"Краще запалити одну маленьку свічку,
ніж клясти темряву"
Конфуцій

Математичний бій № 2

Молодша ліга

1.1. Додатні числа $x_1, x_2, ..., x_9$ задовольняють умову $x_1^2+...+x_9^2 \geq 25$. Доведіть, що існують такі три числа x_1, x_2, x_3, для сума яких не менше 5.

Розв'язання. Очевидно, що треба взяти найбільші три числа. Без обмеження загальності вважатимемо, що $x_1 \geq ... \geq x_9$, тоді очевидні такі оцінки:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3 \geq x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+...+x_9^2 = 25 \Rightarrow$$
$$x_1+x_2+x_3 \geq 5,$$

що й треба було довести.

1.2. Розвяжіть рівняння:

$$x^2+x^4+x^6+...+x^{4036} = 2018x.$$

Відповідь: $x=0$ та $x=1$.
Розв'язання.Оскільки при $x<0$ розв'язків очевидно немає, бо ліворуч додатній вираз, а праворуч – від'ємний, то $x \geq 0$. Одразу бачимо, що $x=0$ та $x=1$ – корені.
Якщо $0<x<1$ маємо, що $x^{2k} < x \Rightarrow x^2+x^4+x^6+...+x^{4036} < 2018x$ і коренів немає.
Якщо $x>1$ маємо, що $x^{2k} > x \Rightarrow x^2+x^4+x^6+...+x^{4036} > 2018x$ і коренів немає.

2. Нехай M, N – натуральні числа, учень мандрує від точки $(0, N)$ у точку $(M, 0)$ такими шляхами:

- кожний крок має довжину 1 і паралельній одній з осей координат;
- для кожної точки (x, y) на шляху маємо $x, y \geq 0$.

Після кожного кроку учень вимірює відстань від зробленого кроку до координатній осі, якій той крок паралельний. Якщо крок робиться на збільшення відстані від початку координат, то це значення береться із знаком плюс, інакше – мінус. Доведіть, що по завершенню будь-кого маршруту сума записаних чисел дорівнює 0.

Розв'язання. Припустимо, що учень зробив k кроків. При цьому нехай i-й крок був таким: $(x_{i-1}, y_{i-1}) \to (x_i, y_i)$. Таким чином записується величина $y_{i-1}(x_i - x_{i-1})$ або $x_{i-1}(y_i - y_{i-1})$. При цьому ця величина завжди дорівнює $y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(y_i - y_{i-1})$, бо одна з відповідних координат не змінюється. Але тоді сумарний запис чисел складає:

$$\sum_{i=1}^{k}(y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_{i-1}(y_i - y_{i-1})) = \sum_{i=1}^{k}(x_i y_i - x_{i-1}y_{i-1}) = x_k y_k - x_0 y_0 = M \cdot 0 - 0 \cdot N = 0.$$

3. Заданий рівносторонній ΔABC, на стороні AC якого вибрана точка D. На промені BC за точкою C вибрана точка E, для якої $AD=CE$. Доведіть, що $BD=DE$.

Розв’язання. Проведемо відрізок $DH \parallel AB$, $H \in BC$ (рис. 1). Тоді ΔDHC – рівносторонній, тому $DH = DC$. Крім того $CE = AD = HB$ та $\angle DHB = 120° = \angle DCE$, звідси $\Delta DHB = \Delta DCE$, тому й $DB = DE$.

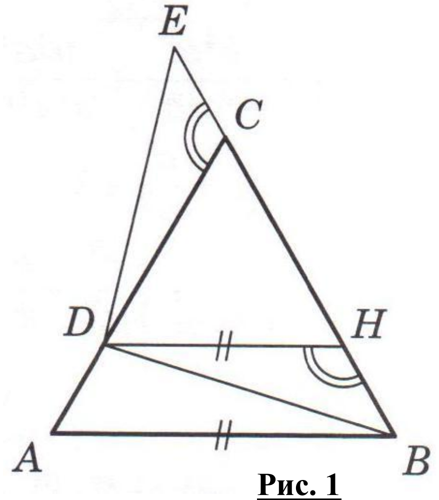


Рис. 1

4.1. Доведіть, що рівносторонній (не обов’язково правильний) опуклий п'ятикутник містить рівносторонній трикутник зі стороною, що дорівнює стороні п’ятикутника.

Розв’язання. Без обмеження загальності будемо вважати, що сторона рівностороннього п’ятикутника $ABCDE$ дорівнює 1. Розташуємо п’ятикутник так, що його найдовша діагональ AD розташована горизонтально. Зрозуміло, що $AD < DE + EA = 2$. Оскільки то найбільша діагональ п’ятикутника, то $\angle ABC > 60°$ та $\angle BCD > 60°$ (рис. 2). Якщо цей п’ятикутник не містить жодного рівностороннього трикутника зі стороною 1, то трикутники, що побудовані на сторонах AB, BC та CD мають перетинати діагональ AD.

Розглянемо точки B_1 та C_1, для яких $AB_1 = DC_1 = 1$ і рівносторонні трикутники AB_1B_2 та DC_1C_2. Побудуємо два кола радіуса 1 з центрами в точках A та D, вони проходять через точки B_1, B_2, B та C_1, C_2, C відповідно. При цьому за припущенням дуги B_1B_2 та C_1C_2 мають містити вершини B, C відповідно, бо інакше шуканий рівносторонній трикутник існує. Тоді в трапеції $B_2C_2B_1C_1$ – більша основа B_2C_2 має бути меншою за 1, бо інакше $AD > 2$. Але це суперечить тому, що $BC = 1$.

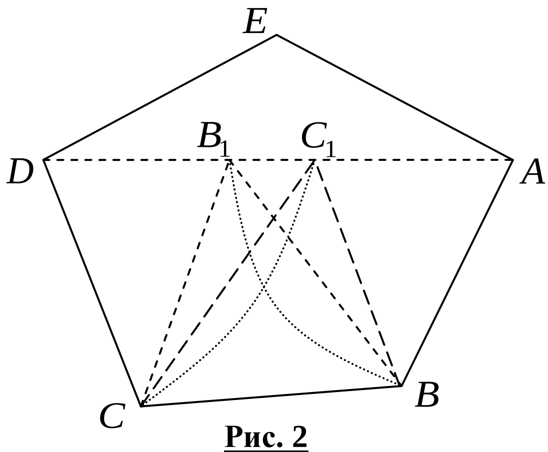


Рис. 2

4.2. Розглянемо два квадрати зі стороною 1, що утворюють прямокутник 2×1. Після цього до отриманого прямокутника домальовують квадрат зі стороною, що дорівнює більшій стороні прямокутника і утворюється новий прямокутник. Так само вчиняємо з новим прямокутником і так далі. У певний момент утворився прямокутник з периметром, що більший за 2018 см. Скільки квадратів усього його утворили?

Відповідь: 16.

Розв’язання. Випишемо послідовно розміри прямокутників: 1×2, 2×3, 3×5, ... (рис. 3). Неважко зрозуміти, що сторони утворюють послідовні пари чисел Фібоначчі. Таким чином нам треба знайти сусідні члени послідовності Фібоначчі, чия сума більше 1009.

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987\ldots.$$

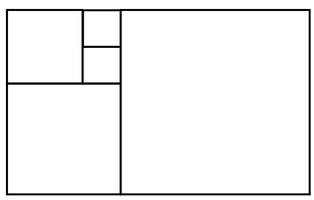


Рис. 3

Таким чином маємо, що останніми були квадрати з сторонами 610 та 987. Залишається порахувати їхню кількість: 2 одиничних квадрати та 14 квадратів з більшими сторонами.

5. Є 2018 коробок для маркерів необмеженого об'єму. Застосовується така процедура, на кроці k по одному маркеру додається у ті коробки, де на даний момент міститься кількість маркерів, що кратна k. Робляться послідовно усі кроки, починаючи з $k=1$ і так далі. Перед початком цієї процедури Петрик хоче розкласти декілька маркерів у коробки, щоб вони задовольняли умови – у кожній коробці лежатиме принаймні 1 маркер і після кожного кроку є хоча б дві коробки, в яких лежить різна кількість маркерів. Чи вдасться йому це зробити?

***Відповідь*:** ні.
Розв'язання. Покажемо, що для будь-якої кількості коробок після достатньо великої кількості кроків в усіх коробках буде однакова кількість маркерів. Нехай деяка коробка містить x_n маркерів перед n–м кроком. Якщо $x_n = n$ для деякого n, то для усіх більших значень справджується умова: $x_m = m$, $\forall m \geq n$. Залишається показати, що для кожної коробки настане мить, коли $x_n = n$.

Зрозуміло, що для кожної коробки на початку $x_1 \geq 1$. Нехай для деякої коробки $x_l > l$ для деякого l. Тоді $d = x_l - l > 0$. Тоді знайдеться такий крок m, на якому в цю коробку маркер не буде покладений. Якщо це не так, то $(x_l + s) \vdots (l+s) \quad \forall s \in N$. Але при достатньо великих s $1 < \frac{x_l+s}{l+s} < 2$ – суперечність. Таким чином існує значення s, для якого немає подільності, тому маркер не буде покладений. Висновок – для цієї коробки значення $d = x_{l+s} - (l+s)$ зменшиться на 1 і після d таких кроків настане шукана рівність $x_n = n$.

6.1. На папері в клітинку $n \times n$ кожна клітинка пофарбована в один з n кольорів. Розфарбування називається *правильним*, якщо в жодному рядку та стовпчику немає двох квадратиків одного кольору. Чи завжди можна дофарбувати до правильного розфарбування, якщо вже пофарбовані без порушення правильності n^2-1 клітина?

Відповідь: так.
Розв'язання. Нехай порожня клітина розташована в першому рядку (верхньому) та першому стовпчику (лівому). Якщо в першому рядку, де стоїть порожня клітинка, та у першому стовпчику, не використовується колір n, то все доведене. Якщо то не так, то нехай в рядку не використовується колір n, а в стовпчику є клітина з таким кольором. Тепер розглянемо $n-1$ рядок, без першого. В кожному з них по n розфарбованих клітин, а тому кожний колір використаний рівно по одному разу. Але це означає, що там використано n клітин кольору n (бо в верхньому рядку такого кольору немає), але рядків усього $n-1$ – за принципом Діріхле – буде рядок з двома клітинами кольору n – суперечність з правильним розфарбуванням. Таким чином ту клітину можна зафарбувати у колір n.

6.2. На папері в клітинку $n \times n$ кожна клітинка пофарбована в один з n кольорів. Розфарбування називається *правильним*, якщо в жодному рядку та стовпчику немає двох квадратиків одного кольору. Чи завжди можна дофарбувати до правильного розфарбування, якщо вже пофарбовані без порушення правильності n клітин?

1					
	2				
		2			
			2		
				2	
					2

Рис. 4

Відповідь: ні.
Розв'язання. Відповідний приклад на рис. 4.

7. Знайдіть найбільше просте число p, для якого справджується умова – з цього числа можна викреслити будь-яку кількість цифр (окрім усіх, звичайно) і число, що лишиться після такого ви креслення залишиться простим.

Відповідь: 73.

Розв'язання. Припустимо, що шукане число має принаймні 3 цифри. Покажемо, які цифри взагалі не може мити шукане число: 1, 4, 6, 8 та 9, бо якщо залишити цю цифру саму – виявиться не просте число. Так само це число не може містити цифру 0, бо вона не може бути першою, а тому зробивши її останньою матимемо не просте число. Розглянемо варіанти останніх цифр можливої відповіді. Цифра 2 та 5 нею бути не може – ці цифри можуть бути лише першими. І повторюватися цифри не можуть, бо відповідним викреслюванням отримаємо число, що кратне 11.

Якщо остання цифра 3, то перед нею можуть бути лише 7. Залишається дописати попереду 2 чи 5, але утворяться складені числа 27 та 57 відповідно.

Аналогічно, якщо остання цифра 7, то перед нею можуть бути лише 3. Залишається дописати попереду 2 чи 5, але утворяться складені числа 27 та 57 відповідно.

Таким чином шукане число не більше ніж двоцифрове. Останні цифри можуть бути знову таки 3 чи 7, а перша – 2, 5 або 3 чи 7 в залежності від останньої. Легко бачити, що шукане найбільше – це число 73.

8. Задана множина $S = \{xy(x+y) | x, y \in N\}$. Нехай a, n натуральні числа такі, що $a + 2^k \in S$, $\forall k = \overline{1, n}$ знайдіть найбільше множилве значення n.

Відповідь: $n = 3$.

Розв'язання. Простим перебором можна пересвідчитися, що $\forall x, y \in N$:

$$xy(x+y) \equiv 0, 2, 3, 6, 7 \pmod 9.$$

Залишається $\forall a \equiv 0, 1, \ldots, 8 \pmod 9$ випишемо можливі значення для $a + 2^i \pmod 9$, $i = \overline{1, 9}$ (рис. 1).

a, i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2	4	8	7	5	1	2	4	8
1	3	5	0	8	6	2	3	5	0
2	4	6	1	0	7	3	4	6	1
3	5	7	2	1	8	4	5	7	2
4	6	8	3	2	0	5	6	8	3
5	7	0	4	3	1	6	7	0	4
6	8	1	5	4	2	7	8	1	5
7	0	2	6	5	3	8	0	2	6
8	1	3	7	6	4	0	1	3	7

Рис. 5

Легко бачити, що більше трьох послідовних чисел в цій множині бути не можуть. Тому $n \le 3$. Залишається навести приклад для $n = 3$: $a = 124$:

$$a + 2^1 = 126 = 2 \cdot 7 \cdot (2+7),\ a + 2^2 = 128 = 4 \cdot 4 \cdot (4+4) \text{ та } a + 2^3 = 132 = 1 \cdot 11 \cdot (1+11).$$

9.1. В ряд записані усі можливі правильні нескоротні дроби, знаменники яких не більше 2018. Оксана та Петро ставлять знаки «+» чи «–» перед будь-яким дробом, перед яким знак ще не стоїть. Вони роблять це по черзі, але відомо, що розпочинає Оксана. По завершенні виставлення знаків перед усіма дробами обчислюється результат. Якщо він цілий, то перемагає Оксана, які не цілий, то перемагає Петро. Хто переможе за правильної гри обох?

Відповідь. Переможе Оксана.

Розв'язання. В цьому списку непарна кількість дробів. Лише дріб $\frac{1}{2}$ не має пари, для кожного іншого правильного нескоротного дробу $\frac{p}{q}$ поставимо у відповідність нерівний цьому правильний нескоротний дріб $1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$. Тоді стратегія Оксани така: першим ходом вона ставить знак "+" перед дробом $\frac{1}{2}$. А діла якщо Петро вибирає дріб $\frac{1}{4}$ чи $\frac{3}{4}$, то Оксана ставить протилежний знак, обраному Петром. Для усіх інших дробів – Оксана вибирає дріб з тієї пари і ставить однаковий знак з обраним Петром. Тоді сумарне число буде цілим, бо дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ та $\frac{3}{4}$ сумарно ають ціле число, так само як і інші пари дробів і сумі дають ціле число.

9.2. Аліса задумала 5 різних чисел і повідомила Андрію суми п’яти пар з них – три найменші 29, 33, 36 та дві найбільші – 47 та 53. Чи може Андрій знайти найбільше із задуманих Алісою чисел? Якщо так, то вкажіть це число.

Відповідь: так, 27.
Розв’язання. Позначимо числа через $a<b<c<d<e$. Тоді нам відомі значення $a+b=32$, $a+c=33$, $d+e=53$ та $c+e=47$. Оскільки
$$a+d=(a+c)+(d+e)-(c+e)=32+53-47=38\neq 36,$$
то $b+c=36$. Тепер можемо знайти і шукану величину.
Оскільки $c=\frac{1}{2}((a+c)+b+c)-(a+b))=20$, то $e=(e+c)-c=27$.

10. На площині зображений опуклий n-кутник, $n\geq 3$, в якому проведені деякі діагоналі, жодні дві з яких не перетинаються. Доведіть, що його вершини можна пофарбувати у 3 кольори таким чином, щоб жодні дві вершини, що з'єднані стороною чи проведеною діагоналлю мають різні кольори.

Розв’язання. Твердження доведемо ММІ за кількістю проведених діагоналей. Якщо жодна діагональ не проведена, то вершини фарбують таким чином: $1-2-1-2-\ldots-1-2-$ при парній кількості вершин, і $1-2-1-2-\ldots-1-2-3-$ при непарній кількості вершин.
Якщо проведена принаймні одна діагональ, то виберемо довільну з них, тобі многокутник розбивається на два інших. За припущенням індукції у кожному з них можна розфарбувати вершини належним чином. Вершини, що з’єднані діагоналлю поділу двох многокутників, для обох розфарбувань мають різні кольори. Наприклад, діагональ $M-N$, що їх поділяє, у першому з них вони мають колір $1-2$, а у другому $a-b$. Тоді достатньо перефарбувати у другому багатокутнику кольори вершин таким чином: $a-1$, $b-2$, а усі інші – кольором 3. Неважко зрозуміти, що це фарбування задовольняє умови.

Середня ліга

1. Для чисел a, b, c, справджуються умови: $a\neq 0$, $|a+c|<|a-c|$. Доведіть, що квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ має два дійсних корені різних знаків.

Розв’язання. Нерівність з умови переписується таким чином: $ac<0$. Але тоді й дискримінант додатний: $D=b^2-4ac>0$. Звідси все й випливає, коренів 2, і вони різного знаку, оскільки їхній добуток дорівнює $\frac{a}{c}<0$.

2. Знайдіть найбільше число $k\geq 0$, для якого для довільного набору невід'ємних чисел x_1, x_2, …, x_n, $n\geq 2$ справджується нерівність:
$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1)\geq k(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+\ldots+x_{n-1}^2x_n^2+x_n^2x_1^2).$$

Відповідь: $k=4$.
Розв’язання. Без обмеження загальності можна вважати, що $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$.
Для $n=2$ $(x_1+x_2)^2(x_1x_2)\geq k(x_1^2x_2^2)$ або $x_1x_2\leq\frac{1}{k}$. Добре відомо, що $\sqrt{x_1x_2}\leq\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}$, звідси $x_1x_2\leq\frac{1}{4}$. Рівність досягається при $x_1=x_2=\frac{1}{2}$. Таким чином $\frac{1}{k}\geq\frac{1}{4}$ або $k\leq 4$. Для довільного $n\geq 2$ матимемо, що $x_3=\ldots=x_n=0$, то й тут $k\leq 4$.
Покажемо, що $k=4$ є шукана відповідь. Оскільки

$$x_i x_j \le \tfrac{1}{4}(x_i + x_j)^2 \le \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - 4x_i x_j \ge 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) = (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \ge$$

$$\ge 4(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2x_n^2 + x_n^2x_1^2) \Leftrightarrow$$

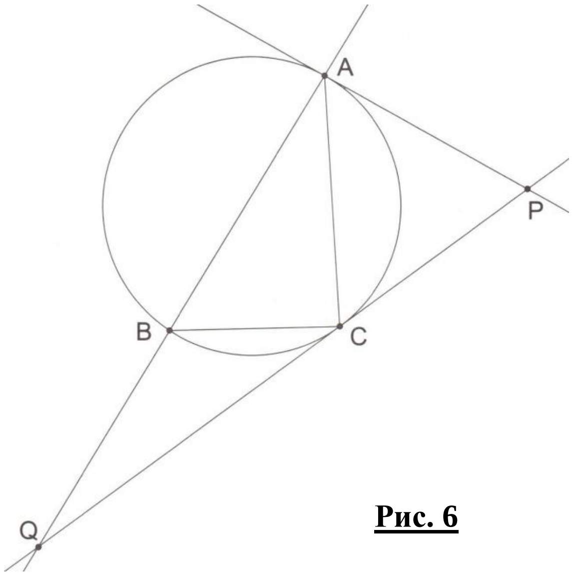
$$x_1x_2(1 - 4x_1x_2) + x_2x_3(1 - 4x_2x_3) + \ldots + x_{n-1}x_n(1 - 4x_{n-1}x_n) + x_nx_1(1 - 4x_nx_1) \ge 0.$$

3. Нехай ABC – трикутник з кутами $\angle A < \angle B < 90°$ та описаним колом Γ. Дотичні до Γ у точках A та C перетинаються у точці P. Прямі AB та PC перетинаються у точці Q. Відомо, що $S_{ACP} = S_{ABC} = S_{BQC}$. Доведіть, що ABC – прямокутний.

<u>Розв'язання</u>. Для цього достатньо показати, що $\angle CAB + \angle CBA = 90°$. З теореми про вписані кути $\angle CAP = \angle CBA$ (рис. 6), звідки достатньо показати, що $\angle PAB = 90°$, а це рівносильне тому, що AB – діаметр кола Γ.
З рівності площ, маємо, що $BQ = AB = c$, з властивості дотичної $QC = \sqrt{QB \cdot QA} = \sqrt{2}c$. Тоді $PA = PC = \frac{1}{2}QC = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Звідси маємо, що

$$PA^2 + AQ^2 = \frac{c^2}{2} + (2c)^2 = \left(\frac{3c}{\sqrt{2}}\right)^2 = PQ^2,$$

Звідки й випливає прямокутність ΔABC.

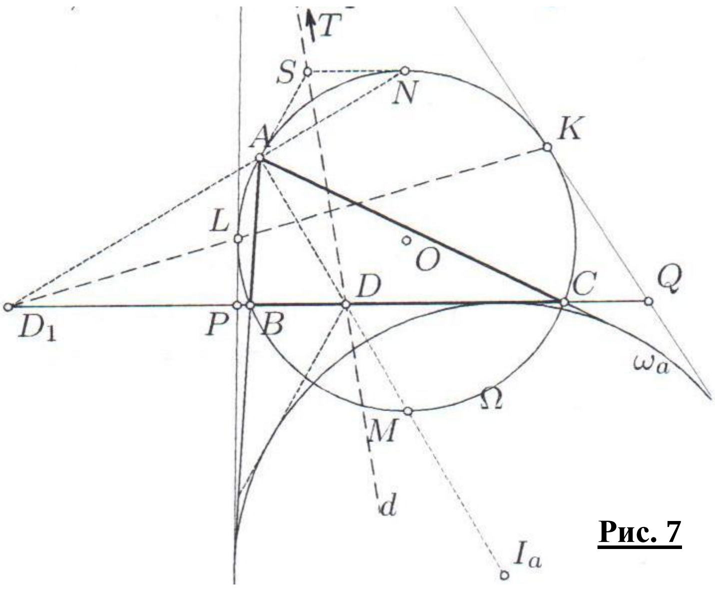


<u>Рис. 6</u>

4. Нехай Ω – описане коло ΔABC, w_a – зовні вписане коло, що відповідає вершині A. Дві спільні дотичні до кіл k та k_a перетинають пряму BC у точках P та Q. Доведіть, що $\angle PAB = \angle QAC$.

<u>Розв'язання</u>. Нехай бісектриса внутрішнього та зовнішнього кутів $\angle BAC$ перетинають пряму BC у точках D та D_1 відповідно (друга точка можливо на нескінченності). Нехай спільні дотичні перетинаються в точці T (рис. 7), розглянемо гомотетію H, що перетворює коло Ω в коло w_a. Якщо точка T на нескінченності, то гомотетія стає переносом і усі наведені властивості зберігаються.

<u>Лема 1</u>. Нехай довільна пряма p, що проходить через D_1 та перетинає Ω в точках K і L та пряму BC у точках P і Q відповідно. Тоді $\angle PAB = \angle CAQ$.



<u>Рис. 7</u>

Доведення. Якщо точка D_1 – нескінченна точка, то все очевидно з симетрії. Для звичайної точки матимемо, що $\Delta PBK \sim \Delta PKC$, звідти $\frac{PB}{PK} = \frac{PK}{PC} = \frac{KB}{KC}$, звідки $\frac{PB}{PC} = \frac{KB^2}{KC^2}$. Аналогічно $\frac{QB}{QC} = \frac{LB^2}{LC^2}$. Далі маємо, що $\frac{KB}{KC} \cdot \frac{LB}{LC} = \frac{S(KLB)}{S(KLC)} = \frac{D_1B}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$, звідси випливає, що $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}$, що рівносильне умові $\angle PAB = \angle CAQ$.

Лема доведена.

Якщо спільні дотичні дотикаються до кола Ω у точках K, L, то достатньо показати, що точка D_1 лежить на прямій KL, яка є полярною віссю точки T кола Ω. З двоїстого принципу, достатньо показати, що T лежить на полярі d точки D_1 кола Ω.

Позначимо через N – середину дуги BAC кола Ω. Гомотетія Н перетворю точку D у точку перетину S – дотичних до Ω у точках A та N. Тому пряма DS проходить через точку T. З іншого боку точка D лежить на полярі d оскільки чотирикутник (B, C, D_1, D) – гармонічний, в той час як точка S лежить на d, оскільки поляра S до кола Ω, яка є лінією AN, проходить через точку D_1. Тому прямі d та DS співпадають, що й завершує доведення.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Нехай спільні дотичні дотикаються до Ω у точках K і L, де LP – дотична, що найближча до B. Позначимо через M – середину дуги BC, що не містить точки A. Нехай O та I_a – центри кіл Ω та w_a. Оскільки

$$\angle LPI_a = 90° + \tfrac{1}{2}\angle LPC \text{ та } \angle LAI_a = \angle LAM = \tfrac{1}{2}\angle LOM = \tfrac{1}{2}\angle LPD_1 = 90° - \tfrac{1}{2}\angle LPC.$$

Звідси випливає, що $\angle LPI_a + \frac{1}{2}\angle LAI_a = 180°$., тобто чотирикутник $ALPI_a$ – вписаний, аналогічно як і $AKQI_a$. Тому $\angle PAI_a = \angle PLI_a = \angle QKI_a = \angle QAI_a$, оскільки кути PLI_a та QKI_a – симетричні прямій OI_a, звідки $\angle PAB = \angle QAC$.

5. Задача № 5 () молодша ліга.

6. Для яких k квадрат 6×6 можна покрити k фігурками кутове триміно та $12-k$ фігурками прямих триміно?

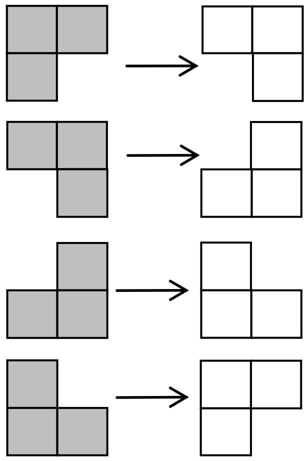


Рис. 8

<u>Відповідь:</u> $k \neq 1$ та $k \neq 3$.

<u>Розв'язання</u>. Приклади покриття при усіх інших k не важко побудувати. Наприклад для парних k все робиться з властивості, що прямокутник 2×3 можна розрізати як на 2 прямокутника 1×3, так і на дві кутові триміно. Так само з цієї властивості випливає можливість розбиття на непарну кількість, починаючи з $k=5$.

Нехай $k=1$, тоді, якщо перенумерувати усі поля числами $0, 1, 2$ вздовж діагоналі, так щоб все йшло по черзі, то кількість усіх чисел однакова. Але кожне пряме триміно закриває по одному з чисел, а кутове триміно – одне з чисел не покривається, а якесь з чисел покривається два поля.

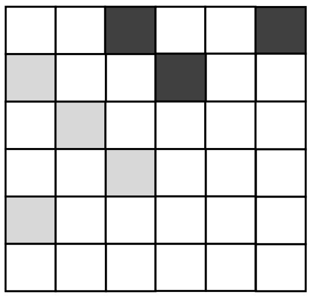


Рис. 9

Нехай $k=1$, тоді, якщо перенумерувати усі поля числами $0, 1, 2$ вздовж горизонталей, верхній та четвертий рядок позначені числами 0, другий та п'ятий – числами 1, і останні – 2. Тоді кутові триміно з нижнім рядком з двох клітин має суму $2 \pmod 3$, інші кутові триміно мають суму $1 \pmod 3$. Тому з трьох таких триміно усі мають мати однакову суму, бо інакше остаточна сума не вийде рівною $0 \pmod 3$. Оскільки поворотом на $90°$ відбуваються такі переходи кутових триміно (рис. 8): Оскільки в нас нумерація могла бути не по горизонталях, а по вертикалях, то так само мали біти триміно одного з типів – а саме з двома в правому рядку чи в лівому. Якщо поєднати обидві властивості, то настає варіант, що усі три триміно мають бути одного з чотирьох типів. Без обмеження загальності розгляду вважатимемо, що то триміно яке на рис. 2 нижнє в лівому стовпчику.

При фарбуванні квадратиків як для попереднього випадку, кожний з прямокутників покриває по одній клітині з числами $0, 1, 2$. Тому три кутових триміно мають покривати різні комбінації чисел: $0, 0, 2$, $1, 2, 2$ та $0, 1, 1$. Розглянемо можливе розташування триміно, що покриває

$0,\ 0,\ 2$. Без обмеження загальності будемо розглядати симетричні відносно діагоналі з лівого нижнього в правий верхній. Сірим відмічені ті, що можливі для розташування клітини, що покриває число 2. Чорним – неможливі (рис. 9).

Для трьох можливих варіантів маємо заповнення квадрату єдиним чином, яке покаже, що повне заповнення не можливе. Порядок виставлення фігур виписаний нумерацією. Тут пам'ятаємо, що усі кутові триміно мають бути зорієнтовані однаково. Після такого заповнення ми бачимо (рис. 10), що ще дві триміно такої орієнтації немає де покласти. Так само і для усіх інших варіантів.

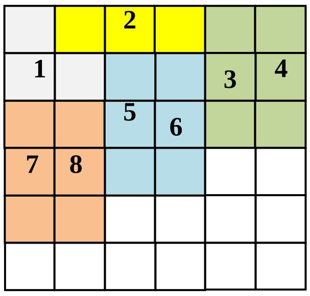


Рис. 10

7. Нехай натуральне $N > 1$, позначимо через x – найменше натуральне число, що має таку властивість: існує натуральне число $y < x - 1$ таке, що $x \mid N + y$. Доведіть, що $x = p^k$ або $x = 2p$ для деякого натурального k та простого p,

Розв'язання. Назвемо пару натуральних чисел $(x,\ y)$ *гарною*, якщо вона задовольняє умову $x \mid N + y$ та $0 < y < x - 1$.

Спочатку нагадаємо, що для довільного натурального x' серед послідовних x' натуральних чисел існує єдине число, що кратне x'. Тоді виберемо y' з множини $\{0, 1, \ldots, x'-1\}$ так, щоб $x' \mid N + y'$. Тоді пара $(x',\ y')$ стане гарною, якщо $y \neq 0,\ x'-1$. Аналогічно x' – перша компонента гарної пари, якщо воно не ділить ні $N + 0$, ні $N + (x'-1)$. Остання умова рівносильна, що x' не ділить $N - 1$. Розглянемо таку гарну пару з найменшим можливим x. Таким чином існує натуральний степінь простого числа p^k, що ділить x, але не N, так само існує натуральний степінь простого числа q^h (не обов'язково відмінне від p^k), що ділить x, але не $N - 1$. Якщо q^h – не ділить також і N, то воно є першою компонентою гарної пари. Крім того зрозуміло, що то є найменше можливе число. Аналогічна ситуація з p^k, якщо воно не ділить $N - 1$. Залишається випадок, коли $p^k \mid N - 1$ та $q^h \mid N$. Тоді прості числа $p,\ q$ – різні, а тому $x \geq 2p^k \geq 2p,\ x \geq 2q^h \geq 2q$. Тепер покажемо, що першим компонентом мінімальної пари буде $2p$ або $2q$. І з мінімальності вона має бут рівних x. Якщо N – парне, то $2p$ не ділить $N - 1$, яке є непарним числом. Аналогічно, якщо N – непарне, то шуканим є $2q$.

8. Задача № 8 () молодша ліга.

9. Назвемо триномом степені p такий многочлен $x^p + ax^q + 1$, де $p > q$ – натуральні числа, a – довільне (можливо нульове) дійсне число. Знайдіть усі пари триномів, які в добутку дають трином 15-го степеня.

Відповідь: $(x^{10} - x^5 + 1)(x^5 + 1)$, $(x^9 - x^3 + 1)(x^6 + x^3 + 1)$ та $(x^9 - x^6 + 1)(x^6 + x^3 + 1)$.

Розв'язання. Нехай $(x^p + ax^q + 1)(x^r + bx^s + 1) = x^{15} + cx^t + 1$. Зрозуміло, що $p + r = 15$, звідки $p \neq r$. Розглянемо випадки по $a,\ b$.

Випадок $a = b = 0$. Тоді $(x^p + 1)(x^r + 1) = x^{p+r} + x^p + x^r + 1$ – не є триномом, бо $p \neq r$.

Випадок $ab = 0$. Тоді без обмеження загальності вважатимемо, що $a = 0$ та $b \neq 0$, тоді

$$(x^p + 1)(x^r + bx^s + 1) = x^{p+r} + bx^{p+s} + x^p + x^r + bx^s + 1 = x^{15} + cx^t + 1 \implies$$

$$bx^{p+s}+x^p+x^r+bx^s=cx^t.$$

Якщо $p+s\neq r$, то в лівій частині будуть доданки з різними степенями $p+s$, p та r, але вони не зможуть дорівнювати двом доданкам з степенями s та t. Таким чином має бути $p+s=r$ та $b=-1$. Тоді $x^p+bx^s=cx^t$. Залишається можливість $p=s$, звідки $c=0$. Таким чином маємо таке подання: $(x^p+1)(x^{2p}-x^p+1)=x^{3p}-1$, тому шуканий трином буде при $p=5$.

Залишається випадок $ab\neq 0$, тоді

$$(x^p+ax^q+1)(x^r+bx^s+1)=x^{15}+cx^t+1\Rightarrow$$
$$x^{p+r}+ax^{q+r}+x^r+bx^{p+s}+abx^{s+q}+bx^s+x^p+ax^q+1=x^{15}+cx^t+1\Rightarrow$$
$$ax^{q+r}+x^r+bx^{p+s}+abx^{s+q}+bx^s+x^p+ax^q=cx^t.$$

Якщо $q\neq s$, то принаймні один з одночленів $bx^s,\, ax^q$ був и в лівій частині з ненульовим коефіцієнтом, бо то найменші степені. Так само при $q+r\neq p+s$ там буде принаймні один з одночленів $ax^{q+r},\, bx^{p+s}$. Одночасно рівності не можливі, бо звідти випливало б $p=r$.

Розглянемо ці можливості. Нехай спочатку $q=s$ та $q+r>p+s$. Зазначимо, що інший випадок $q+r=p+s$ зводиться до цього заміною $x=\frac{1}{y}$. Тому, якщо ми тут отримаємо відповідь, то такою заміною знайдемо ще одне розв'язання. З припущення $r>p$ матимемо, що

$$ax^{q+r}+bx^{p+q}+x^r+x^p+abx^{2q}+(a+b)x^q=cx^t.$$

Перший доданок має найбільший степінь з усіх доданків. Тому мають справджуватися рівність $ax^{q+r}=cx^t$ та скоротитися усі інші доданки. Тобто $bx^{p+q}+x^r+x^p+abx^{2q}+(a+b)x^q=0$. Оскільки степінь x^q – найменша, то має справджуватися рівність $a+b=0$. Тоді рівність має такий вигляд: $-ax^{p+q}+x^r+x^p-a^2x^{2q}=0$. Якщо $p\neq 2q$, то ці доданки не скоротяться. Тому $p=2q$ та $p+q=r$. Звідси єдине можливе значення для коефіцієнта $a=1$. Тоді маємо рівність:

$$(x^{2q}+x^q+1)(x^{3q}-x^q+1)=x^{15}+x^{4q}+1,$$

яка справджується при $q=3$. Заміною $x=\frac{1}{y}$ знаходимо останню наведену відповідь.

10. Задача № 10 () молодша ліга.

Старша ліга

1.1. Нехай $[x]$ – ціла частина числа x. Позначимо через $a_n=\frac{1}{n}([\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\ldots+[\frac{n}{n}])$. Доведіть, що $a_{n+1}>a_n$ для нескінченної кількості Чи справджується протилежна нерівність для нескінченної кількості натуральних n?

Відповідь: так.

Розв'язання. Випишемо важливі властивості цієї послідовності.

- Якщо $x\,|\,(n+1)$, то $[\frac{n+1}{x}]=[\frac{n}{x}]+1$, інакше $[\frac{n+1}{x}]=[\frac{n}{x}]$.

Подамо $n+1=lx+r$, де $0\le r<x$, тоді маємо такі випадки. При $r=0$ маємо, що $[\frac{n+1}{x}]=l$, $\frac{n}{x}=\frac{lx-1}{x}=\frac{(l-1)x+(x-1)}{x}=l-1+\frac{x-1}{x}\quad\Rightarrow\quad[\frac{n}{x}]=l-1$. При $0<r<x$ маємо, що $[\frac{n+1}{x}]=l$, $\frac{n}{x}=\frac{lx+(r-1)}{x}=l+\frac{r-1}{x}\Rightarrow[\frac{n}{x}]=l$.

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^x-1}<x.$

Це випливає з оцінки: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^x-1}<1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+\ldots+(2^x-1)\cdot\frac{1}{2^x-1}=x$

- $(n+1)a_{n+1} - na_n$ – кількість дільників числа $n+1$.

Дійсно, ліва частина дорівнює $[\frac{n+1}{1}]+[\frac{n+1}{2}]+\ldots+[\frac{n+1}{n+1}]-[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\ldots+[\frac{n}{n}]$, а далі її можна переписати як різниці $([\frac{n+1}{x}]-[\frac{n}{x}])$ – вони приймають значення 1 на кожному x, що є дільником $n+1$.

- Якщо $n>7$, то $a_n > 2$.

Дійсно, $na_n > n+[\frac{n}{2}]+(n-2) > n+3+n-2 = 2n+1$. Тут перші два доданки після першого знаку більше просто переписані, а останній – це заміна кожного наступного на найменше можливе значення, тобто на 1.

З цих властивостей випливає, що при $n = 2^m - 1$ маємо, що $a_n < a_{n+1}$. Це випливає з третьої властивості, оскільки тоді $2^m a_{2^m} - (2^m - 1)a_{2^m - 1} = m+1$ – кількість дільників 2^m. З пункту 2 маємо, що $a_{2^m-1} < m+1$, тому $2^m a_{2^m} < 2^m a_{2^m-1}$.

Навпаки, якщо $n+1>7$ і є простим, то $a_n > a_{n+1}$. Оскільки з пункту 4 $a_n > 2$, то з пункту 3 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 2 \;\Rightarrow\; (n+1)a_{n+1} - na_n < a_n \Rightarrow\; (n+1)a_{n+1} < (n+1)a_n$. Таким чином і ця нерівність справджується для нескінченної кількості натуральних n.

1.2. Задача № 1 () середня ліга

2. Задача № 2 () середня ліга

3.1. У опуклому чотирикутнику $ABCD$ найкоротша сторона AB строго менша за найдовшу сторону CD. Доведіть, що на стороні CD існує така точка E, що для довільної точки P на відрізку CD відмінної від точки E довжина відрізку O_1O_2 є сталою є сталою величиною, де O_1, O_2 – центри описаних кіл ΔAPD та ΔBPE відповідно.

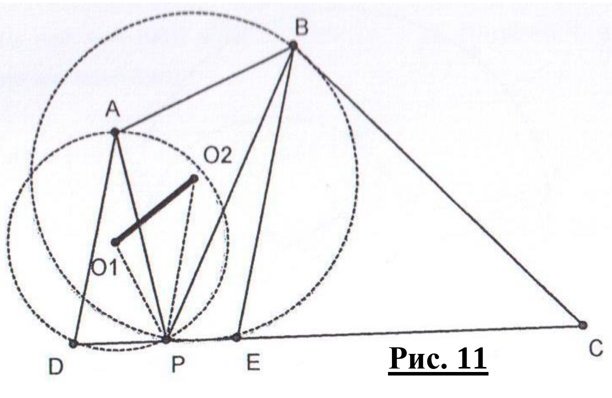


Рис. 11

Розв'язання. Спочатку доведемо таку лему.

Лема. Точка E – точка перетину прямої CD та прямої, що паралельна AB та проходить через вершину B.

Доведення. Спочатку покажемо, що точка E потрапляє саме на відрізок CD (рис. 11). Оскільки $AB \le AD$ та $BC \le CD$, то $\angle ABD \ge \angle ADB$, $\angle CBD \ge \angle CDB$. Тоді маємо, що

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC \ge \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC.$$

Аналогічно $\angle BAD \ge \angle BCD$. Тому $\angle ABC + \angle BAD \ge \angle BCD + \angle CDA \Rightarrow \angle ABC + \angle BAD \ge 180°$. Неважко показати, що $\angle ABC + \angle BAD > 180°$, бо інакше цей чотирикутник – паралелограм, що суперечить умові задачі.

Будемо рухати точку C вздовж відрізку CD до точки D. Тоді там буде точка E', для якої $\angle E'BA + \angle BAD = 180°$, тому $BE' \| AD \Rightarrow E = E'$.

Тепер покажемо, що для довільної точки $P \in CD$, $P \ne E$, справджується умова $\angle O_1PO_2 = \angle APB$.

Випадок 1. $\angle ADP < 90°$, тоді $\angle BEC < 90°$, тоді O_1 та C лежать по різні боки від прямої AP, O_2 та C – по різні боки від прямої BP. Тоді простим перерахунком кутів маємо (рис. 1):

$$\angle APO_1 = 90° - \angle ADP + \angle DBC = 90° - \angle BEC = \angle BPO_2 \;\Rightarrow\; \angle O_1PO_2 = \angle APB.$$

Випадок 2. $\angle ADP \geq 90°$, тоді $\angle BEC \geq 90°$, тоді O_1 та C лежать по один бік від прямої AP, O_2 та C – по один бік від прямої BP. Тоді простим перерахунком кутів маємо (рис. 12):

$$\angle APO_1 = \angle ADP - 90° = \angle BEC - 90° = \angle BPO_2 \;\Rightarrow\; \angle O_1PO_2 = \angle APB.$$

Тепер запишемо теорему синусів для відповідних відрізків та кіл:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{2O_1P\sin\angle ADP}{2O_2P\sin\angle BEP} = \frac{O_1P}{O_2P}.$$

Звідси отримуємо, що $\Delta O_1PO_2 \sim \Delta APB$, тому

$$O_1O_2 = \frac{O_1O_2 \cdot AB}{AP} = \frac{AB}{2\sin\angle ADC} = const,$$

що й треба було показати.

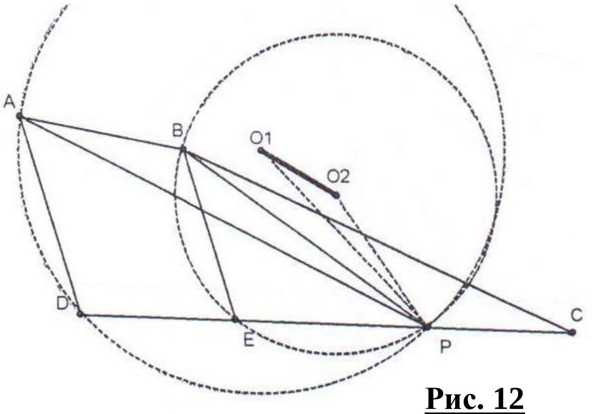


Рис. 12

3.2. Задача № 3 () середня ліга

4. Задача № 4 () середня ліга

5. Яку найбільшу кількість ферзів можна розташувати на шахівниці розміром 2017×2017 таким чином, щоб кожний ферзь був атакований не більше ніж одним іншим?

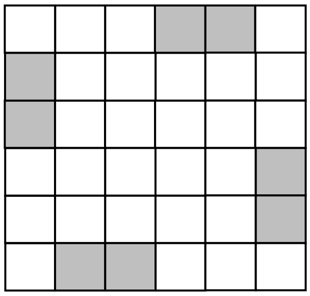


Рис. 13

Відповідь: 2689 ферзів.

Розв'язання. Позначимо $n = 2017$. Припустимо, що вдалося розмістити $m > n$ ферзів належним чином. У жодному рядку не може бути більше двох ферзів. Таким чином маємо не менше ніж $m - n$ рядків, в яких розташовані рівно 2 ферзі. По одному ферзю розташовані не більше ніж у $m - 2(m-n) = 2n - m$ рядках. Аналогічні оцінки для стовпчиків. З іншого боку, кожний такий ферзь є єдиним або в рядку, або в колонці. Тому $m \leq 2(2n - m) \;\Rightarrow\; m \leq [\frac{4n}{3}] = 2689$.

Покажемо спочатку, що на шахівниці 6×6 можна розмістити 8 ферзів (рис. 13).

Тепер покажемо, як на шахівниці 335×335 можна розташувати 335 ферзів таким чином, щоб жодні дві не будуть атакувати одна іншу. Розташуємо ферзі в клітинах з координатами $(x,\, y)$, де $1 \leq x,\, y \leq 335$ та $y \equiv 2x \pmod{335}$. Тут маємо, що усі рядки та стовпчики різні, а крім того попарно різними є вирази $x + y$ за модулем 335, а також $x - y$ (рис. 14).

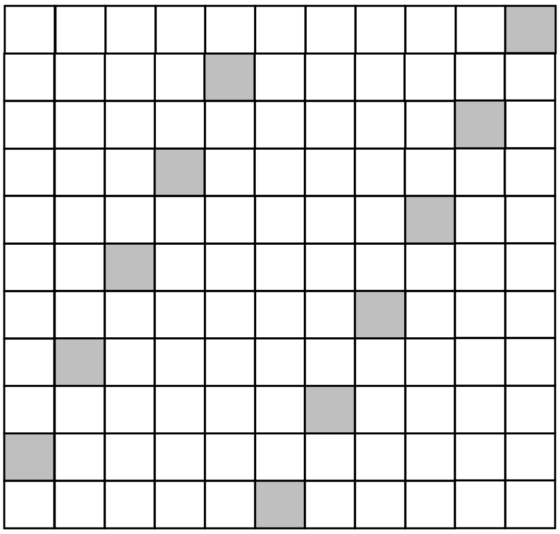


Рис. 14

Тепер покажемо, як належним чином заповнити квадрат 2017×2017. На рис. 15, світло сірі квадратики – то є квадрати 335×335, що заповнені ферзями як на рис. 2. Темно сіра клітинка заповнюється як квадрат 6×6 як на рис. 1. І чорний квадрат – поодинока клітинка, в якій стоїть ферзь. Разом маємо таку кількість ферзів:

$$8 \cdot 335 + 8 + 1 = 2689.$$

6. Задача № 6 () середня ліга

7. Задача № 7 () середня ліга

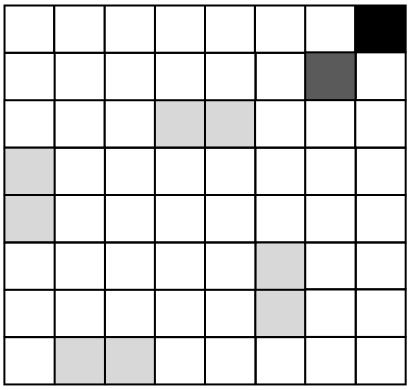


Рис. 15

8. Чи існує функція $f: N \to N$, що для усіх натуральних $m,\ n$ задовольняє умову:

$$f(mf(n)) = f(m)f(m+n)+n?$$

Відповідь: не існує.

Розв'язання. Підстановку в задану рівність m та n будемо позначати як $P(m,\ n)$. Нехай $c = f(1)$, тоді маємо такі рівності.

$P(1,\ 1)$: $f(c) = cf(2)+1 \Rightarrow c \geq 3$ та $f(c) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ c)$. Далі маємо, що

$$P(1,\ n):\ f(f(n)) = cf(n+1)+n, \qquad \textbf{(1)}$$

$$P(n,\ 1):\ f(cn) = f(n)f(n+1)+1, \qquad \textbf{(2)}$$

Звідси

$$f(f(n)) \equiv n \ (\mathrm{mod}\ c),\ \forall n \in N. \qquad \textbf{(3)}$$

Якщо $n \,\vdots\, c$, то з (3) матимемо, що

$$P(f(n),\ 1):\ f(cf(n)) = f(f(n))f(f(n)+1)+1 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ c),$$

$$P(c,\ n):\ f(cf(n)) = f(c)f(c+n)+n \Rightarrow f(c+n) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ c).$$

Тому $\forall n \,\vdots\, c$: $f(n) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ c)$.

$$P(c,\ n):\ f(cf(n)) = f(c)f(c+n)+n \Rightarrow f(c+n) \equiv 1-n \ (\mathrm{mod}\ c),\ \forall n \in N.$$

Тоді при $n = c+2$ маємо, що з (2):

$1 \equiv f(c+2)f(c+3)+1 \equiv (-1)\cdot(-2)+1 \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\ c)$,

що неможливо, оскільки $c \geq 3$. Одержана суперечність показує, що шуканої функції не існує.

9.1. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, що $\forall x,\ y \in R$ задовольняють рівність:

$$f(xy-1)+f(x)f(y) = 2xy-1.$$

Відповідь: $f(x) = x$, $f(x) = -x^2$.

Розв'язання. Позначимо задану рівність через (1). Покладемо в (1) $x = 0$, тоді

$$f(-1)+f(0)f(y) = -1.$$

Якщо $f(0) \neq 0$, то $f(x) = const$, але перевіркою переконуємося, що жодна стала функція умови не задовольняє. Таким чином $f(0) = 0$.

Тепер підставимо в (1) $x = y = 1 \Rightarrow f^2(1) = 1$.

Випадок 1. $f(1) = 1$. Покладемо в (1) $x = xy,\ y = 1$:

$$f(xy-1)+f(xy) = 2xy-1.$$

Тоді з (1) матимемо, що

$$f(xy) = f(x)f(y). \qquad (2)$$

Зробимо такі підстановки в (1) з урахуванням рівності (2): $y = 1$, а також $x = x+1,\ y = 1$:

$$f(x-1)+f(x) = 2x-1 \text{ та } f(x)+f(x+1) = 2x+1. \qquad (3)$$

Тепер підставимо $x = y$ в (1):

$$2x^2-1 = f(x^2-1)+f^2(x) = f(x+1)f(x-1)+f^2(x) =$$

$$= (2x+1-f(x))(2x-1-f(x))+f^2(x) = 2f^2(x)-4xf(x)+4x^2-1 \Rightarrow$$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2 = 0 \Rightarrow (f(x)-x)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = x.$$

Перевіркою пересвідчимося, що ця функція задовольняє умови.

Випадок 2. $f(1) = -1$. Зробимо заміни, що аналогічні випадку 1 і отримаємо схожі результати:

$$f(xy) = -f(x)f(y),\ f(x-1) - f(x) = 2x-1 \text{ та } f(x+1) - f(x) = -(2x+1).$$

$$2x^2 - 1 = f(x^2-1) + f^2(x) = -f(x+1)f(x-1) + f^2(x) =$$

$$= -(-(2x+1) + f(x))(2x-1+f(x)) + f^2(x) = 2f(x) + 4x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = -x^2.$$

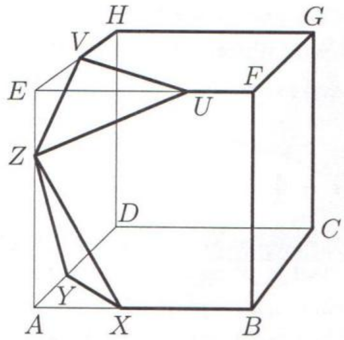
Перевіркою так само пересвідчуємося, що функція задовольняє умови.

9.2. Задача № 9 () середня ліга

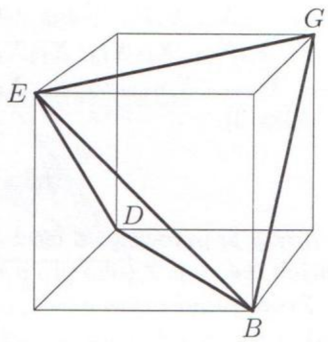
10.1. Всередині прямокутного паралелепіпеду (ПП) одиничного об'єму розглядається опуклий многогранник M, проекція якого на кожну з граней ПП співпадає з усією гранню. Який найменший об’єм може мати многогранник M?

<u>Відповідь</u>: $\frac{1}{3}$

<u>Розв’язання</u>. Позначимо вершини ПП як A, B, C, D на нижній грані, та відповідно над ними E, F, G, H. Зрозуміло, що многогранник M має спільні точки з кожним ребром, інакше його проекція не на кожну грань буде з нею співпадати.



<u>Рис. 16</u>



<u>Рис. 17</u>

Розглянемо многогранник M', що є опуклою оболонкою цих 12 точок (не обов’язково усі різні), що розташовані по одній на кожному ребрі. Тобто він утворюється відрізанням від ПП відповідних частин по кутах куба.

Нехай X, Y, Z, U, V – послідовні вершини многогранника M', що лежать відповідно на ребрах AB, AD, AE, EF та EH (рис. 16). Тоді нехай $AX = x$, $AY = y$, $AZ = z$, $EU = u$, $EV = v$, $EZ = w$ та $AB = a$, $BC = b$, $AE = c$. Тоді $x, u \le a$, $y, v \le b$, $z + w = c$. Тоді

$$V_{AXYZ} + V_{EUVZ} = \tfrac{1}{6}(xyz + uvw) \le \tfrac{1}{6}(abz + abw) = \tfrac{1}{6}abc = \tfrac{1}{6}.$$

Оскільки аналогічно відрізатимуться кути вздовж кожного вертикального ребра, то

$$V_M \ge V_{M'} \ge 1 - \tfrac{4}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

На рис. 17 зображений шуканий многогранник, на якому одержана оцінка досягається.

10.2. Задача № 10 () молодша ліга