Оскільки T – центроїд ΔABC, то $TC_1=C_1C_2$ та $BC_1=C_1A$, то $BTAC_2$ – паралелограм. Тому $BT \parallel AC_2$. Аналогічно $CT \parallel AB_2$, тому TB_2AC_2 паралелограм з прямим кутом, тобто прямокутник.

4.1. Всередині трикутника ABC розташована точка P. На стороні BC обрана точка H таким чином, що бісектриса $\angle AHP$ перпендикулярна стороні BC, крім того виявилося, що $\angle ABC=\angle HPC$ та $\angle BPC=130^\circ$. Знайдіть величину $\angle BAC$.

Відповідь: 50°.
Розв'язання. Побудуємо точку Q, що симетрична точці P відносно прямої BC (рис. 2). Помітимо, що точки A, H, Q - на одній прямій, дійсно оскільки

$$\angle PHC+\frac{\angle AHP}{2}=90^\circ=\angle CHQ+\frac{\angle AHP}{2}.$$

Тоді з властивостей симетрії та з умов задачі:

$$\angle ABC=\angle HPC=\angle HQC=\angle AQC,$$

тому точки A, B, Q, C – циклічні, але тоді

$$\angle BAC=180^\circ-\angle BQC=180^\circ-\angle BPC=50^\circ.$$

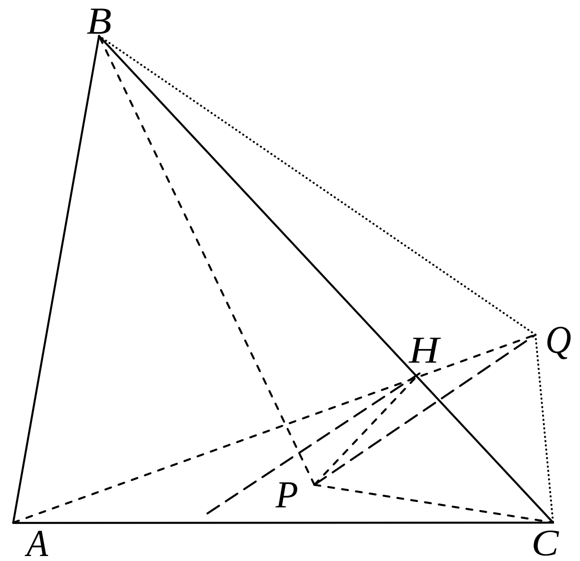

Рис. 2

4.2. У Віки є чотири фігурки, кожна з яких складається з квадратиків 1×1, при цьому кожна з фігурок є зв'язною по стороні клітинки (тобто з шахова тура може пройти між будь-якими двома клітинами фігурки). У Аліни є квадрат $n\times n$, а у Полини є квадрат $m \times m$, де $m \neq n$. Аліна і Віка можуть скласти квадрат, використовуючи усі свої п'ять фігурок. Чи може виявитися так, що Поліна і Віка також можуть скласти квадрат, використовуючи усі свої п'ять фігурок? (Квадрати складаються без накладань фігурок та без просвітів).

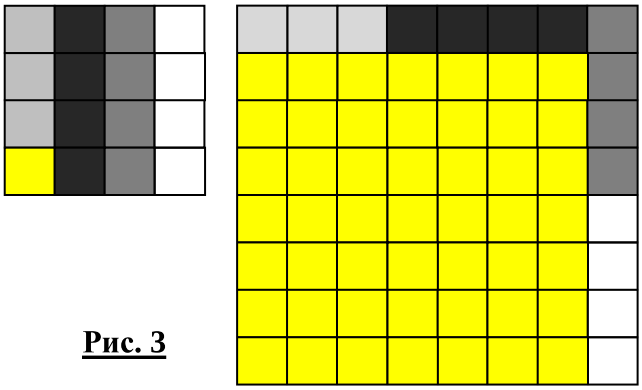

Рис. 3

Відповідь: може.
Розв'язання. Приклад показаний на рис. 3.

5. Алекс та Білл грають в таку гру – Алекс вибирає натуральне число k, що не перевищує 1000. Далі Білл вибирає набір чисел B, що складається з $n > k$ чисел з множини $\{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$, не обов'язково різних. Далі Алекс вибирає будь-які k чисел b_1, b_2, …, b_k з множини B, і проводить такі зміни – для кожного $i = \overline{1, k}$ замінюємо число b_i на $b_i + 1$, якщо $b_i < 1000$, та b_i замінюємо на 0, якщо $b_i = 1000$. Якщо після деякої кількості таких операцій усі числа в множині B стали рівними 0, то Алекс перемагає. Інакше перемагає Білл. Для яких значень k Алекс гарантовано переможе, без залежності від того яку множину вибере Білл?

Відповідь: k – число, що взаємно просте з 1001.
Розв'язання. Позначимо кількість елементів в цій множині через $|B|$. Операція складається з вибору k-елементної підмножини з B та збільшення кожного елементу на 1 з модулем 1001.

Якщо вибране k, для якого $(k, 1001) = d > 1$ та сума чисел, що обрані в множині B, дорівнює S. Порахуємо як зміниться ця сума після однієї операції: якщо серед обраних k чисел Алексом є рівно m чисел, що дорівнюють 1000, то відповідна зміна суми складає $S' = (k - m) - 1000m = k - 1001m$. Ця величина кратна $d > 1$, тому достатньо Біллу вибрати початковий набір з сумою $S \equiv 1 \pmod{1001}$, то внаслідок операцій вона ніколи не стане рівною 0, бо має бути рівною $1 \pmod{d}$.

Нехай тепер вибране k, для якого $(k, 1001) = 1$, тоді існує єдине значення $l \in \{1, 2, \ldots, 1000\}$, для якого $kl \equiv 1 \pmod{1001}$. Нехай Білл обрав довільну множину B та $b \in B$ – деякий елемент. Треба показати, як можна використати декілька операцій по додаванню $1 \pmod{1001}$ так, щоб інші елементи не змінилися. Виберемо $(k+1)$-елементну підмножину C множини B, що містить елемент b. Застосуємо операцію l разів для кожної k-елементної підмножини C. Оскільки $kl \equiv 1 \pmod{1001}$ та до кожного елементу з C в результаті буде застосовано $C_k^{k-1} \cdot l$ операцій, то кожний елемент цієї множини збільшився на $1 \pmod{1001}$. А надалі застосуємо 1000 разів цю операцію для усіх k-елементних підмножин $C \setminus \{b\}$. Тоді усі елементи окрім b зміняться на $1 + 1000 \equiv 0 \pmod{1001}$, тобто не зміняться. Таким чином усі елементи множини B можна зробити нулями за модулем 1001.

6. Алекс та Барбара грають в гру на смужці з 2018 квадратів, що пронумеровані зліва направо номерами $1, 2, \ldots, 2018$. В них є 2018 фішок, що так само пронумеровані числами $1, 2, \ldots, 2018$. Вони роблять по черзі ходи одного з таких типів:

- вибирається фішка, що ще не стоїть на смужці, і її можна поставити у будь-яку вільну від фішок комірку, якщо при цьому номери усіх виставлених фішок зліва направо розташовані у порядку зростання;
- вибирається фішка, що стоїть на смужці та її можна пересунути в сусідню комірку справа чи зліва за умови, що вона вільна та що фішка стає ближче до квадрату з номером, що рівний номеру фішки: тобто фішка з номерок 900, якщо вона розташована в квадраті з номером 1000, може зсунутися лише ліворуч, а якщо вона розташована в квадраті з номером 900 нікуди не може бути посунута.

Якщо першим ходить Алекс і виграє той, хто робить останній хід, то хто переможе в цій грі?

<u>Відповідь:</u> переможе Алекс.
<u>Розв'язання.</u> Перемагає Алекс завдяки такій стратегії. Нехай в нас поле для гри $1\times n$. Вона першим ходом ставить n в комірку з номером 1. Тепер Барбара має змогу сходити лише цією фішкою на одну комірку вправо. Надалі Алекс в комірку 1 ставить фішку 1. Знову Барбара має можливість сходити лише пересуванням фішки n на одну комірку вправо, чим звільняється комірка за номером 2. Алекс ставить в цю комірку фішку з номером 2 і так далі. Барбара зможе лише кожним ходом пересувати фішку з номером n на одну позицію праворуч, у відповідь на що, Алекс буде туди ставити чергову фішку з таким самим номером. Таким чином останній хід зробить Алекс і переможе.

7.1. Визначить усі пари натуральних чисел $(a,\, b)$, для яких a^2b ділить націло число b^2+3a.

<u>Відповідь:</u> $a=b=1$ та $a=1,\ b=3$.
<u>Розв'язання.</u> З умов задачі розуміємо, що для деякого натурального k справджується рівність: $ka^2b=b^2+3a$. Тоді $a \mid b^2$ та $b \mid 3a$. Тому цілими є такі числа: $\frac{b^2}{a}$, $\frac{3a}{b}$ та $\frac{b^2+3a}{a^2b}=\frac{b}{a^2}+\frac{3}{ab}$. Тоді цілим також є число $\frac{3a}{b}\cdot\frac{b^2+3a}{a^2b}=\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2}$. Тому цілим буде число $a(\frac{3}{a}+\frac{9}{b^2})=3+\frac{9a}{b^2}$, таким чином $b^2 \mid 9a$. Тому можемо записати, що $b^2m=9a$ та $an=b^2$, $m,\, n\in N$. Звідси $mn=9$, тому $b^2\in\{a,\, 3a,\, 9a\}$. Оскільки $a^2b \mid b^2+3a \Rightarrow ab \mid \frac{b^2}{a}+3=n+3$.

При $n=1$, то $b^2=a$ і початкова умова записується таким чином: $b^5 \mid 4b^2 \Rightarrow a=b=1$.

При $n=3$, то $b^2=3a$ і: $\frac{b^5}{9} \mid 2b^2 \Rightarrow b^3 \mid 18$ – розв'язків немає.

При $n=9$, то $b^2=9a$ і: $\frac{b^5}{81} \mid \frac{4}{3}b^2 \Rightarrow b^3 \mid 108 \Rightarrow a=1,\ b=3$.

k	k^2	k^3	k^4
0	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**
2	**4**	**8**	**7**
3	**0**	**0**	**0**
4	**7**	**1**	**4**
5	**7**	**8**	**4**
6	**0**	**0**	**0**
7	**4**	**1**	**7**
8	**1**	**8**	**1**

<u>Рис. 4</u>

7.2. Доведіть, що такі рівняння не мають розв'язків у цілих числах:

$$k^4+(k+1)^4+(k+2)^4=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2.$$

<u>Розв'язання.</u> Задачі розв'язуються за модулем 9, достатньо скласти відповідну таблицю (рис. 4). З неї випишемо усі можливі значення, які можуть приймати вирази:

$$A=k^4+(k+1)^4+(k+2)^4;\ D=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2;$$

Вони можуть дорівнювати відповідно: $A\in\{2{,}8\}$, $D\in\{0{,}3{,}5{,}6\}$.

Звідки й випливає, що рівності не можливі.

8. Знайдіть усі натуральні числа $n \geq 11$, які мають таку властивість: усі цифри числа n ненульові, а також при викреслюванні будь-якої кількості цифр числа n отримується число, що є дільником числа n.

Відповідь: 11, 12, 15, 22, 24, 33, 36, 44, 48, 55, 66, 77, 88 та 99.

Розв'язання. Доведемо спочатку, що число n може бути не більше ніж двоцифровим. Нехай $n = \overline{Abc}$, де A – не менше ніж одноцифрове число. Якщо припустити, що n задовольняє умову, то $n = 100A + 10b + c$ має ділитися і на $10A + c$, і на $10A + b$.

Тоді у вираз $(100A + 10b + c) - 10 \cdot (10A + b)$ має бути кратним $10A + b$. Таким чином одноцифрове число c ділиться на щонайменше двоцифрове $10A + b$ – суперечність.

Тепер шукатимемо двоцифрові числа. $n = \overline{ab} = 10a + b$, воно має ділитися на a та на b. Але тоді $b \,\vdots\, a$ та $10a \,\vdots\, b$. Залишається виписати усі числа, що задовольняють ці умови.

$$11,\ 12,\ 15,\ 22,\ 24,\ 33,\ 36,\ 44,\ 48,\ 55,\ 66,\ 77,\ 88 \text{ та } 99.$$

9. На колі відмічені 2018 точок, кожна з яких помічена цілим числом. Кожне число більше від суми двох, що йдуть перед ним за рухом годинникової стрілки. Яка найбільша кількість додатних чисел може зустрітися в такій конфігурації?

Відповідь: 1008.

Розв'язання. Позначимо число за рухом годинникової стрілки як a_0, a_1, …, a_{2017}, при цьому вважатимемо, що $a_{k+2018} = a_k \quad \forall k \in N$.

<u>*Лема 1*</u>. Для чинної конфігурації немає двох сусідніх чисел, кожне з яких невід'ємні.

Доведення. Від супротивного, припустимо, що для деякого k числа $a_{k-1} \geq 0$ та $a_k \geq 0$. Тоді $a_{k+1} > a_k + a_{k-1} \geq a_k$. Якщо продовжити, то $a_{k+2} > a_{k+1}$ і так далі отримаємо суперечність, бо

$$a_{k+2018} > a_{k+2017} > \ldots > a_{k+1} > a = a_{k+2018}.$$

Лема доведена.

Таким чином з кожних двох сусідніх чисел маже бути невід'ємним. Але й ця умова не чинна.

<u>*Лема 2*</u>. Для чинної конфігурації не може бути кожне друге число невід'ємним.

Доведення. Від супротивного, припустимо, що для кожного k числа $a_{2k} \geq 0$ та $a_{2k+1} < 0$. Тоді $a_3 > a_2 + a_1 \geq a_1$, аналогічно $a_5 > a_3$, звідки знову приходимо до аналогічної суперечності

$$a_{2019} = a_1 > a_3 > \ldots > a_{2017} > a_{2019}.$$

Лема доведена.

Таким чином додатних чисел не може бути більше 1008. Залишається показати приклад ткої конфігурації рівно з 1008 додатними числами.

$$-4035,\ 1,\ -4033,\ 1,\ -4029,\ \ldots,\ 1,\ -2021,\ 1,\ -2019,\ -2017$$

$$-4035,\ 1,\ -4033,\ 1,\ -4031, \ldots, 1, -2021, 1, -2019, -2017\ .$$

10. Множина натуральних чисел M має такі властивості:

- $2018 \in M$;
- якщо $m \in M$, то й усі дільники m належать M;
- якщо $k,\ m \in M$ та $1 < k < m$, то число $km + 1 \in M$.

Доведіть, що $M = N$.

Відповідь: при $\alpha = 1$ $f(x) = x$, при інших α відповіді не існує.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset M$. Як дільники 2018 маємо, що $1, 2, 1009 \in M$. Число $2019 = 2 \cdot 1009 + 1 \in M \Rightarrow 3 \in M$. Далі за схемою $7 = 2 \cdot 3 + 1 \in M$ та $15 = 2 \cdot 7 + 1 \in M \Rightarrow 5 \in M$. $16 = 3 \cdot 5 + 1 \in M \Rightarrow 4 \in M$.
Далі ММІ, припустимо, що $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1\} \subset M$ і покажемо тоді, що й $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n+1\} \subset M$. $2k+1 = 2 \cdot k + 1 \in M$ та $(2k)^2 = (2k-1)(2k+1) + 1 \in M \Rightarrow 2k \in M$, що й треба було довести.

Середня ліга

1. Доведіть, що для довільних чисел $a, b, c, d \in (0; 1)$ справджується нерівність:
$$(ab - cd)(ac + bd)(ad - bc) + \min\{a, b, c, d\} < 1.$$

Розв'язання. Без обмеження загальності вважатимемо, що $a \ge c$. Тоді з нерівності між середніми
$$(ab - cd)(ad - bc) \le \tfrac{1}{4}((ab - cd) + (ad - bc))^2 = \tfrac{1}{4}(b + d)^2 (a - c)^2 < (1 - c)^2.$$
Крім того, очевидно, що $ac + bd < 1 + c$. Перемножимо отримані нерівності:
$$(ab - cd)(ac + bd)(ad - bc) < (1 - c)^2 (1 + c) < 1 - c \le 1 - \min\{a, b, c, d\},$$
що й треба було довести.

2. Задача № 2 () молодша ліга.

3. Точка D обрана на стороні BC гострокутного ΔABC таким чином, щоб $AD = AC$. Точки P, Q – основи перпендикулярів з точок C, D на сторону AB. Відомо, що $AP^2 + 3BP^2 = AQ^2 + 3BQ^2$. Знайдіть величину $\angle ABC$.

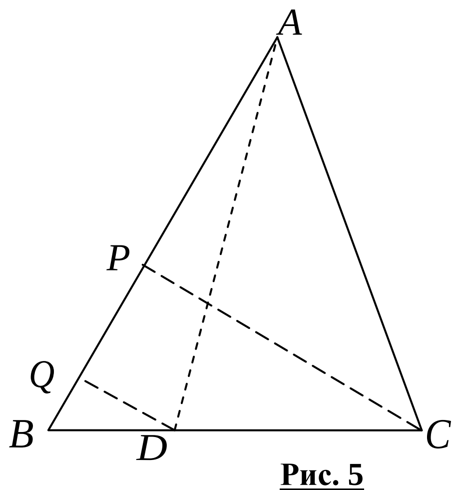

Рис. 5

Відповідь: $\angle ABC = 60°$.

Розв'язання. Перепишемо умову таким чином: $AQ^2 - AP^2 = 3(BP^2 - BQ^2)$ (рис. 5). З теореми Піфагора матимемо, що
$$(AD^2 - DQ^2) - (AC^2 - CP^2) = 3(BP^2 - BQ^2),\ CP^2 - DQ^2 = 3(BP^2 - BQ^2).$$
Оскільки $CP^2 - DQ^2 = AQ^2 - AP^2 \Rightarrow$
$$BP^2 - BQ^2 = BC^2 - BD^2 - 3(BP^2 - BQ^2).$$
Таким чином маємо таку рівність:
$$4(BP^2 - BQ^2) = BC^2 - BD^2.$$
Позначимо через $x = \frac{BC}{BP} = \frac{BD}{BQ}$, тоді остання рівність перепишеться таким чином:
$$4(BP^2 - BQ^2) = x^2 (BP^2 - BQ^2) \Rightarrow x = 2\ \ BD = 2BQ \Rightarrow \angle BDQ = 30° \Rightarrow$$
$$\angle ABC = \angle DBQ = 60°.$$

4. Вписане коло трикутника ABC дотикається до сторін BC, AC та AB у точках D, E та F відповідно. Точка M – середина відрізку EF, L – друга точка перетину описаного кола ΔDFM зі стороною AB, K – друга точка перетину описаного кола ΔDEM зі стороною AC. Доведіть, що описане коло ΔAKL дотикається до сторони

BC.

Розв'язання. Нехай I – інцентр ΔABC, k – описане коло ΔAKL. Тоді (рис. 6):

$$\angle AKD = \angle EKD = 180^\circ - \angle DME = \angle DMF = 180^\circ - \angle FLD = 180^\circ - \angle ALD.$$

Таким чином $D \in k$. Тепер достатньо показати, що $\angle BDL = \angle DAL$. Оскільки $AE = AF$ та $ME = MF$, то $AM \perp EF$ та AM – бісектриса $\angle EAF$. Тому A, M та I – колінеарні. Тому $\angle MDL = 180^\circ - \angle MFL = \angle MFA \Rightarrow$

$$\angle BDL = 90^\circ - \angle IDL = 90^\circ - (\angle IDM + \angle MDL) = (90^\circ - \angle MDL) - \angle IDM =$$
$$= (90^\circ - \angle MFA) - \angle IDM = \angle FAM - \angle IDM = \angle DAL + \angle DAM - \angle IDM.$$

Оскільки ΔAFI прямокутний та $FM \perp AI$, то $IF^2 = IM \cdot IA$. Також $IF = ID$, звідки $ID^2 = IM \cdot IA$. Тоді з теореми про степінь очки відносно кола описане коло ΔAMD дотикається прямої ID у точці D та $\angle IDM = \angle DAM$. Звідси випливає, що $\angle BDL = \angle DAL$ і доведення завершене.

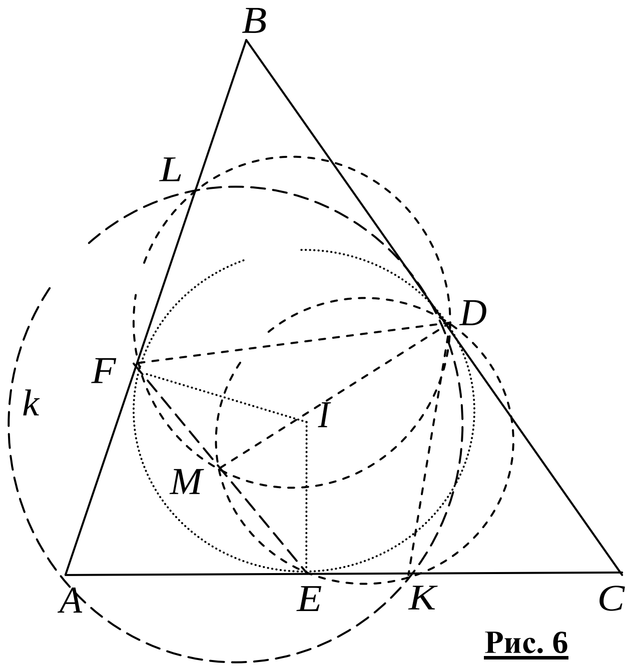

Рис. 6

5. Задача № 5 () молодша ліга.

6. Алекс та Барбара грають в гру на смужці з 2018 квадратів, що пронумеровані зліва направо номерами $1, 2, \ldots, 2018$. В них є 2018 фішок, що так само пронумеровані числами $1, 2, \ldots, 2018$. Вони роблять по черзі ходи одного з таких типів:

- вибирається фішка, що ще не стоїть на смужці, і її можна поставити у будь-яку вільну від фішок комірку, якщо при цьому номери усіх виставлених фішок зліва направо розташовані у порядку зростання;
- вибирається фішка, що стоїть на смужці та її можна пересунути в сусідню комірку справа чи зліва за умови, що вона вільна та що фішка стає ближче до квадрату з номером, що рівний номеру фішки: тобто фішка з номерок 900, якщо вона розташована в квадраті з номером 1000, може зсунутися лише ліворуч, а якщо вона розташована в квадраті з номером 900 нікуди не може бути посунута.

Доведіть, що якщо є фішка, яка ще не виставлена на смужку, то можна зробити черговий хід.

Розв'язання. Доведемо твердження ММІ по n, де гра відбувається на смузі $1 \times n$. Для $n = 2$ все очевидно. Нехай твердження справджується для усіх $k \le n-1$. Розглянемо епізод гри на смузі $1 \times n$. Якщо фішка з номером n вже покладена на смугу, то можливі такі варіанти.

1) Вона не лежить в комірці з номером n. Тоді праворуч від неї усі поля вільні поля, бо інакше порушується умова. Тоді є хід цієї фішки на сусіднє поле вправо і твердження доведене.

2) Вона лежить у комірці з номером n. Тоді цю фішку можна прибрати разом з коміркою, де вона лежить, і ми матимемо позитивну відповідь з припущення індукції. Бо фактично маємо гру на полі $1 \times (n-1)$ з $(n-1)$-ю фішкою.

Якщо фішка з номером n не покладена на ігрове поле, то можливі такі варіанти.

1) Поле з номером n вільне. Тоді можна зробити хід, поклавши в це поле фішку з номером n.

2) Поле з номером n зайняте фішкою з меншим номером. Але тоді ми просто дивимось перше зліва вільне поле. Нехай воно має номер $m<n$. Тоді праворуч від цього поля в полі $(m+1)$ лежить фішка, що має номер $l<m+1$. Інакше, якщо $l=m+1$ та далі праворуч усі комірки зайняті, то в полі за номером $(m+2)$ має лежати фішка за номером $(m+2)$ і так далі, в полі за номером n має лежати фішка за номером n – суперечність припущенню. Але тоді фішку з номером $l<m+1$ можна за правилами пересунути в поле за номером m.
Таким чином хід завжди можна зробити.

7. Задача № 7 () молодша ліга.

8. Знайдіть усі пари взаємно простих натуральних чисел a, b, для яких число $2a^2+3b^2$ ділиться націло на $2a+3b$.

Відповідь: $(a;\, b)$: $(3;\, 8), (1;\, 1), (9;\, 4), (6;\, 1)$.

Розв'язання. Запишемо таку рівність: $2a^2+5ab+3b^2=(2a+3b)(a+b)$. Таким чином $2a^2+3b^2$ ділиться на $2a+3b$ тоді і тільки тоді, коли $5ab$ ділиться на $2a+3b$.
Оскільки за умовою $(a,\, b)=1$, то $(a,\, 2a+3b)=(a,\, 3b)$. Таким чином $(a,\, 2a+3b)$ – це 1 або 3. Аналогічно $(b,\, 2a+3b)$ – це 1 або 2.
Якщо $a\neq 3m,\ b\neq 2k$, то $5 \,\vdots\, (2a+3b)$, звідки $a=b=1$.
Якщо $a=3m,\ b\neq 2k$, то $15 \,\vdots\, (2a+3b)=(6m+3b)$ або $5 \,\vdots\, (2m+b)$. Тоді або $m=1$ та $b=3$. Але тоді $a=3m=3$ – не взаємно просте з b. Або $m=2$ та $b=1$, маємо пару $a=6,\ b=1$.
Якщо $a\neq 3m,\ b=2k$, то $10 \,\vdots\, (2a+3b)=(2a+6k)$ або $5 \,\vdots\, (a+3k)$. Тоді або $a=2$ та $k=1$. Але тоді $b=2k=2$ – не взаємно просте з a.
Нехай тепер $a=3m,\ b=2k$, то $30 \,\vdots\, (2a+3b)=(6a+6k)$ або $5 \,\vdots\, (m+k)$. Тоді маємо пари $(m,\, k)$, що задовольняють умову, такі: $(1;\, 4), (2;\, 3), (3;\, 2), (4;\, 1)$, їм відповідають такі пари $(a;\, b)$: $(3;\, 8), (6;\, 6), (9;\, 4), (12;\, 2)$, з яких відповідями є пари взаємно простих чисел.

9. Задача № 9 () молодша ліга.

10. Задача № 10 () молодша ліга.

Старша ліга

1.1. Для кожного натурального $n\geq 2$ визначимо многочлен

$$f_n(x)=x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\ldots-x-1.$$

Позначимо для кожного $n\geq 2$ через a_n додатний корінь рівняння $f_n(x)=0$. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

Розв'язання. Доведемо спочатку, що додатний корінь вказаного рівняння єдиний. Для цього доведемо спочатку таке твердження за допомогою ММІ: для $\forall n\geq 1$: $f_n(x)$ – монотонно зростає на півінтервалі $[a_n,\, +\infty)$, де a_n – найменший додатній корінь многочлена $f_n(x)$ (звідси випливає, що додатній корінь єдиний). База індукції для $n=1$ очевидна. Нехай для $n=k$ припущення мат. індукції вірне, доведемо для $n=k+1$. Маємо: $f_{k+1}(x)=x(x^k-x^{k-1}-\ldots-1)-1$. Тоді розглянемо найменший додатній корінь a_{k+1} многочлена $f_{k+1}(x)$ (очевидно такий існує). Тоді ясно, що $a_{k+1}>a_k$, бо $f_k(x)$ від'ємна на інтервалі $(0,\, a_k)$, а отже $f_{k+1}(x)$ від'ємна на відрізку $[0,\, a_k]$. Але тоді на півінтервалі $\left[a_{k+1}, +\infty\right)$ многочлен $f_{k+1}(x)$ монотонно зростає, бо функції $f_k(x)$ та x монотонно зростають та є додатними на цьому півінтервалі. Що й треба було довести.

Покажемо тепер, що $a_n < a_{n+1}$. Оскільки $f_n(a_n) = 0$, тобто

$$a_n^n - a_n^{n-1} - a_n^{n-2} - \ldots - a_n - 1 = 0.$$

Тоді

$$f_{n+1}(a_n) = a_n(a_n^n - a_n^{n-1} - a_n^{n-2} - \ldots - a_n - 1) - 1 = a_n \cdot 0 - 1 = -1 < 0.$$

Оскільки $f_{n+1}(2) = 2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} - \ldots - 2 - 1 = 1 > 0$, та внаслідок єдиного додатного кореня випливає, що додатний корінь a_{n+1} многочлена $f_{n+1}(x)$ задовольняє умову: $a_n < a_{n+1} < 2$.

Запишемо такі рівності:

$$(x-1)f_n(x) = (x-1)(x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1) = x^{n+1} - 2x^n + 1.$$

Тому $a_n^{n+1} - 2a_n^n + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a_n = 2 - \frac{1}{a_n^n} \geq 2 - \frac{1}{a_2^n}$. Оскільки a_2 – додатний корінь рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, то $a_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $a_2^n \to \infty$, і ми можемо записати таку нерівність: $2 - \frac{1}{a_2^n} \leq a_n < 2$.

З теореми про двох поліцаїв маємо шукану рівність, що $a_n \to 2$.

1.2. Для кожного натурального $n \geq 2$ визначимо многочлен

$$f_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1.$$

Доведіть, що для кожного $n \geq 2$ рівняння $f_n(x) = 0$ має єдиний додатний корінь.

<u>Розв'язання</u>. Дивись розв'язання **задачі 1.1** старшої ліги.

2. Для додатних чисел a, b, c, що задовольняють умову $a+b+c=1$, та довільних додатних x, y, z доведіть нерівність:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{a^3}{x^2+2y^2} + \frac{b^3}{y^2+2z^2} + \frac{c^3}{z^2+2x^2}\right) \geq \frac{1}{9}.$$

<u>Розв'язання</u>. Перепишемо нерівність таким чином:

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{a^3}{x^2+2y^2} + \frac{b^3}{y^2+2z^2} + \frac{c^3}{z^2+2x^2}\right) \geq \frac{(a+b+c)^3}{9}.$$

Розглянемо таку нерівність:

$$\prod_{i=1}^{3} \sqrt[3]{a_i^3 + b_i^3 + c_i^3} \geq a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3.$$

Покладемо такі значення:

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{a}{\sqrt[3]{x^2+2y^2}}, 1, \sqrt[3]{x^3+2y^3}\right),$$

b_i, c_i визначаємо циклічною перестановкою для (x,y,z) та (a,b,c).
Тоді

$$\sqrt[3]{3}\left(\frac{a^3}{x^2+2y^2} + \ldots\right)^{\frac{1}{3}} (3x^2 + \ldots)^{\frac{1}{3}} \geq (a+b+c).$$

Залишається піднести до кубу обидві частини нерівності та поділити на $9(x^2+y^2+z^2)$.

3. Нехай ABC – нерівнобернений трикутник, у якого $\angle ACB > 90°$, і точка G – середина сторони AB. Вписане у цей трикутник коло з центром у точці I дотикається до сторін AB, BC та CA у точках D, E та F відповідно. Прямі AI та

BI перетинають пряму EF у точках M та N відповідно. Доведіть, що точки D, G, M та N – циклічні.

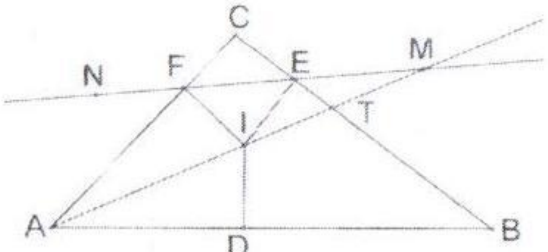

Рис. 7

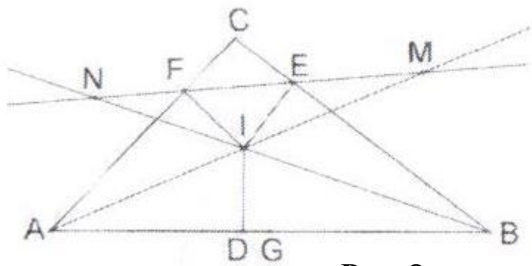

Рис. 8

Розв'язання. Позначимо кути ΔABC стандартним чином α, β, γ. Спочатку покажемо, що M, N лежать зовні ΔABC. Позначимо через $T = AI \bigcap BC$ (рис. 7). З умови $\gamma > 90°$ випливає, що $\angle ATC < 90°$, тому ΔCIT – гострокутний:

$$\angle CIT = \angle CAT + \angle ICA = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\gamma < 90°.$$

Оскільки $IE \perp BC$, то IE – висота ΔCIT, тому E належить відрізку CT. Крім того $CE = CF$, тому

$$\angle CFE = 90° - \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) > \tfrac{1}{2}\alpha = \angle CAT.$$

Таким чином прямі EF та AI перетинаються, та точка перетину M розташована поза ΔABC. Аналогічно для точки N.

Тепер покажемо, що чотирикутники $EMBI$, $FNAI$ та $ABMN$ – вписані (рис. 8).

$$\angle MEB = \angle CEF = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \angle MIB.$$

Таким чином $EMBI$ – вписаний, крім того на описаному колі розташована також точка D. Аналогічно на одному колі лежать точки N, F, I, D, A. Тому

$$\angle NMA = \angle EMI = \angle EBI = \tfrac{1}{2}\beta = \angle NBA.$$

Тому $ABMN$ – вписаний. Звідси матимемо $\angle IMB = \angle IEB = 90°$. Аналогічно $\angle INA = \angle IFA = 90°$. Це означатиме, що точка G – середина сторони AB – центр описаного кола $ABMN$. Зауважимо, що центри трьох кіл не колінеарні, оскільки центр кола $EMBDI$ лежить на середині відрізку BI, центр кола $FNADI$ – на середині відрізку AI (рис. 9).

Розглянемо ΔABX, де M, N, D – основи висот, що проведені з вершин A, B, X відповідно. Тому описане коло ΔMND є колом дев'яти точок ΔABX, яке проходить через середину AB, тобто точку G, що й завершує доведення.

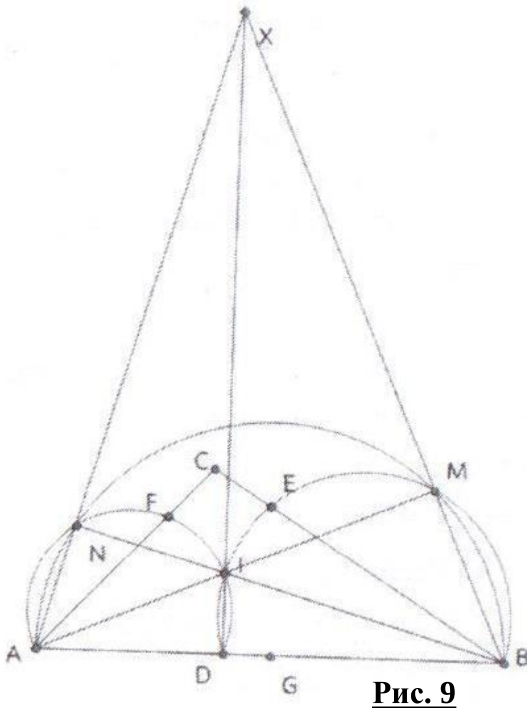

Рис. 9

4. Задача № 4 () середня ліга.

5. Задача № 5 () молодша ліга.

6.1. Множина натуральних чисел S називається *двійковою*, якщо існують деякі два елементи $s, s' \in S$ (не обов'язково різні), чия сума $s + s'$ є степенем числа 2. Інакше множина називається *недвійковою*. Знайдіть хоча б одне таке натуральне n, для якого множина $\{1, 2, \ldots, n\}$ містить 99–елементну недвійкову підмножину, але усі 100–елементні її підмножини є двійковими.

Відповідь: $n = 203$.

Розв'язання. Позначимо через $f(n)$ – найбільше можливе значення, для якого існує недвійкова підмножина множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, що містить $f(n)$ елементів. Зрозуміло, що $f(0) = f(1) = 0$. Нехай $n = 2^a + b$, де $0 \le b \le 2^a - 1$. Зараз будемо доводити, що

$$f(n) = f(2^a + b) = f(2^a - b - 1) + b.$$

Поділімо множину на дві підмножини: $X = \{1, 2, \ldots, 2^a - b - 1\}$ та $Y = \{2^a - b, \ldots, 2^a + b\}$. Тоді недвійкова підмножина S може містити не більше як $f(2^a - b - 1)$ елементів з множини X – за визначенням $f(n)$, а також не більше b елементів з Y, оскільки воно не має містити 2^a, а також може містити не більше одного з пари елементів $2^a - x$ та $2^a + x$. Звідси $f(n) \le f(2^a - b - 1) + b$.

Розглянемо недвійкову підмножину $T \subset X$, що має рівно $f(2^a - b - 1)$ елемент. Покажемо методом від супротивного, що множина $S = T \bigcup \{2^a + 1, \ldots, 2^a + b\}$ – недвійкова. Якщо припустити, що $s, s' \in S$ такі, що $s + s' = 2^c$. Зрозуміло, що це неможливо для $s, s' \in T$, а також для $s, s' \in S \setminus T$, оскільки:

$$2^{a+1} < 2^a + 1 + 2^a + 1 \le s + s' \le 2^a + b + 2^a + b < 2^{a+2}.$$

Нехай тепер $s \in T,\ s' \in S \setminus T$, тоді

$$2^a < s + s' \le 2^a - b - 1 + 2^a + b < 2^{a+1}.$$

Таким чином ми маємо другу нерівність $f(n) \ge f(2^a - b - 1) + b$.

Далі просто знаходимо, що: $f(4) = 1$.

$$f(11) = f(2^3 + 3) = f(2^3 - 3 - 1) + 3 = f(4) + 3 = 4.$$

$$f(52) = f(2^5 + 20) = f(2^5 - 20 - 1) + 20 = f(11) + 20 = 24.$$

$$f(203) = f(2^7 + 75) = f(2^7 - 75 - 1) + 75 = f(52) + 75 = 99.$$

6.2. Задача № 6 () середня ліга.

7. Нехай p – просте число, послідовність натуральних чисел (a_n) $\forall n \in N$ задовольняє умову $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p$. Доведіть, що $\forall n \in N$ $a_{n+1} \mid (a_n + a_{n+2})$.

Розв'язання. Доведемо ММІ по n. $p = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \Rightarrow$

$$a_1 a_3 - a_2^2 = a_2 a_4 - a_3^2 \Rightarrow a_1 a_3 + a_3^2 = a_2 a_4 + a_2^2 \Rightarrow a_2 \mid a_3(a_1 + a_3).$$

Якщо припустити, що $d = (a_2, a_3) > 1$, то $d \mid a_1 a_3 - a_2^2 = p \Rightarrow d = p$. Тоді $p \mid a_2$ та $p \mid a_3$. Далі маємо, що $d \mid p = a_3 a_5 - a_4^2 \Rightarrow p \mid a_4$. Але тоді $p = a_2 a_4 - a_3^2 \,\vdots\, p^2$ – суперечність.

Таким чином $d = (a_2, a_3) = 1 \Rightarrow a_2 \mid (a_1 + a_3)$. База індукції доведена. Нехай тепер для деякого $k \in N$ справджується умова: $a_{k+1} \mid (a_k + a_{k+2})$. Тоді $a_k a_{k+2} = a_{k+1}^2 + p$ та $a_{k+1} a_{k+3} = a_{k+2}^2 + p \Rightarrow a_{k+1} a_{k+3} + a_{k+1}^2 = a_k a_{k+2} + a_{k+2}^2 \Rightarrow$

$$\frac{a_{k+1} + a_{k+3}}{a_{k+2}} = \frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1}}.$$

Оскільки права частина за припущенням ціле число, то і ліва частина – ціле число, що й завершує доведення.

8. Задача № 8 () середня ліга.

9. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, що $\forall x,\ y \in R$ задовольняють рівності:

$$f(2x + f(y)) + f(f(y)) = 4x + 8y.$$

Відповідь: $f(x) = 2x$.

Розв'язання. Покладемо в умову $y = 0$:

$$f(2x + f(0)) + f(f(0)) = 4x. \qquad \textbf{(1)}$$

Покладемо $x \to \frac{1}{2}(x - f(0))$ в (1)

$$f(x) = 2x - 2f(0) - f(f(0)) = 2x + c. \qquad \textbf{(2)}$$

Підставимо все це в умову при $y = x$:

$$f(2x + 2x + c) + f(2x + c) = 12x \Rightarrow 8x + 2c + c + 4x + 2c = 12x \Rightarrow c = 0,$$

звідки розв'язком може бути лише функція $f(x) = 2x$. Перевіркою переконуємося, що вона умову задовольняє.

10.1. Є дав однакових круга радіуса 1. Знайдіть площу чотирикутника найбільшої площі, що може бути покритою об'єднанням двох кругів.

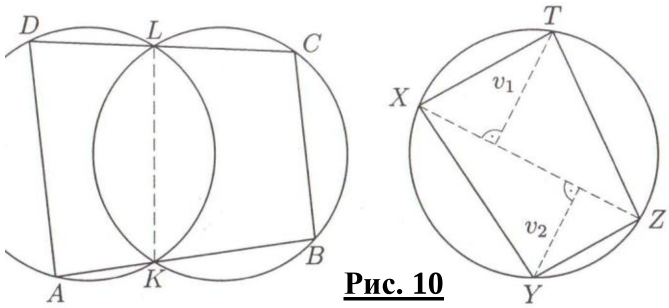

Рис. 10

Відповідь: 4.

Розв'язання. Розглянемо можливі випадки розташування чотирикутника максимальної площі. Або це чотирикутник $ABCD$, що складається з двох вписаних чотирикутників (рис. 10). Тоді кожний з чотирикутників $ADLK$ та $BCLK$ має максимальну площу, якщо він є квадратом, у якого діагональ це діаметр. Неважко зрозуміти, що площа квадрату з діагоналлю, що дорівнює діаметру і рівною 2. Тоді сторона $\sqrt{2}$, відповідно площа кожного 2, тому $S(ABCD) = 4$.

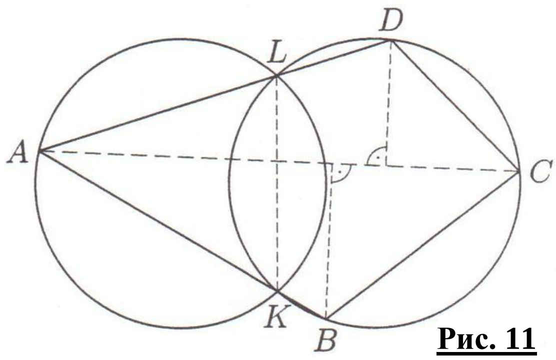

Рис. 11

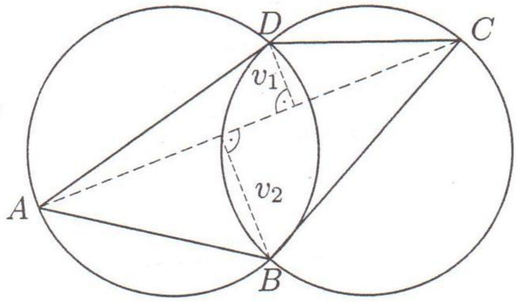

Рис. 12

Другим варіантом є вписаний трикутник та п'ятикутник (рис. 11). А третім – два вписаних трикутники (рис. 12). Для обох випадків $S(ABCD) = \frac{1}{2} AC(v_1 + v_2)$. Але тоді $AC \le 4$, $v_1 + v_2 \le 2$, тому $S(ABCD) \le \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.

10.2. Задача № 10 () молодша ліга.