"Обмірковуй повільно,
а схвалене рішення виконуй швидко".
Ісократ

Математичний бій № 1

Молодша ліга

1.1. Анжела хоче розбити 2018 многочленів $(x-1)$, $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$, …, $(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2018)$ на дві групи, щоб виконувалася така умова. Якщо позначити через $P(x)$ – добуток многочленів у першій групі, а $Q(x)$ – добуток у другій, то $P(x)$ має ділитися націло на $Q(x)$. Який найменший степінь може мати многочлен $\frac{P(x)}{Q(x)}$?

Відповідь: 1009.
Розв'язання. Випишемо скільки разів двочлени входять в усі многочлени. Як легко побачити $(x-k)$ входить $2019-k$ разів. Щоб $P(x)$ ділилося на $Q(x)$ треба, щоб кожний одночлен в $P(x)$ входив в степені не меншому, ніж $Q(x)$. Якщо одночлен має парний степінь, то вони можуть бути рівними, якщо – непарний, то в чисельнику степінь має бути принаймні на 1 більша. Таким чином найменший степінь, що може мати частка $\frac{P(x)}{Q(x)}$, дорівнює 1009. Таким чином залишається навести відповідний приклад:
$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)}\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\cdot\ldots\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2017)(x-2018)}{(x-1)(x-2)(x-3)...(x-2017)}=(x-2)(x-4)...(x-2018).$$

1.2. У відкритій першості України з шахів майстри грали між собою в одне коло, тобто кожний з кожним зіграли рівно один раз. Коли усі партії були зіграні, до цієї першості вирішили долучитися ще декілька (більше одного) шахістів. Усі зіграні раніше партії були зараховані у новій першості, але довелося зіграти додатково 2018 партій, щоб кожний зіграв з кожним рівно один раз. Скільки шахістів долучилися до першості?

Відповідь: 4.
Розв'язання. Нехай, наприклад, спочатку було n учасників, а після додавання стало m. До додавання гравців було зіграно $\frac{1}{2}n(n-1)$ партій, а після додавання – усього було зіграно $\frac{1}{2}m(m-1)$. За умовами задачі має справджуватися рівність:
$$\frac{1}{2}m(m-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=2018 \Rightarrow (m-n)(m+n-1)=4036.$$
Оскільки числа $m-n$ та $m+n-1$ різної парності, $m+n-1>m-n$ та $4036=4\cdot1009$, то можливі такі варіанти:
$$\begin{cases} m-n=1, \\ m+n-1=4036, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} m-n=4, \\ m+n-1=1009. \end{cases}$$
Звідси матимемо, що у першому випадку $\begin{cases} m=2019, \\ n=2018, \end{cases}$ у другому $\begin{cases} m=507, \\ n=503. \end{cases}$

У першому випадку до першості долучився рівно $m-n=1$ гравець, що суперечить умові задачі. Тому можливий лише другий випадок, коли до першості долучилися $m-n=4$ гравці.

2. Для додатних чисел $a,\ b$ визначимо таким чином операцію $a \bullet b = \frac{ab+1}{a+b}$. Обчисліть значення виразу: $(\ldots(((2018 \bullet 2017) \bullet 2016) \bullet 2015) \bullet \ldots \bullet 2) \bullet 1$

Відповідь: 1.
Розв'язання. Нехай $A = (\ldots(((2018 \bullet 2017) \bullet 2016) \bullet 2015) \bullet \ldots \bullet 2)$, але тоді залишається обчислити значення виразу $A \bullet 1 = \frac{A+1}{A+1} = 1$.

3. На стороні AB гострокутного трикутника ABC вибрана точка K, точка M – середина сторони BC, відрізки AM та CK перетинаються в точці F. Виявилося, що $KF = AK$. Доведіть, що $CF = AB$.

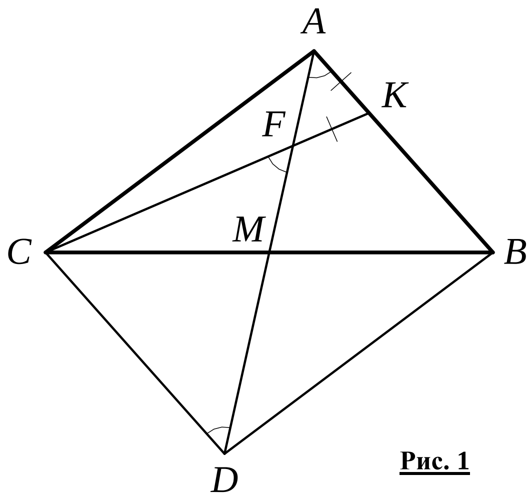

Рис. 1

Розв'язання. Відкладемо на прямій AM відрізок $MD = AM$ (рис. 1). Тоді $\Delta MDC = \Delta AMB$ за рівними вертикальними кутами та сторонами $MD = AM$ та $MC = BM$. Звідси $\angle MDC = \angle BAM$, з умов задачі випливає також, що $\angle FAK = \angle KFA = \angle CFD = \angle CDF$. Звідси ΔFDC – рівнобедрений, тому остаточно маємо, що $CF = CD = AB$, що й треба було довести.

4.1. У прямокутній трапеції $ABCD$ бічна сторона AD перпендикулярна основам. Доведіть, що коло з діаметром AD дотикається до сторони BC тоді і тільки тоді, коли коло з діаметром BC дотикається до сторони AD.

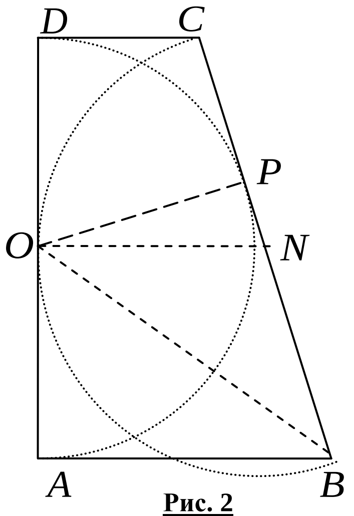

Рис. 2

Розв'язання. Припустимо, що коло з діаметром AD дотикається до сторони BC у деякій точці P (рис. 2). Тоді $BP = BA,\ CD = CP$, тому $BC = DC + AB$. Нехай N – середина сторони AD, тоді $NO = NB = NC$. Тому O лежить на колі з діаметром BC. З урахуванням того, що $AD \perp NO$, коло з діаметром BC дотикається до сторони AD.
Припустимо тепер, що коло з діаметром BC дотикається до сторони AD у деякій точці M. Якщо провести пряму $MK \perp AD$, то вона має пройти через центр кола, оскільки радіус перпендикулярний дотичній у точці дотику. Зрозуміло, що центром того кола має бути середина діаметра BC, тобто точка N. Таким чином $O = M$. Оскільки $NO = NB = NC \ \Rightarrow\ \angle OBN = \angle BON = \angle OBA$, тому BO – бісектриса $\angle ABC$, аналогічно CO – бісектриса $\angle BCD$, тобто коло з центром в точці O дотикається до прямих $AB,\ BC$ та CD, що й треба було довести.

4.2. На землі лежить металевий стержень довжиною 7 метрів. Людина може підняти його один кінець та перекинути так, що інший кінець залишиться на місці. Скільки разів якнайменше треба його піднімати та повертати так, щоб його пересунути з положення AB в положення $A'B'$ (рис. 3). Опишіть відповідну процедуру, що забезпечує цю найменшу кількість.

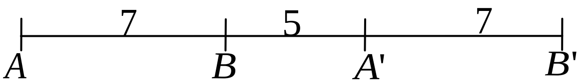

Рис. 3

Відповідь: 3 рази.
Розв'язання. Розглянемо коло k з центром у точці

B та k' з центром у точці B' радіусами 7, вони перетинаються у двох точках. Позначимо одну з цих точок через A''. Далі пересування стержня робиться таким чином: $A \to A''$, $B \to B'$ та $A'' \to A'$.
Очевидно, що за меншу кількість рухів це зробити не можна, бо тоді треба одразу перемістити $A \to A'$ або $B \to B'$, що очевидно неможливо.

5.1. Натуральні числа $1 < k < n$, знайдіть найменше m, для якого справджується умова: на шахівниці $n \times n$ можемо довільним чином розставити m тур таким чином, що з них можна вибрати k таких, що жодні дві не атакуватимуть одна одну.

Відповідь: $m = n(k-1)+1$.

Розв'язання. Якщо ми матимемо меншу кількість тур, то ми можемо їх усі розставити в $k-1$ рядок. Тоді максимум можуть бути $k-1$ тура, що не атакують одна іншу.

Нехай тепер стоїть зазначена кількість тур, тобто $n(k-1)+1$. Занумеруємо рядки та стовпчик числами від 1 до n. Кожній клітинці, що знаходиться в i-му рядку та j-му стовпчику число $(i-j) \pmod n$, тобто число в межах від 0 до $n-1$. Тепер маємо такі властивості заданої нумерації полів шахівниці.

Для кожного числа від 0 до $n-1$ полів, що занумеровані саме цим числом, рівно n.
Тури, що розташовані на полях з однаковими числами, не атакують одні іншу.
З принципу Діріхле існує число від 0 до $n-1$, на полях з цим номером розташовані не менше k тур.

5.2. У родині n дітей. Яка найбільша кількість з цих n може мати одночасно брати та сестру?

Відповідь: $n \le 2$, таких дітей не існує, $n = 3$ таких дітей максимум 2, при $n \ge 4$ усі n.
Розв'язання. Якщо $n \le 2$ таких дітей не існує, що неважко зрозуміти простим перебором варіантів: ХХ, ДД, ХД.
Якщо $n = 3$, то можливі варіанти ХХХ та ДДД (тоді шуканих дітей не існує), а при варіантах ХХД та ДДХ – ті діти, які мають однакову стать задовольняють умову, тому максимум $n = 2$.
При $n \ge 4$ достатньо, щоб в родині були ХХДД, тоді кожна дитина матиме і брата, і сестру.

6. За круглим столом зібралися 6 жителів, кожен з яких був брехуном або лицарем. Брехуни при відповіді на запитання завжди брешуть, а лицарі навпаки – завжди кажуть правду. Кожен з шести у відповідь на запитання, що ви можете сказати про тих, хто сидить за столом, сказав: "3 трьох жителів – двоє поруч та один точно напроти – рівно два брехуни". Скільки може насправді сидіти за столом рицарів? Вкажіть усі можливі відповіді.

Відповідь: 0 лицарів.
Розв'язання. Розіб'ємо усіх сидячих на дві трійки (1-й, 3-й і 5-й) та (2-й, 4-й і 6-й), що сидять через один одне від одного. Кожен житель робить висловлювання про іншу трійку, не ту, в якій він сам. Якщо у групі є лицар, тобто він каже правду, то й усі в його групі мають бути лицарями, бо вони сказали те саме про тих самих трьох жителів іншої групи. Але тоді усі 6 мають бути лицарями – суперечність. Висновок – лицарів за столом немає.

7. Знайдіть найбільше натуральне число n, яке є дільником виразу p^4-1 для будь-якого простого числа $p > 3$.

Відповідь: $2^4 \cdot 3 = 48$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що наведене число дійсно є дільником кожного з таких чисел. Оскільки $p > 3$ – просте, то $p^4 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid p^4 - 1$.

Так само за модулем $2^4 = 16$ маємо, що $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 \pmod{16} \Rightarrow$ $p^2 \equiv 1, 9 \pmod{16} \Rightarrow p^4 \equiv 1 \pmod{16}$ і знову маємо, що $16 \mid p^4 - 1$.

Крім того, оскільки шукане число d має ділити $5^4 - 1$ та $7^4 - 1$, тому воно ділить і їхній НСД. $5^4 - 1 = 624 = 48 \cdot 13$, $7^4 - 1 = 2400 = 48 \cdot 50 \Rightarrow$ шуканий НСД і є 48.

8. Множина A містить натуральні числа, що не кратні 7. Яку найменшу кількість елементів має містити множина A, щоб вона точно містила підмножину, сума квадратів елементів якої кратна 7?

Відповідь: 7.

Розв'язання. Квадрати елементів, що не кратні 7 мають остачі $1, 2, 4$. Покажемо, що A має містити 7 елементів. Меншу кількість воно не може містити, бо достатньо вибрати 6 чисел, які мають однакову остачу при діленні на 7, наприклад, усі з остачею 1. Тоді сума квадратів будь-якої кількості елементів A має остачу від 1 до 6 при діленні на 7, а тому не буде кратна 7.

Нехай у множині A буде 7 елементів. Якщо там є 3 елементи з різними остачами, тобто $1, 2, 4$, то вже сума цих елементів задовольняє умову. Якщо усі елементи з однаковою остачею, то їхня сума усіх 7 елементів задовольняє умову. Тому залишається просто перебрати випадок, коли там є елементи з двома різними остачами.

Якщо там є остачі $1, 2$. То якщо з остачею 2 є 3 чи більше елементів, то $1+2+2+2=7$ шукана підмножина знайдена. Якщо там не більше 2 елементів з остачею 2, то є принаймні 5 елементів з остачею 1 і шуканий набір $1+1+1+1+1+2=7$.

Якщо там є остачі $1, 4$. То якщо з остачею 1 є 3 чи більше елементів, то $4+1+1+1=7$ шукана підмножина знайдена. Якщо там не більше 2 елементів з остачею 1, то є принаймні 5 елементів з остачею 4 і шуканий набір $4+4+4+4+4+1=21$.

Якщо там є остачі $4, 2$. То якщо з остачею 4 є 3 чи більше елементів, то $2+4+4+4=14$ шукана підмножина знайдена. Якщо там не більше 2 елементів з остачею 4, то є принаймні 5 елементів з остачею 2 і шуканий набір $2+2+2+2+2+4=14$.

9. Розглянемо квадрат 2018×2018. Усі його клітинки (квадратики 1×1) зафарбовані в синій чи жовтий колір, при цьому усі клітини, що лежать на зовнішній межі є синіми. Назвемо усі пари клітин, що мають різний колір та мають спільну сторону *яскравими*. Доведіть, що кількість яскравих пар – парна.

Розв'язання. Розглянемо одну жовту клітину, а також усі ті жовті клітини, до яких з цієї можна дістатися, рухаючися лише по жовтих клітинах через сторони. Усю цю сукупність клітин назвемо *лагуною*. Вона має парний периметр. Це легко зрозуміти, що якщо вибрати якійсь, наприклад, вертикальний відрізок довжини 1 та жовтий квадрат лагуни, що його містить. Якщо далі рухатися по горизонталі ми знайдемо відповідний цьому інший вертикальний відрізок (можливо в тій самій жовтій клітині). Але звідси випливає, що кількість яскравих пар – парна.

10.1. Заданий кортеж $S = (a_1, a_2, ..., a_n)$ з невід'ємних цілих чисел. Кортеж $T = (b_1, b_2, ..., b_n)$ називається похідним кортежем від кортежу S, якщо $\forall i = \overline{1, n}$ число b_i дорівнює кількості елементів кортежу S, які розташовані правіше від a_i та менші від a_i. В послідовності кортежів (S_n), $n = 0, 1, 2, ...$ кортеж S_{k+1} є похідним від кортежу S_k. Доведіть, що для деякого j справджується рівність: $S_j = S_{j+1}$.

Розв'язання. Покажемо, що починаючи з S_1 не буде мати члена, що буде зменшуватися. Тобто для $S_k = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ та $S_{k+1} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ маємо, що $\forall i = \overline{1, n}$ $a_i \le b_i$. Дійсно, нехай $a_i = x \le n - i$, тоді $i \le n - x < n - x + 1$.

Оскільки $a_n \le 0$, $a_{n-1} \le 1$, ..., $a_{n-x+1} \le x - 1$, то ми маємо шукані x чисел, що розташовані правіше від a_i. Тому $b_i \ge x = a_i$.

Але ж ці числа обмежені і тому не можуть зростати необмежено, тому починаючи з деякого номера множини не будуть змінюватися.

10.2. В рядок зліва направо виставлені фішки з номерами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Автомат по черзі бере найлівішу фішку та ставить її посередині, далі бере найправішу і знову ставить посередині, далі знову найлівішу і так далі. Тобто після першого кроку ми матимемо такий порядок номерів фішок зліва направо: $2, 3, 4, 1, 5, 6, 7$, після другого – $2, 3, 4, 7, 1, 5, 6$. Яка фішка опиниться в центрі після 2018 кроку?

Відповідь: 7.

Розв'язання. Якщо почати робити кроки, то легко безпосередньо переконатися, що після 7 кроків фішки вишукуються у зворотному порядку: $7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$. Оскільки $2018 = 288 \cdot 7 + 2$, то після кількості ходів, що кратна 14, ситуація повертається у початкову. Таким чином буде зроблено ще 2 ходи і в середину потрапить фішка за номером 7.

Середня ліга

1. Відомо, що a, b, c – сторони трикутника. Доведіть, що справдується нерівність:

$$\frac{a+b+c}{a+b-c} \cdot \frac{c+a-b}{b+c-a} \ge \frac{9(3a-5b+3c)}{3a+5b-3c}.$$

Для трикутника з яким найбільшим кутом може мати місце рівність?

Відповідь: $90°$.

Розв'язання. Визначимо стандартним чином x, y, z, для яких $a = x + y$, $b = y + z$ та $c = z + x$. Тоді задана в умові нерівність перепишеться таким чином:

$$\frac{x(x+y+z)}{yz} \cdot \frac{c+a-b}{b+c-a} \ge \frac{9(3x-y-z)}{4y+x}.$$

Якщо зробити перетворення та розкрити дужки. То матиме таку нерівність:

$$4x^2y + x^2z + 4y^2x + z^2x + 9y^2z + 9z^2y + 5xyz \ge 27xyz.$$

Далі маємо: $4x^2y + 9z^2y \ge 12xyz$, $x^2z + 9y^2z \ge 6xyz$ та $4y^2x + z^2x \ge 4xyz$, звідки випливає наведена нерівність.

Рівність можлива за умови: $2x = 3z$, $x = 3y$ та $2y = z$ $\Rightarrow$ $x : y : z = 3 : 1 : 2$ $\Rightarrow$ $a : b : c = 4 : 3 : 5$. Звідки бачимо, що трикутник прямокутний.

2. Задача № 2 () молодша ліга.

3. Позначимо через $c(O, R)$ – описане коло гострокутного трикутника ABC $(AB < AC < BC)$, точки D, E, G – точки дотику вписаного кола до сторін BC, AC та AB відповідно. Кола c_1, c_2 та c_3 що описані навколо ΔAEG, ΔBDG та ΔCDE

відповідно, перетинають вдруге коло c у точках A', B' та C' відповідно. Доведіть, що чотирикутник $DEA'B'$ вписаний.

Розв'язання. Дивись розв'язання **задачі 3** старшої ліги.

4. Коло описане навколо многокутника, точки дотику утворюють многокутник, що вписаний в це коло. Доведіть, що добуток відстаней від довільної точки M на колі до сторін одного многокутника дорівнює добутку до сторін іншого многокутника. Відстань від точки до сторони розуміється як відстань від точки до відповідної прямої, на якій розташована ця сторона.

Розв'язання. Позначимо через a_1, a_2 – дотичні до кола k в точках A_1, A_2 та розглянемо точку X на колі k (рис. 4). Позначимо через P_1, P_2, P – основи перпендикулярів з точки X на прямі a_1, a_2 та A_1A_2, доведемо тоді, що $PX^2 = P_1X \cdot P_2X$.

З вписаних кутів маємо, що $\angle A_1XA_2 = \alpha$, так само $\angle PXP_2 = \alpha$, тому $\Delta A_1PX \sim \Delta A_2P_2X \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2X}{A_2X} = \frac{PX}{A_1X}$ та аналогічно $\frac{P_1X}{A_1X} = \frac{PX}{A_2X}$. Звідси отримуємо бажану рівність. З отриманої рівності випливає твердження задачі.

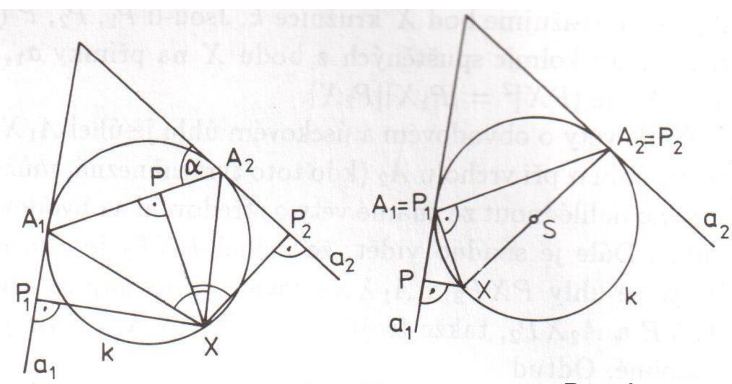

Рис. 4

5. Задача № 5.1 () молодша ліга.

6. Знайдіть, якій найдовший шлях може пройти шаховий король на шахівниці 8×8 так, щоб побувати на кожному полі рівно один раз та повернутися на початкове поле, і щоб його шлях утворював ламану, що не має само перетинів.

Відповідь: $36\sqrt{2} + 32$.

Розв'язання. Розглянемо цей шлях, що має максимальну довжину. Фактично центри квадратів утворюють квадрат 7×7, і ламана розбиває квадрат на внутрішню частину та зовнішню. За формулою Піка площа внутрішнього многокутника $S = \frac{1}{2}h + u - 1$, де h, u – кількість вузлів, що лежать на межі та всередині ламаної, що обмежує многокутник. Усього вузлів 64, тому $S = \frac{64}{2} + 0 - 1 = 31$, тому площа зовні 18. Кожний відрізок довжини $\sqrt{2}$ робить так, що половина квадрату 1×1 залишається зовні квадрату, а половина – всередині. Тому максимум діагональних відрізків буде при $\frac{1}{2}d \le 18$. Тому їхня максимальна кількість – 36.

Залишається навести приклад, де рівно 36 діагональних розрізів. Наприклад, такий, що на рис. 5.

Сумарна довжина $36\sqrt{2} + 32$.

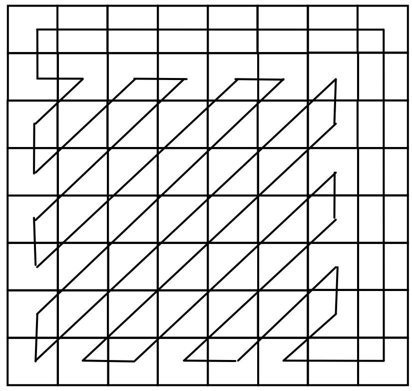

Рис. 5

7. Задача № 7 () молодша ліга.

8. На дошці записані числа 2016 та 47. Андрій та Бела грають в таку гру. Вони по черзі, розпочинає Андрій, можуть вибрати два довільні числа, що записані на дошці, наприклад, $a > b$ та записати на дошку їхню різницю $a - b$, якщо вона ще не була записана на дошці. Програє той, хто не може зробити ходу. Хто переможе в цій грі, якщо кожний прагне виграти?

Відповідь: Бела виграє.
Розв'язання. Нехай на дошці перед завершенням гри записана множина чисел $B \subset \{1, 2, \ldots, 2016\}$. Нехай $m = \min B$ та $n \in B$. Тоді з алгоритму Евкліда випливає, що $m \mid n$. Дійсно, з рівності $n = qm + r$, якщо $0 < r < m - 1$, то на дошці може бути записаним число $r = n - qm < m$ – суперечність з мінімальним m. Зрозуміло, що оскільки $(2016, 47) = 1$, то $1 \in B$ з того самого алгоритму Евкліда. Далі просто ММІ по l показуємо, що $n - l \in B$. Для цього достатньо від 2016 віднімати 1. Таким чином $B = \{1, 2, \ldots, 2016\}$ і гра триває рівно 2014 ходів. Тому перемагає Бела.

9. На яку найбільшу кількість частин можуть розрізати площину n променів?

Відповідь: $\frac{1}{2}n(n-1)+1$.
Розв'язання. Позначимо через $p(n)$ – кількість шуканих частин. Тоді очевидно, що $p(1) = 1$ та $p(2) = 2$. Зрозуміло, що $p(n+1) \le p(n) + n$. Покажемо, що завжди можна досягти оцінки $p(n+1) = p(n) + n$.

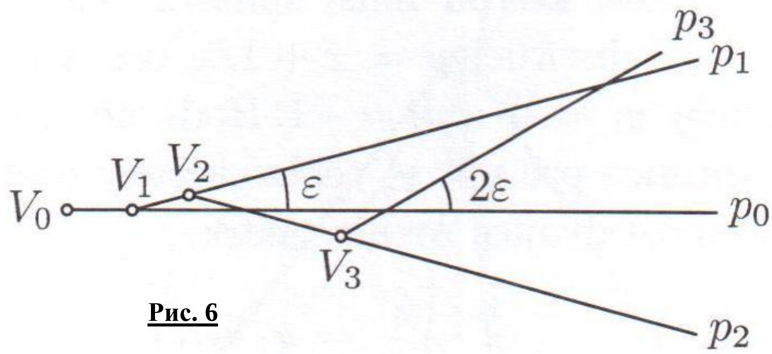

Рис. 6

Виберемо $\varepsilon > 0$ таким, щоб $n\varepsilon < 90°$. Розглянемо промінь p_0 з початком у точці V_0. На p_0 вибираємо точку V_1 та проводимо промінь p_1 під кутом ε до p_0 (рис. 6). Далі будуємо V_2 та p_2 як це показане на рис. 1, під кутом ε до прямої p_0 в іншому напрямі. Далі будуємо аналогічно прямі $p_2, \ldots, p_k$, $k \le n$. При цьому пряма p_k, а також відрізок $V_k V_{k+1}$ перетинає усі промені p_i, $i = \overline{0, k-1}$. Таким чином пари променів p_{2l-1} та p_{2l} мають кут $l\varepsilon$ з променем p_0. За побудовою, проведення кожного нового променя p_k надає k нових частин на площині, тому що кожний відрізок між точками перетину p_k та променями p_i, $i = \overline{0, k-1}$ породжує нову частину розбиття площини. Звідси остаточно маємо, що

$$p(n) = p(n-1) + (n-1) = \ldots = (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 + P(1) = \tfrac{1}{2}n(n-1) + 1.$$

10. Задача № 10.1 () молодша ліга.

Старша ліга

1.1. Функція $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\forall x,\ y \in \mathrm{R}$, $\forall t \in [0; 1]$ задовольняє такі умови:

$$f(x+y) \le f(x) + f(y) \text{ та } f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y).$$

Доведіть, що $\forall n \ge 3$ та $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{R}$ справджується нерівність:

$$f(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n-2)(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)) \ge$$
$$\ge f(x_1 + x_2) + f(x_1 + x_3) + \ldots + f(x_1 + x_n) +$$
$$+ f(x_2 + x_3) + \ldots + f(x_2 + x_n) + \ldots + f(x_{n-1} + x_n).$$

Розв’язання. Доведемо ММІ. База індукції для $n=3$. Виберемо довільні $x,\ y,\ z$. Принаймні два з них, наприклад, $x,\ y$ -- одного знаку. Якщо $x \ge 0$, то

$$z+(x+y+z)=(x+z)+(y+z) \text{ та } z \le x+z,\ y+z \le x+y+z.$$

З пункту ***а)*** маємо, що

$$f(x+z)+f(y+z) \le f(z)+f(x+y+z),$$

додамо сюди першу нерівність з умови задачі і матимемо, що

$$f(x+y)+f(x+z)+f(y+z) \le f(x)+f(y)+f(z)+f(x+y+z),$$

база індукції доведена.

Якщо $x<0$, то $x+y+z \le y+z$, $z+x \le z$ і далі все доводиться аналогічно попередньому випадку.

Нехай твердження доведене для деякого n і довільних n чисел. Розглянемо тепер довільні $n+1$ число $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Застосуємо твердження для $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ та $x_n + x_{n+1}$:

$$\begin{gathered}
f(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+(x_n+x_{n+1}))+\\
+(n-2)(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+(f(x_n)+f(x_{n+1}))) \ge\\
\ge f(x_1+x_2)+f(x_1+x_3)+\ldots+f(x_1+x_{n-1})+\\
+f(x_2+x_3)+\ldots+f(x_2+x_{n-1})+\ldots+f(x_{n-2}+x_{n-1})+\\
+f(x_1+x_n+x_{n+1})+f(x_2+x_n+x_{n+1})+\ldots+f(x_{n-1}+x_n+x_{n+1}).
\end{gathered}$$

Щоб отримати завершення доведення до цієї нерівності слід додати такі:

$$f(x_k+x_n+x_{n+1}) \ge f(x_k+x_n)+f(x_k+x_{n+1})+f(x_n+x_{n+1})-f(x_k)-f(x_n)-f(x_{n+1}).$$

1.2. Функція $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ $\forall x,\ y\in\mathrm{R}$, $\forall t\in[0;\ 1]$ задовольняє такі умови:

$$f(x+y) \le f(x)+f(y) \text{ та } f(tx+(1-t)y) \le tf(x)+(1-t)f(y).$$

Доведіть, що $\forall a \le b \le c \le d$ таких, що $b-a=d-c$ справджується нерівність:

$$f(b)+f(c) \le f(a)+f(d).$$

Розв’язання. Позначимо $t=\frac{d-b}{d-a}=\frac{c-a}{d-a}\in[0;\ 1]$. Тоді $b=ta+(1-t)d$, $c=(1-t)a+td$. Тоді з другої умови:

$$f(b)=f(ta+(1-t)d) \le tf(a)+(1-t)f(d) \text{ та } f(c)=f((1-t)a+td) \le (1-t)f(a)+tf(d).$$

Після додавання цих нерівностей отримаємо шукану нерівність.

2.1. Заданий відрізок AB довжиною 1. Декілька елементарних частинок одночасно стартують від точки A в напрямі точки B, по досягненні точки B, вони миттєво розвертаються і з тією ж швидкістю рухаються в напрямі точки A, далі в точці A знову розвертаються і так далі. Знайдіть усі раціональні числа $r>1$, з такою властивістю: для довільного натурального n $(n+1)$ частинка, що мають відповідно швидкості $1, r, r^2, \dots, r^n$ в деякий не початковий момент часу усі зустрінуться одночасно в деякій внутрішній точці відрізку AB.

Відповідь**:** усі натуральні числа, що більші 1.

Розв’язання. Розглянемо дві довільні частинки P_1 та P_2, що мають швидкості $v_1>v_2$. Нехай вони зустрілися в деякій точці $Q\in AB$ у момент часу t. Вони пройшли відстань $v_1 t$ та $v_2 t$. Якщо ці частинки зустрілися коли рухалися в одному напрямі, то $[v_1 t]$ та $[v_2 t]$ мають однакову парність, і $\{v_1 t\}=\{v_2 t\}$. Тому $v_1 t - v_2 t$ – парне натуральне число. Якщо ці частинки зустрілися коли рухалися на зустріч, то $[v_1 t]$ та $[v_2 t]$ мають різну парність, і $\{v_1 t\}+\{v_2 t\}=1$. Тому $v_1 t + v_2 t$ – парне натуральне число.

Нехай раціональне число r задовольняє умову задачі. Тобто усі точки зустрілися в деякий момент часу t. Розглянемо першу та останню частинки. З одержаних вище співвідношень $(r^n-1)t$ або $(r^n+1)t$ – ціле число. Звідси t – раціональне. Нехай $r=\frac{a}{b}$ та $t=\frac{c}{d}$ – нескоротні дробі. Тоді $(r^n\pm1)t=\frac{(a^n\pm b^n)c}{b^n d}$. Оскільки $(a,b)=1$, то $c\,\vdots\, b^n$ і це має справджуватися для усіх натуральних n. Зрозуміло, що це можливо лише при $b=1$. Таким чином r має бути цілим.

Покажемо, що усі цілі умову задовольняють. Якщо $r\ge3$ – непарне, то для довільного натурального n, усі $n+1$ частинка зі швидкостями $1, r, r^2, \dots, r^n$ будуть у середині відрізку AB в момент часу $t=\frac{1}{2}$, оскільки усі числа $\frac{r^k}{2}$ мають дробову частину $\frac{1}{2}$.

Для парного $r=2m$ та для довільного натурального n у момент часу $t=\frac{2m}{2m+1}$ усі $n+1$ частинка будуть у точці Q на відстані $\frac{2m}{2m+1}$ від точки A. Це випливає з такої рівності:

$$(2m)^k\cdot\frac{2m}{2m+1}=\begin{cases}2q+\frac{2m}{2m+1},\ k=2l,\\ 2q+1+\frac{1}{2m+1},\ k=2l+1.\end{cases}$$

Доведемо її ММІ. $k=0$ – очевидно, покажемо індукційний перехід $k\to k+1$.

Якщо k – непарне, то

$$(2m)^{k+1}\cdot\frac{2m}{2m+1}=(2m)(2m)^k\cdot\frac{2m}{2m+1}=2m\cdot(2q+1+\frac{1}{2m+1})=2q'+\frac{2m}{2m+1}.$$

Якщо k – парне, то

$$(2m)^{k+1}\cdot\frac{2m}{2m+1}=(2m)(2m)^k\cdot\frac{2m}{2m+1}=2m\cdot(2q+\frac{2m}{2m+1})=4mq'+\frac{4m^2}{2m+1}=4mq+2m-1+\frac{1}{2m+1}=$$
$$=2q'+1+\frac{1}{2m+1}.$$

Твердження доведене.

2.2. Задача № 2 () молодша ліга.

3. Позначимо через $c(O,R)$ – описане коло гострокутного трикутника ABC $(AB<AC<BC)$, точки D, E, G – точки дотику вписаного кола до сторін BC, AC та AB відповідно. Кола c_1, c_2 та c_3 що описані навколо ΔAEG, ΔBDG та ΔCDE відповідно, перетинають вдруге коло c у точках A', B' та C' відповідно. Доведіть, що прямі DA', EB' та GC' перетинаються в одній точці.

Розв'язання. З вписаного кола c_1 та чотирикутника $AA'IG$ маємо, що (рис. 7)

$$\angle AA'I=\angle AGI=90°=\angle TA'I \quad \textbf{(0)}$$

З вписаного чотирикутника $CDIE$, оскільки CI бісектриса, маємо:

$$\angle IDE=\tfrac{1}{2}\angle C \qquad \textbf{(1)}$$

Аналогічно з вписаного чотирикутника $BDIG$, оскільки BI бісектриса, маємо:

$$\angle IDG=\tfrac{1}{2}\angle B \qquad \textbf{(2)}$$

З вписаного чотирикутника $BDIB'$ маємо $\angle B'DG=\angle B'BG$.

З вписаного чотирикутника $BB'A'A$ маємо $\angle B'BG=180°-\angle B'A'A=90°-\angle B'A'I$. Звідси $\angle B'DG+\angle B'A'I=90°$. З вписаного чотирикутника $AEIA'$ маємо $\angle IA'E=\tfrac{1}{2}\angle A$. Тому

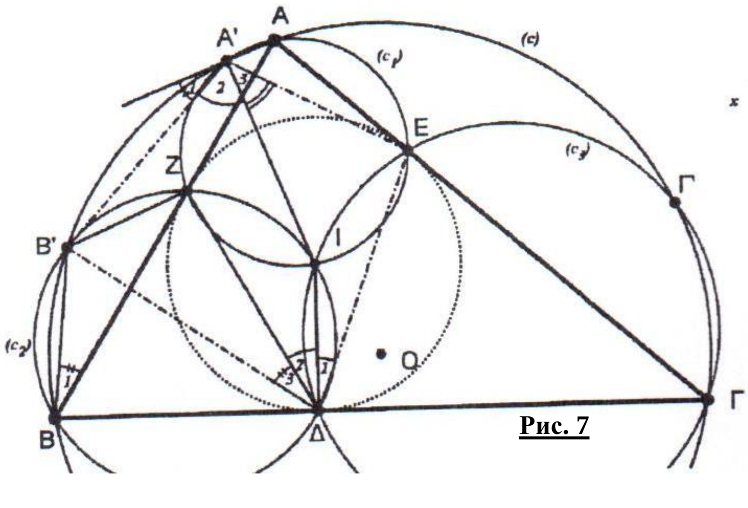

Рис. 7

$$\angle EDI + \angle IDG + \angle GDB' + \angle B'A'I + \angle IA'E = 180^\circ .$$

Тому чотирикутник $A'EDB'$ вписаний. Аналогічно доводиться, що чотирикутники $DGA'C''$ та $GEC'B'$ також вписані.
(тут доведена задача № 3 середньої ліги)
Вказані прямі перетинаються в одній точці, бо то є радикальні осі трьох кіл.

4. Задача № 4 () середня ліга

5.1. Задана таблиця з n рядків та 12 стовпчиків. У кожній комірці записане число 0 або 1, при цьому справджуються такі умови:

- кожні два рядки різні;
- кожний рядок містить рівно 4 комірки з 1;
- для кожних трьох рядків існує стовпчик, на перетині з якими у цьому рядку записані числа 0.

Знайдіть найбільше n для якого це можливе.

Відповідь: $C_{11}^4 = 330$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що існує приклад для такого n. Для цього розглянемо усі четвірки $1 \le i,\ j,\ k,\ l \le 11$ та розставити 1 у відповідних комірках. Перші дві умови очевидні за побудовою, стосовно останньої умови, то зазначимо, що 12-й стовпчик складається з самих нулів.
Покажемо, що то найбільше можливе значення. Для кожного рядка F розглянемо ті чотири стовпчики, в яких записані числа 1. Цю четвірку Q назвемо *припустимою*, вони єдиним чином визначають рядок F. Таким чином ми маємо рівно n припустимих четвірок.
Розглянемо деяку припустиму четвірку Q та розглянемо розподіл інших 8 стовпчиків на дві четвірки Q_1 та Q_2. Зрозуміло, що ці Q_1 та Q_2 різні для різних Q. Їх можна вибрати C_8^4 способами, тому усього маємо $\frac{1}{2}C_8^4$ таких розподілів. Крім того, принаймні одна з двох Q_1 чи Q_2 не припустима. Бо якщо вони усі три Q, Q_1 та Q_2 – припустимі, то вони разом порушують третю умову задачі. Таким чином є щонайменше $\frac{1}{2}C_8^4$ не припустимих четвірок, що відповідають заданій припустимій четвірці Q. Оскільки припустимих четвірок усього n, то не припустимих як мінімум $l \ge \frac{1}{2}C_8^4 \cdot n$, оцінимо кількість повторів тут неприпустимих четвірок.
Кожна неприпустима четвірка Q' у списку зустрічається стільки разів, скільки існує припустимих четвірок, що можуть її породити. Кожна така четвірка займає 4 стовпчики з 8, що лишаються від Q'. Тобто C_8^4 припустимих четвірок. Тобто в списку $l \ge \frac{1}{2}C_8^4 \cdot n$ не більше C_8^4 повторів. Таким чином їх щонайменше $\frac{1}{2}n$ неприпустимих четвірок. Таким чином усього четвірок можна вибрати $C_{12}^4 = 495$, там n – припустимих та $495 - n$ не припустимих. Тому $495 - n \ge \frac{1}{2}n \ \Rightarrow\ n \le 330$, що й треба було довести.

5.2. Задача № 5.1 () молодша ліга.

6. Задача № 6 () середня ліга

7. Знайдіть усі многочлени $P(n)$ з цілими коефіцієнтами, для яких для кожного натурального n, справджується подільність: $P(n) \mid (2557^n + 213 \cdot 2014)$.

Відповідь: $P(x) = 1,\ P(x) = -1$.

Розв'язання. Нехай $P(x)$ – задовольняє умову, та відмінний від тотожно сталих ± 1. Тоді існує $n_0 \in N$, для якого $|P(n_0)|>1$. Таким чином існує просте число $q \mid P(n_0) \Rightarrow q \mid (2557^{n_0} + 213 \cdot 2014)$. Тоді, оскільки $q \neq 2557$, бо 2557 – просте, то q – непарне. Але тоді $P(n_0 + q) \equiv P(n_0) \equiv 0 \pmod q$, крім того

$$P(n_0+q) \mid (2557^{n_0+q} + 213 \cdot 2014) \text{ та } P(n_0) \mid (2557^{n_0} + 213 \cdot 2014) \Rightarrow$$
$$2557^{n_0+q} + 213 \cdot 2014 \equiv 0 \equiv 2557^{n_0} + 213 \cdot 2014 \pmod q \Rightarrow$$
$$2557^{n_0+q} \equiv 2557^{n_0} \pmod q.$$

Оскільки $(q,\ 2557) = 1 \Rightarrow 2557^q \equiv 1 \pmod q$. З малої теореми Ферма $q \mid 2556$. Оскільки q непарне число, то $q \in \{3,\ 71\}$. Але тоді $q \mid 213 \cdot 2014$. Але з умови $q \mid (2557^{n_0} + 213 \cdot 2014)$ випливає, що $q \mid (2557 \Rightarrow q = 2557$ – суперечність.

8. Натуралні числа a, b, c, d такі, що a, b – взаємно прості та $a > b$. Відомо, що число c^2 ділиться на $a^2 + b$, а число d^2 ділиться на $a^2 + b^2$. Доведіть, що $cd > 2a^2$.

Розв'язання. Нехай натуральні числа x, y, m, n такі, що $a^2 + b = x^2 m$ та $a^2 + b^2 = y^2 n$, де m, n – вільні від квадратів. Тоді

$$a^2 < a^2 + b < a^2 + a < (a+1)^2,$$

звідки $m \neq 1$, тобто $m \geq 2$. З умов задачі $c \,\vdots\, xm$, тому

$c^2 \geq (xm)^2 = m(a^2 + b) > ma^2$. Аналогічно $d^2 > na^2$. Звідси випливає, що

$$cd > a^2 \sqrt{mn}. \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо $n \geq 2$, то $mn \geq 4$, то з (1) матимемо, що $cd > 2a^2$.

Залишається випадок, що $n = 1$, тобто $a^2 + b^2 = y^2$. Звідси неважко показати, що $ab \,\vdots\, 3$ та $ab \,\vdots\, 2$. Але це означає, що рівно одне з цих чисел кратне 3 та рівно одне кратне 2, тому числа $a^2 + b$ та 6 – взаємно прості. Але тоді $m \geq 5$, тоді з (1) $cd > \sqrt{5} a^2 > 2a^2$, що й треба було довести.

9. Задача № 9 () середня ліга

10. Задача № 10.1 () молодша ліга.