XV Київський відкритий турнір математичних боїв ім. Лесі Рубльової

Перший тур

*"Супротивник, що викриває ваші помилки,
корисніший для вас, ніж друг, що бажає їх приховати".
Леонардо да Вінчі*

Умови та розв'язання задач

Наймолодша ліга

1.1. На нараду зібралися 30 учасників – хобіти, ельфи та гноми. У кожній групі був начальник із заступником, а також рядові учасники наради. Кожний хобіт випив по 3 кухлі пива, а кожний гном – по 10 кухлів, а кожний ельф випив по 20 кухлів. Разом усі учасники зустрічі випили 333 кухлів пива. Скільки серед гостей було гномів?

Відповідь: 8.
Розв'язання. Можемо записати такі умови: $x+y+z=30$ та $3x+10y+20z=333$. Виходячи з останньої цифри $x=11$ чи $x=21$.
Для кожного з цих випадків отримуємо, що .
$x=11 \Rightarrow y+z=19$ та $10y+20z=300$ або $y+2z=30$. Неважко зрозуміти звідси, що $z=11$ та $y=8$.
$x=21 \Rightarrow y+z=9$ та $10y+20z=270$ або $y+2z=27$. Неважко зрозуміти звідси, що $z=18$ та $x+z>30$ – суперечність.

1.2. Касир продав усі квитки у перший ряд кінотеатру, причому внаслідок помилки на одне з місць було продано два квитки. Сума номерів місць на цих квитках, включаючи два на одне місце, дорівнювала 857. На яке місце було продано два квитки?

Відповідь: 37.
Розв'язання. Місць у першому ряду не більше 40, тому що при додаванні чисел $1+2+\ldots+41=861>857$. Але тих місць має бути більше 39, оскільки сума чисел $1+2+\ldots+39=780$, а навіть $780+39=819<857$. Таким чином місць має бути рівно 40. Оскільки $1+2+\ldots+40=820$, то двічі був проданий квиток на місце $857-820=37$.

2. Задана множина $M=\{1, 2, \ldots, n\}$. Знайдіть кількість триелементних підмножин цієї множини, в кожній з яких один з елементів є середнім арифметичним двох інших.

Відповідь: при $n=2k$ $k(k-1)$ варіант, при $n=2k+1$ k^2 варіантів.
Розв'язання. Очевидно, що для триелементної множини $\{a, b, c\}$, де $a<b<c$, елемент $b\in M \Leftrightarrow a, c$ мають мати однакову парність.
При $n=2k$ елементи a, c можна вибрати $2\cdot C_k^2=k(k-1)$ варіант.

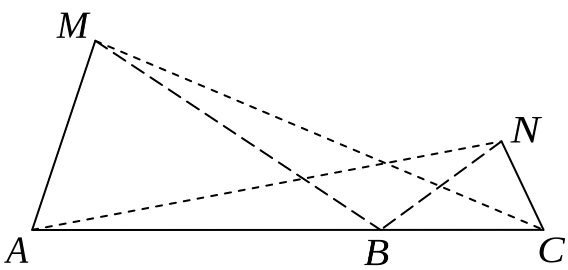

Рис. 1

При $n=2k+1$ елементи a, c можна вибрати $C_{k+1}^2+C_k^2=\frac{1}{2}(k(k+1)+k(k-1))=k^2$ варіантів.

3. На прямій вибрані точки A, B, C (точка B лежить на відрізку AC). Розглянемо рівнобедрені трикутники ABM та CBN з вершинами у точці B та рівними кутами $\angle ABM = \angle CBN$. Чи обов'язково є рівними відрізки $AN = MC$?

Відповідь:, обов'язково.

Розв'язання. Якщо точки M, N лежать по різні боки від прямої AC, то все очевидно, бо точки M, N, B лежать на одній прямій та $\Delta ABN = \Delta MBC$ за двома сторонами та кутом.

Нехай M, N лежать по різні боки від AC (рис. 1), тоді $\angle ABN = \angle CBM$, а також рівні сторони $AB = BM$ та $BN = BC$. Таким чином $\Delta ABN = \Delta CBM$, звідси $AN = CM$.

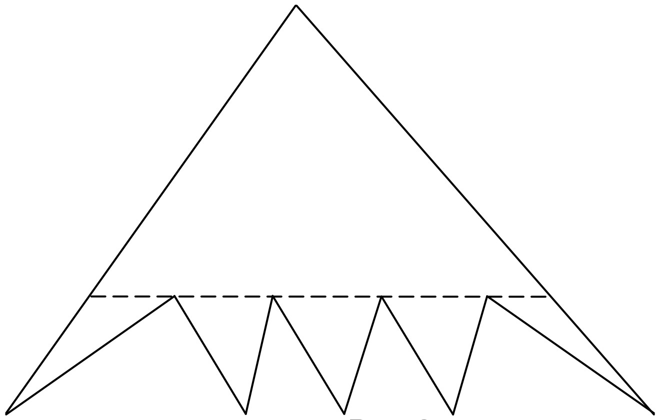

Рис. 2

4.1. Чи існує 10-кутник, який одним прямолінійним розрізом можна поділити на 6 трикутників?

Відповідь: існує, наприклад на рис. 2.

4.2. Чи існує 10-кутник, який одним прямолінійним розрізом можна поділити на 5 трикутників?

Відповідь: існує, наприклад на рис. 3.

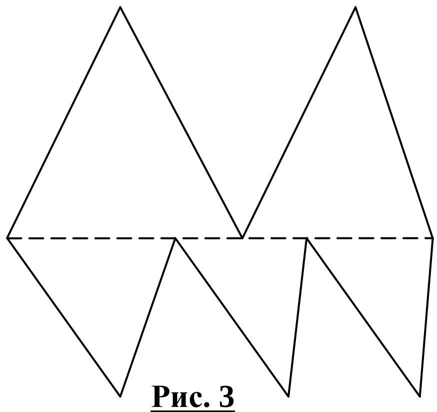

Рис. 3

5.1. Для заданого натурального числа n ми намагаємося побудувати таблицю з 3 рядків та n стовпчиків, комірки якої заповнені числами $1, 2, \ldots, 3n$ таким чином, що справджувалися такі умови:

- кожний рядок має однакову суму чисел z;
- кожний стовпчик має однакову суму чисел s.

Доведіть, що якщо n парне, то такої таблиці не існує.

Розв'язання. Оскільки $1 + 2 + \ldots + 3n = \frac{1}{2}(3n)(3n+1)$, то $\frac{1}{2}(3n)(3n+1) = 3z = ns$. Таким чином $s = \frac{1}{2}3 \cdot (3n+1)$. Таким чином при парному n число s не ціле.

5.2. Для заданого натурального числа n ми намагаємося побудувати таблицю з 3 рядків та n стовпчиків, комірки якої заповнені числами $1, 2, \ldots, 3n$ таким чином, що справджувалися такі умови:

- кожний рядок має однакову суму чисел z;
- кожний стовпчик має однакову суму чисел s.

Доведіть, що для $n = 5$ така таблиця існує.

15	6	2	7	10
8	4	13	12	3
1	14	9	5	11

Рис. 4

Розв'язання. Для $n = 5$ неважко обчислити шукані значення: $z = 40$ та $s = 24$. Це дозволяє побудувати шуканий приклад (рис. 4).

6. У клубі деякі пари членів є друзями. Для деякого $k \geq 3$ клуб називається k-гарним, якщо будь-яку групу з k членів клубу можна розсадити за круглим столом таким чином, що усі сусіди будуть друзями. Доведіть, що якщо клуб є 6-гарним, то він є й 7-гарним.

Розв'язання. Виберемо у 6-гарному клубі будь-яких 7 членів: $A, B, \ldots, G$. Надалі внаслідок довільності \її вибору розглядаємо лише її. Виберемо довільного члена цієї групи G. За умовою членів групи $B, C, \ldots, G$ можна розсадити за круглим столом належним чином (щоб усі сусіди були друзями), але тоді G має мати принаймні двох друзів, нехай F – один з них. Включимо в останню групу з 6 членів клубу замість F члена клубу A. Тоді в новій шістці у G знову має бути щонайменше 2 друга, але серед них немає його друга F. Тому – усього у G має бути принаймні 3 друга. Внаслідок того, що G був довільно обраним, цю властивість мають і усі інші члени клубу. Але це означає, що є член клубу, що має принаймні 4 друзів. Бо інакше серед довільних 7 членів клубу, якщо кожний має рівно по 3 друга, то усього таких дружніх пар $\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7$ – не ціле число (бо кожна пара при такому множенні рахується рівно двічі). Нехай G буде членом цієї сімки, що має принаймні 4 друга. Розглянемо такі 6 членів клубу: $A, B, \ldots, F$ – розсадимо їх належним чином. Але тоді серед цих 6 членів клубу 4 – друзі G, а тому принаймні пара з них сидить поруч. Це означає, що G достатньо посадити строго між ними і твердження доведене.

7. Михайлик та Петрик грають в таку гру – Михайлик кожним своїм ходом множить записане на дошці число на 2017 та додає до нього 2, а Петрик просто додає до записаного числа 2019. Петрик виграє, якщо в певний момент на дошці після ходу будь-кого з гравців з'явиться число, що кратне 2018. Михайлик хоче завадити перемозі Петрика. Вони роблять ходи по черзі, розпочинає Михайлик з деякого початкового числа. Знайдіть найменше початкове число, що більше за 2017, при якому Михайлик досягне своєї мети.

Відповідь: 2022.
Розв'язання. Нехай m – початкове число. За модулем 2018 ходи учасників мають такий вигляд:

$$2017x+2\equiv 2-x \text{ та } 2019+x\equiv x+1.$$

Тоді маємо такі перетворення початкового числа:

$$m\xrightarrow{M}2-m\xrightarrow{P}3-m\xrightarrow{M}2-(3-m)=m-1\xrightarrow{P}m.$$

Треба, щоб жодне з чисел $m,\ 2-m,\ 3-m$ та $m-1$ не ділилося на 2018. Найменше з чисел, яка цьому задовольняє та більша від 2017 – це 2022.

8. Позначимо через $d(n)$ – кількість дільників натурального числа n. Знайдіть усі такі $n\geq 3$, для яких $d(n-1)+d(n)+d(n+1)\leq 8$.

Відповідь: $n=3$, $n=4$ та $n=6$.
Розв'язання. Для парного $k\geq 6$ маємо, що $d(k)\geq 4$, оскільки має дільники $1,\ 2,\ \frac{1}{2}k$ та k. Перебором знаходимо, що $n=3$ – розв'язок, а $n=5$ – ні. Таким чином більше непарних n не існує.
Таким чином залишається розглянути парні значення для n. З трьох чисел $n-1,\ n$ та $n+1$ принаймні одне кратне 3.
Якщо $n-1$ чи $n+1$ кратне 3, то це число має дільники $1,\ 3$, $\frac{1}{3}k$ та k при $k>9$. Таким чином треба перебрати лише парні числа до 10.

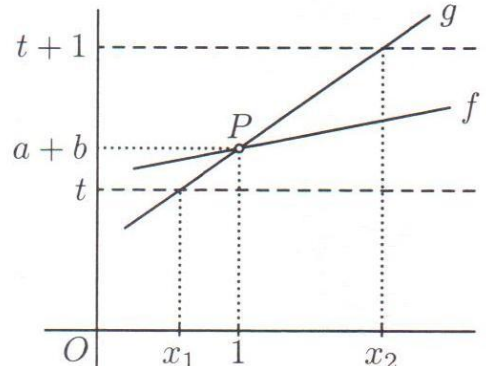

Рис. 5

Розв'язки серед них $n=4$ та $n=6$.
Якщо n кратне 3, то воно має дільники $1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{3}n\ \frac{1}{2}n$ та n і при $n\geq 9$ розв'язків немає.

Молодша ліга

1.1. Задача № 1.1 **()** наймолодшої ліги.

1.2. Задача № 1.2 **()** наймолодшої ліги.

2.1. Доведіть, що для додатних чисел $a \neq b$ множина розв'язків рівняння $[ax+b]=[bx+a]$ містить проміжок довжини принаймні $\frac{1}{\max\{a,\, b\}}$.

Розв'язання. Розглянемо дві функції: $f(x)=ax+b$ та $g(x)=bx+a$. Оскільки $f(1)=g(1)=a+b$, то прямі $y=ax+b$ та $y=bx+a$ є різними та перетинаються у точці $P(1,\, a+b)$ (рис. 5).

Без обмеження загальності вважатимемо, що $a<b$, тобто g йде більш круто. Тому $g(x)>f(x)$ для $x>1$ та навпаки при $x<1$. Таким чином

$$f(x)-g(x)=(b-a)(1-x).$$

Позначимо через $t=[a+b]$. Покладемо $x_1 \le 1 < x_2$ таким чином, щоб $g(x_1)=t$, $g(x_2)=1+t$. Неважко збагнути, що $x_1=\frac{t-a}{b}$, $x_1=\frac{t+1-a}{b}$. Покажемо, що цей проміжок задовольняє умовам задачі. $\forall x \in [x_1,\, x_2)$: $t=g(x_1)\le f(x)<g(x_2)=t+1 \implies x$ – розв'язок рівняння. Неважко бачити, що $x_2-x_1=\frac{1}{b}$, що й треба було довести.

2.2. На острові Невезіння відмінили понеділки: в них одразу за неділею йде вівторок. За останній рік, тобто від неділі 15 жовтня 2017 року по сьогодні неділю 14 жовтня 2018 року, неділі на острові співпали с нашими неділями рівно 8 разів. Який день тижня на острові сьогодні 14 жовтня 2018 року?

Відповідь: субота.

Розв'язання. Оскільки звичайний тиждень (наш) складається з 7 днів, а тиждень на острові – з 6, тому збіг неділь відбувається рівно 1 раз на $6\cdot 7=42$ дні. Тому за $378=42\cdot 9$ дні відбувається рівно 9 таких збігів неділь. Оскільки $378-365=13$, то дев'ятий збіг мав відбутися протягом найближчих 13 днів (з понеділка 15 жовтня по суботу 27 жовтня 2018 року). Єдина неділя на цей час – 21 жовтня 2018 року. Тому цей день – неділя на острові, далі рахуємо у зворотному напрямі і знаходимо, що сьогодні в них – субота.

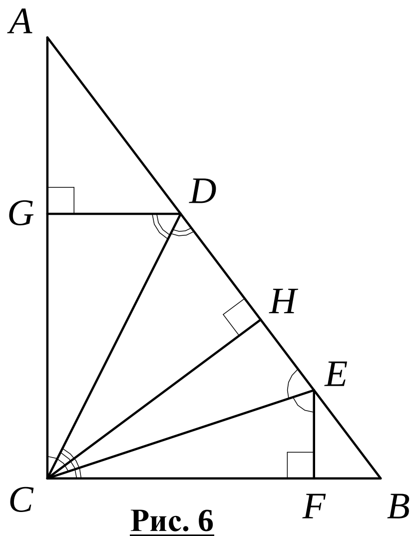

Рис. 6

3. У прямокутному трикутнику ABC точки D та E розташовані на гіпотенузі AB так, що $BD=BC$ та $AE=AC$. З точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а з точки E – перпендикуляр EF на катет BC. Доведіть, що $DE=EF+DG$.

Розв'язання. Проведемо відрізки CD та CE, а також висоту CH ΔABC (рис. 6). Точка H лежить між точками D та E, оскільки кути CDE та CED – гості (вони є кутами при основах у рівнобедрених трикутниках BCD та CAE відповідно.

З рівнобедреного ΔACE та паралельних прямих AC та EF матимемо, що $\angle AEC=\angle ACE=\angle FEC$. Тоді $\Delta CFE=\Delta CHE$ (прямокутні за гіпотенузою та гострим кутом), звідки $EF=EH$. Аналогічно $GD=DH$, таким чином

$$DE=EH+HD=EF+DG.$$

4. У трикутнику ABC кут при вершині C утричі більший за кут при вершині A. На стороні AB вибрана така точка D, що $BD = BC$.
Знайдіть CD, якщо $AD = 4$.

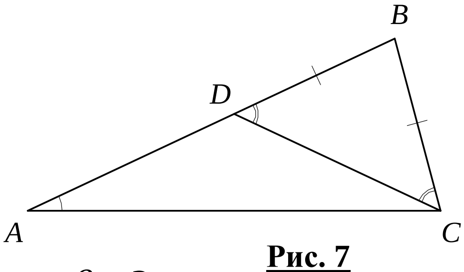

Рис. 7

Відповідь: $CD = 4$.
Розв'язання. Нехай $\angle BAC = \alpha$, тоді $\angle BCA = 3\alpha$ (рис. 7). Оскільки ΔDBC – рівнобедрений, то $\angle BDC = \angle BCD = \beta$. Звідси $\angle DCA = 3\alpha - \beta$. Оскільки $\angle CDB$ – зовнішній для ΔADC, то $\angle CDB = \angle DAC + \angle DCA$, тому $\beta = \alpha + (3\alpha - \beta) \Rightarrow \beta = 2\alpha$.
Таким чином $\angle DCA = \alpha$, тобто ΔADC – рівнобедрений з основою AC. Таким чином $CD = AD = 4$.

5.1. Андрій заповнює комірки прямокутної таблиці по черзі X (хрестами) та O (нуликами), розпочинаючи з хреста. Після заповнення усіх комірок він рахує величину x – суму квадратів кількості хрестиків у кожному рядку та стовпчику, а також величину o – суму квадратів кількості нуликів у кожному рядку та стовпчику. Після цього він отримує приз розміром $x - o$. Який максимальний приз зможе отримати Андрій, якщо прямокутна таблиця має розміри $n \times n$, де n – деяке непарне число.

Відповідь: $2n$.
Розв'язання. Усього нуликів на 1 менше ніж хрестиків, таким чином усього хрестиків $k = \frac{1}{2}(n^2+1)$. Нехай в деякій лінії (рядок чи стовпчик) міститься усього a хрестиків та $n-a$ нуликів. Тоді в призову суму входитиме величина $a^2 - (n-a)^2 = 2na - n^2$. Якщо усі ці величини додати по усіх рядках, то матимемо, що ця величина дорівнюватиме

$$2nk - n \cdot n^2 = 2n \cdot \tfrac{1}{2}(n^2+1) - n^3 = n.$$

Аналогічно для стовпчиків – n, тому загальна відповідь – $2n$.

5.2. Задача № 5.1 **()** наймолодшої ліги.

6. Задача № 6 **()** наймолодшої ліги.

7. Знайдіть найбільшу можливу кількість елементів в множині цілих чисел M, яка має таку властивість – серед будь-яких трьох елементів множини M можна вибрати 2, сума яких є невід'ємним степенем 2.

Відповідь: 6.
Розв'язання. Розглянемо множину $M = \{-1, 3, 5, -2, 6, 10\}$, якщо її поділити на дві частини, як тут записане – перші три елементи та другі три елементи. Сума будь-яких двох елементів у кожній частині є невід'ємним степенем 2. Таким чином, якщо вибрати будь-які 3 елементи, то принаймні 2 з них будуть з однієї частини, а тому задовольняти умову.
Покажемо, що 6 – найбільше можливе значення. Методом від супротивного, припустимо що така множина містить принаймні 7 елементів. Ця множина не може мати більше двох недодатних елементів. Таким чином додатних елементів принаймні 5. Позначимо через x – найбільше з них, а a b, c, d – інші чотири додатні елементи. Але тоді числа $x+a, \dots, x+d$ усі більші від x та менші від $2x$. Таким чином в проміжку $(x, 2x)$ не більше однієї степені 2. Таким чином інші три елементи не є степенями 2. Нехай це будуть $x+a, x+b, x+c$. Тоді розглянемо трійки чисел (a, b, x), (a, c, x) та (b, c, x). Але тоді степенями 2 мають бути кожне з чисел: $a+b$, $a+c$ та

$b+c$. Знову, якщо a – найбільше з цих трьох чисел, то $a+b$ та $a+c$ лежать на проміжку $(a,\ 2a)$, тому щонайбільше одне з них може бути степенем 2.

8. Задача № 8 **()** наймолодшої ліги.

Середня ліга

1.1. Нехай α – довільне додатне число. Визначте найбільшу додатну константу C, для якої справджується нерівність

$$(1+\frac{\alpha}{x^2})(1+\frac{\alpha}{y^2})(1+\frac{\alpha}{z^2})\ge C(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+2),$$

для довільних додатних $x,\ y,\ z$, що задовольняють умову $xy+yz+zx=\alpha$.

Відповідь: $C=16$.

Розв'язання. Замінимо у вказаній нерівності α на $xy+yz+zx=\alpha$ та домножимо на $x^2y^2z^2$:

$$\frac{x^2+xy+yz+zx}{x^2}\cdot\frac{y^2+xy+yz+zx}{y^2}\cdot\frac{z^2+xy+yz+zx}{z^2}\ge C\cdot\frac{x^2+z^2+2xz}{xz}\ \Rightarrow$$

$$(x^2+xy+yz+zx)(y^2+xy+yz+zx)(z^2+xy+yz+zx)\ge Cxy^2z(x^2+z^2+2xz)\ \Rightarrow$$

$$(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2\ge Cxy^2z(x+z)^2\ \Rightarrow\ (x+y)^2(y+z)^2\ge Cxy^2z.$$

Оскільки

$$(x+y)^2(y+z)^2\ge 4xy\cdot 4yz=16xy^2z\ge Cxy^2z,$$

то нерівність справджується при $C=16$. Це оптимальне значення, оскільки при $x=y=z=\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ досягається рівність.

1.2. Знайдіть усі значення параметра p, для якого система нерівностей

$$\begin{cases} x^2+(p-1)x+p\le 0, \\ x^2-(p-1)x+p\le 0, \end{cases}$$

має принаймні один дійсний розв'язок.

Відповідь: $p\le 0$.

Розв'язання. При $p\le 0$ розв'язком завжди буде $x=0$. При $p>0$, якщо деяке значення x задовольняє систему нерівностей, то після додавання цих нерівностей матимемо, що має справджуватися така умова: $2x^2+2p\le 0$ – суперечність.

2. Знайдіть найбільше натуральне n, для якого вираз $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{n}]$ є простим числом.

Відповідь: $n=47$.
Розв'язання. Запишемо такі оцінки:

$$k=\sqrt{k^2}<\sqrt{k^2+1}<\ldots<\sqrt{k^2+2k}<\sqrt{k^2+2r+1}=k+1.$$

Звідси не важко вирахувати явний вигляд кожного числа:

$$s_n=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\ldots+[\sqrt{n}],\text{ де } k=[\sqrt{n}],\ n=k^2+l,\text{ тоді}$$

$$s_n = \sum_{i=0}^{k-1} i(2i+1) + k(l+1) = 2\sum_{i=0}^{k-1} i^2 + \sum_{i=0}^{k-1} i + k(l+1) = \tfrac{1}{6}(k-1)k(4k+1) + k(l+1).$$

При $k > 6$ ми маємо, що кожний доданок має спільний простий дільник числа k, а тому s_n – не просте. Для $k \le 6$ маємо, що $n < (6+1)^2 = 49$. Простимо обчисленнями $s_{48} = 203 = 7 \cdot 29$, а $s_{47} = 197$ – шукане просте число.

3.1. Всередині трикутника ABC вибрана точка P таким чином, що точки M_A та M_B – центри описаних кіл k_A та k_B трикутників BCP та ACP відповідно, розташовані поза ΔABC. Крім того виявилося, що відповідно колінеарними є таки трійки точок A, P, M_A та B, P, M_B. Пряма, що проходить через точку P та паралельна AB вдруге перетинає кола k_A та k_B у точках D та E відповідно. Доведіть, що $DE = AC + BC$.

Розв'язання. Позначимо через $\varphi = \angle CBP$ (рис. 8). Тоді $\angle CM_A P = 2\varphi$. Оскільки $M_A C M_B P$ – дельтоїд, то $M_A M_B$ – його вісь симетрії. Тому

$$\angle CM_A M_B = \varphi = \angle CBM_B.$$

Звідси випливає, що точка B, і аналогічно точка A, лежать на описаному колі $\Delta M_A C M_B$. А це рівносильне тому, що M_A, M_B лежать на описаному колі ΔABC. Але звідси випливає, що P – інцентр ΔABC. Оскільки $AB \| PD$, то $\angle CBP = \angle BPD$. Таким чином $PBDC$ – рівнобічна трапеція, і має рівні діагоналі, тобто $PD = BC$. Аналогічно $PE = AC$ звідки й випливає шукана рівність.

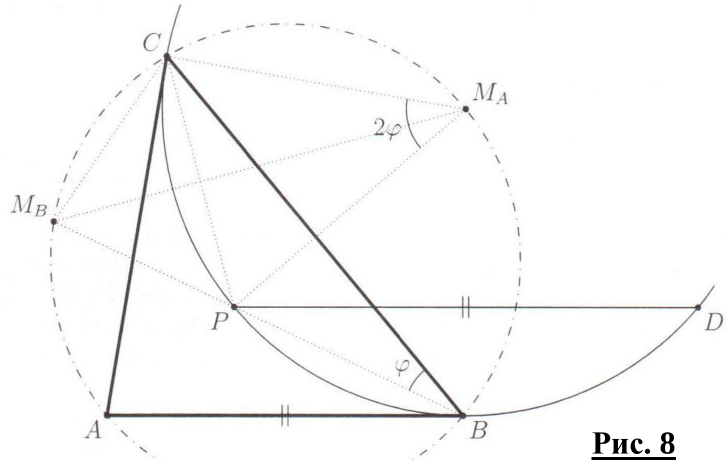

Рис. 8

3.2. Точки D_0, D_1, …, D_{2018} вибрані на відрізку AB таким чином, щоб $D_0 = A$, $D_{2018} = B$ та $D_0D_1 = D_1D_2 = \ldots = D_{2017}D_{2018}$. Виберемо довільну точку C таку, що $BCA = 90°$. Доведіть, що справджується рівність:

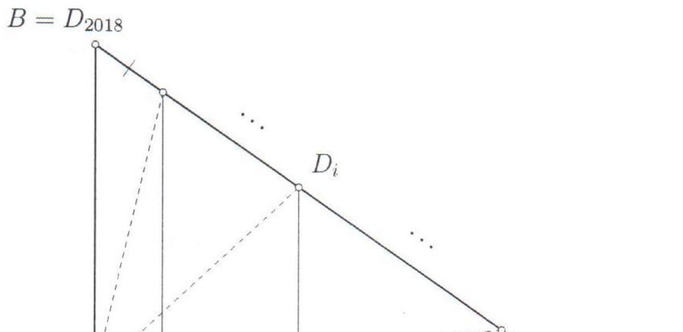

Рис. 9

$$D_0C^2 + D_1C^2 + \ldots + D_{2018}C^2 = D_0A^2 + D_1A^2 + \ldots + D_{2018}A^2.$$

Розв'язання. Позначимо через E_i – основа перпендикуляра з точки D_i на катет AC (рис. 9). З теорема Фалеса $E_{i-1}E_i = E_iE_{i+1}$, крім того $CE_i = AE_{2018-i}$, $i = \overline{0,\ 2018}$. Застосуємо теорему Піфагора для ΔCD_iE_i та AD_iE_i:

$CD_i^2 = D_iE_i^2 + CE_i^2$ та $AD_i^2 = D_iE_i^2 + AE_i^2$.

$\Rightarrow\ CD_i^2 - AD_i^2 = CE_i^2 - AE_i^2\ \Rightarrow$

$$CD_0^2 + CD_1^2 + \ldots + CD_{2018}^2 - AD_0^2 - AD_1^2 - \ldots - AD_{2018}^2 =$$
$$= CE_0^2 + CE_1^2 + \ldots + CE_{2018}^2 - AE_0^2 - AE_1^2 - \ldots - AE_{2018}^2 = 0.$$

4. Нехай $ABCD$ – рівнобічна трапеція з більшою основою AB. Нехай I – інцентр ΔABC, J – центр зовні вписаного кола проти вершини C ΔACD. Доведіть, що $AB \| IJ$.

Розв'язання. Нехай K – інцентр ΔABD (рис. 10). Тоді $AB \| IK$, таким чином достатньо показати, що $AB \| JK$. Нехай $\angle ABD = \angle ACD = \phi$, тоді $\angle AKD = 90° + \frac{1}{2}\phi$ та $\angle DJA = 90° - \frac{1}{2}\phi$, тому чотирикутник $AKDJ$ – вписаний.
Тоді AK і DJ – бісектриси відповідних кутів, то вони паралельні. Звідси маємо:

$$\angle AKJ = \angle ADJ = \angle DAK = \angle BAK,$$

звідки випливає, що $AB \| JK$.

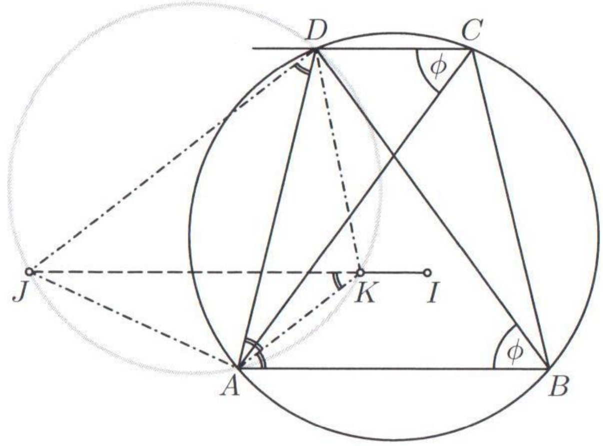

Рис. 10

5. Задача № 5.1 **()** молодшої ліги.

6.1. У кожну комірку квадрату $n \times n$ записані цілі числа. Сусідні по рядку чи стовпчику числа відрізняються не більше ніж на 2. Яка максимальна кількість різних чисел може бути записане в цій таблиці?

Відповідь: $4n-5$.
Розв'язання. Розглянемо табличку $n \times n$, а також позначимо через m, M відповідно найменше та найбільше числа таблиці. Шляхом між комірками таблиці назвемо сукупність сусідніх комірок, в якій початкова та кінцева комірки є зданими. Відстанню між комірками (i, j) та (k, l) назвемо вираз $|i-k|+|j-l|$. Таким чином найбільша відстань у таблиці не перевищує $2n-2$. Якщо відстань між комірками з числами m, M менша від $2n-2$, тоді дістанемо таку оцінку:

$$M - m \le 2(2n-3) = 4n-6.$$

Таким чином табличка може містити не більше $4n-5$ різних чисел.
Припустимо, що відстань між комірками числами m, M дорівнює максимально можливому значенню $2n-2$. Тоді вони розташовані в протилежних кутах таблиці (по діагоналі). Розглянемо k різних чисел таблички таким чином: $b_1 = m < b_2 < b_3 < \ldots < b_{k-1} < b_k = M$. Відстань між числами b_2, b_{k-1} не більше від $2n-4$, і тому $b_{k-1} - b_2 \le 2(2n-4) = 4n-8$. Тоді матимемо, що

$$M - m = (M - b_{k-1}) + (b_{k-1} - b_2) + (b_2 - m) \le (M - b_{k-1}) + (4n-8) + (b_2 - m).$$

Таким чином, оскільки $M - b_{k-1}$ та $b_2 - m$ дорівнюють 1 чи 2, то можливі варіанти.

- $M - m \le 4n-6$.
- $M - m \le 4n-5$, при цьому табличка не містить або число $m+1$, або $M-1$.
- $M - m \le 4n-4$, при цьому табличка не містить жодного з чисел $m+1$ та $M-1$.

Але тоді у кожному з таких випадків різних чисел не більше $4n-5$.
Залишається навести відповідний приклад існування такої таблички (рис. 11).

1	3	5	…	$2n-3$	$2n-1$
2	4	6	…	$2n-2$	$2n$
4	6	8	…	$2n$	$2n+1$
…	…	…	…	…	…
$2n-4$	$2n-2$	$2n$	…	$4n-8$	$4n-7$
$2n-2$	$2n$	$2n+2$	…	$4n-6$	$4n-5$

Рис. 11

6.2. Задача № 6 **()** наймолодшої ліги.

7.1. Розглянемо натуральні числа a, b, c, що є сторонами трикутника і $(a, b, c) = 1$. При цьому кожний дріб $\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}$,

$\frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}$ та $\frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$ є цілим числом. Доведіть, що добуток знаменників цих трьох дробів є квадратом або подвоєним квадратом цілого числа.

Розв'язання. Розглянемо додатні числа $z=a+b-c$, $x=b+c-a$ та $y=c+a-b$. Тоді $a=\frac{1}{2}(y+z)$, $b=\frac{1}{2}(x+z)$ та $c=\frac{1}{2}(y+x)$. Тоді

$$a^2+b^2-c^2=\tfrac{1}{4}((y+z)^2+(x+z)^2-(x+y)^2)=\tfrac{1}{2}(z(x+y+z)-xy).$$

Оскільки число $\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}=\frac{1}{2}\cdot\frac{z(x+y+z)-xy}{z}$ – ціле, то $z\mid xy$, аналогічно $y\mid xz$ та $x\mid zy$. Нехай p – просте число, і $i_p=ord(zxy)$. Треба показати, що для довільного непарного простого p відповідне i_p – парне. Тоді твердження буде доведене,бо не принципово якої парності буде число i_2. Нехай $\alpha=ord_p x$, $\beta=ord_p y$ та $\gamma=ord_p z$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\gamma=\min\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$. Якщо $\gamma>0$, то ми матимемо суперечність з тим, що $(x,\ y,\ z)=1$. Тому $\gamma=0$, звідси оскільки $x\mid zy$, то $\alpha\le\beta$, аналогічно з умови $y\mid xz$ випливає, що $\alpha\ge\beta$. Таким чином $\alpha=\beta$, тому $i_p=\alpha+\beta+\gamma=2\alpha$, що й треба було довести.

7.2. Задача № 7 **()** молодшої ліги.

8.1. Чи існують такі натуральні числа $n,\ k$, для яких число $\frac{n}{11^k-n}$ є квадратом цілого числа?

Відповідь: такі числа не існують.
Розв'язання. Методом від супротивного, нехай такі числа існують. Тоді існує натуральне число a, для якого справджується рівність: $n=a^2(11^k-n)\quad\Rightarrow\quad n(a^2+1)=a^2\cdot 11^k$. Оскільки $(a^2,\ a^2+1)=1$, то $a^2+1\mid 11^k$. Таким чином $a^2+1=11^l$, $1\le l\le k$. Тоді $a^2\equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 11)$, що неможливо для квадратів цілих чисел. Одержана суперечність завершує доведення.

8.2. Задача № 8 **()** наймолодшої ліги.

Старша ліга

1.1. Нехай $\alpha\ne 0$. Знайдіть усі функції $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, що $\forall x,\ y>0$ задовольняють умову:

$$f(f(x)+y)=\alpha x+\frac{1}{f(\frac{1}{y})}.$$

Відповідь: при $\alpha=1$ $f(x)=x$, при інших α відповіді не існує.
Розв'язання. Очевидно, що $\alpha>0$ оскільки інакше права частина може приймати від'ємні значення. Використовуючи змінну x отримуємо, що функція ін'єктивна. Крім того, вона сюр'єктивна для деякого $a>0$ на проміжку $(a,\ +\infty)$. Виберемо достатньо близькі до 0 значення x та достатньо великі значення функції отримаємо, що вона сюр'єктивна на $(0,\ +\infty)$.
Зробимо підстановку $y\to f(y)$:

$$f(f(x)+f(y))=\alpha x+\frac{1}{f(\frac{1}{f(y)})}. \qquad (1)$$

З симетричності умови для $x,\ y$ маємо, що $\forall x,\ y>0$

$$f(f(x)+f(y))=\alpha x+\frac{1}{f(\frac{1}{f(y)})}=\alpha y+\frac{1}{f(\frac{1}{f(x)})},$$

тому $\alpha x-\frac{1}{f(\frac{1}{f(x)})}=const \Rightarrow \frac{1}{f(\frac{1}{f(x)})}=\alpha x+C$. Звідси $f(f(x)+f(y))=\alpha x+\alpha y+c$.

З ін'єктивності функції маємо, що для $x,\ y,\ z,\ w$: $x+y=z+w$ має місце рівність:

$$f(x)+f(y)=f(z)+f(w). \qquad (2)$$

Тому

$$f(x+1)+f(y+1)=f(x+y+1)+f(1),\ \forall x,\ y\ge 0.$$

Покладемо $g(x)=f(x+1)$, $g:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ то остання умова перепишеться таким чином:

$$g(x)+g(y)=g(x+y)+g(0).$$

Нехай тепер $h(x)=g(x)-g(0)$, то матимемо, що $h(x)\ge -g(0)$ та отримаємо функціональне рівняння Коші:

$$h(x)+h(y)=h(x+y).$$

Якщо для деякого $t>0$ маємо $h(t)<0$, то з рівності $h(nx)=nh(x)$ функція $h(x)$ приймає як завгодно великі за модулем від'ємні значення для достатньо великих натуральних n, а це неможливо внаслідок обмеженості знизу: $h(x)\ge -g(0)$. Тому $h(x)\ge 0\ \ \forall x\ge 0$,звідки випливає її монотонне не спадання: $0<u<v\ \ h(v)=h(u)+h(v-u)\ge h(u)$. З цієї монотонності випливає, що розв’язання функціонального рівняння Коші може бути лише лінійним: $h(x)=cx$. Тоді $g(x)=cx+g(0)$ або $f(x+1)=cx+f(1)$, тому для $x>1\ \ f(x)=cx+d$ для деяких сталих $c,\ d$. Але це справджується і для $0<x\le 1$. Тоді покладемо в рівність (2) $y=3,\ z=2,\ w=x+1$ і матимемо, що

$$f(x)+f(3)=f(2)+f(x+1) \Rightarrow f(x)=2c+d-3c-d+c(x+1)+d \Rightarrow f(x)=cx+d.$$

З сюр'єктивності функції $d=0$, бо інакше не усі значення зможуть прийматися. Таким чином $f(x)=cx \Rightarrow$ якщо все підставити у задане в умові співвідношення, то

$$f(f(x)+y)=\alpha x+\frac{1}{f(\frac{1}{y})} \Rightarrow f(cx+y)=\alpha x+\frac{1}{\frac{c}{y}} \Rightarrow c(cx+y)=\alpha x+\tfrac{1}{c}y \Rightarrow$$

Оскільки вона справджується для усіх доданих $x,\ y$, то мають співпадати коефіцієнти при $x,\ y$, тому $c^2=\alpha=1$ та $c=\frac{1}{c^2}$, звідки стає зрозумілою наведена відповідь.

1.2. Задача № 1.1 **()** середньої ліги.

2. Знайдіть найбільшу сталу k, для якої наведена нерівність справджується для будь-яких додатних змінних $a,\ b,\ c$:

$$(k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\le(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a})(\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{c}).$$

Відповідь: $k=\sqrt[3]{9}-1$.

Розв’язання. Якщо покласти $a=b=c$ – отримаємо оцінку, що $k\le\sqrt[3]{9}-1$. Покажемо. Що то є шукане значення. Нехай $A=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$, $B=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$. Очевидно, що $A\ge 3$ та $B\ge 3$. Таким чином кожна з нерівностей є чинною:

$$9(k^3+1)\le(k^3+1)AB,\ 9k^2A\le 3k^2AB \text{ та } 9kB\le 3kAB \Rightarrow$$

$$9(k^3+1+k^2A+B)\le(k+1)^3AB \text{ або } (k+\tfrac{a}{b})(k+\tfrac{b}{c})(k+\tfrac{c}{a})\le(k+1)^3AB.$$

Якщо тепер підставити знайдене значення $k=\sqrt[3]{9}-1$, то матимемо, що справджується потрібна нерівність: $(k+\frac{a}{b})(k+\frac{b}{c})(k+\frac{c}{a})\le AB$.

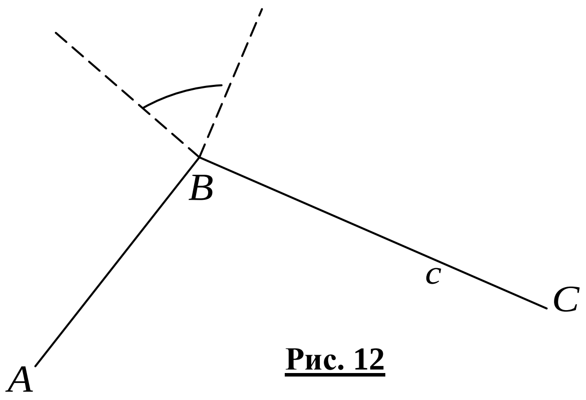

Рис. 12

3.1. Задача № 3.1 **()** середньої ліги.

3.2. Задача № 3.2 **()** середньої ліги.

4.1. Для опуклого n-кутника побудовані n одиничних кіл з центрами в вершинах. Доведіть, що принаймні на одному з кіл існує дуга величиною $\frac{2\pi}{n}$, яка немає спільних точок з іншими колами.

Розв'язання. Розглянемо кут $\angle ABC$ і всередині цього кута точку M, далі розглянемо два кола однакового радіуса з центрами в точках B та M. Їх перетин лежить в тій половині, що містить точку M, відносно прямої, що перпендикулярна BM та проходить через B. Тоді їхній перетин точно не лежить в тій частині, що визначається перпендикулярами до сторін кута BC та BA.
Нехай тепер A, B, C сусідні вершини n–кутника (рис. 12). Тоді жодний з перетинів не лежіть в зазначеному вище куті. Залишається зрозуміти, що сума кутів n–кутника складає $\pi(n-2)$, тому найменший кут не більше ніж $\frac{\pi(n-2)}{n}$, тому відповідний такому куту шуканий кут не менше ніж $\pi-\frac{\pi(n-2)}{n}=\frac{2\pi}{n}$, що й треба було довести.

4.2. Два одиничних кола дотикаються зовнішнім чином. Розглянемо прямокутники чи квадрати, у яких кожна сторона дотикається принаймні одного з кіл. Яку найбільше та найменшу площу може мати такий прямокутник?

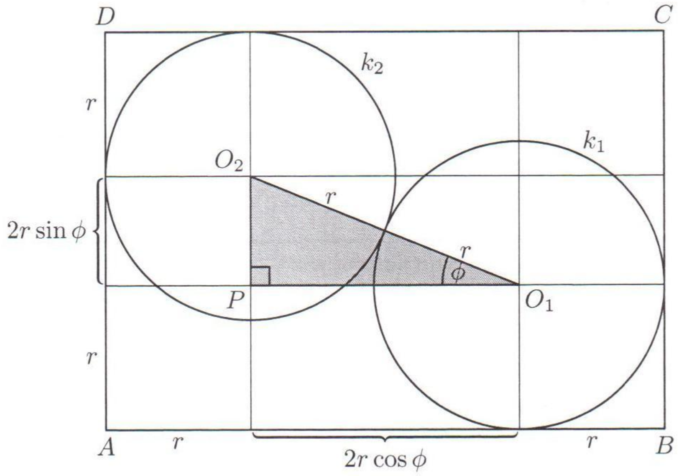

Рис. 13

Відповідь: $S_{\min}=8$; $S_{\max}=6+4\sqrt{2}$.

Розв'язання. Позначимо кола через k_1, k_2, центри кіл – O_1, O_2, прямокутник позначимо через $ABCD$ і без обмеження загальності вважатимемо, що k_1 дотикається до сторін AB та BC, дві інші сторони дотикаються до k_2 (рис. 13). Проведемо прямі – паралельно AD через O_1 та паралельно AB через O_2. Нехай вони перетинаються в точці P. Позначимо $\angle PO_1O_2=\phi\in[0,\frac{\pi}{4}]$. Тоді

$$S_{ABCD}=AB\cdot BC=(2r+2r\cos\phi)(2r+2r\sin\phi)=4(1+\cos\phi)(1+\sin\phi).$$

Дослідимо функцію

$$V(\phi)=(1+\cos\phi)(1+\sin\phi)=1+\cos\phi+\sin\phi=\tfrac{1}{2}+(\cos\phi+\sin\phi)+\tfrac{1}{2}(\cos\phi+\sin\phi)^2.$$

Позначимо $u=\cos\phi+\sin\phi\in[1;\sqrt{2}]$, тоді функція $V(u)=\frac{1}{2}+u+\frac{1}{2}u^2$ зростає на вказаному проміжку. Таким чином найменше значення при $u=1$ або $\phi=0$, при цьому $S_{\min}=8$, а найбільше значення при $u=\sqrt{2}$ або $\phi=\frac{\pi}{4}$, і $S_{\max}=6+4\sqrt{2}$.

5. Знайдіть найменше натуральне число n, для якого при будь-якому фарбуванні чисел $1, 2, \ldots, n$ в один з трьох кольорів, існують два числа однакового кольору, чия різниця є квадратом натурального числа.

	1 B	2 C	3 A	4 C
5 A	6 B	7 C	8 B	9 C
10 A	11 B	12 C	13 B	14 C
15 A	16 B	17 A	18 B	19 C
20 A	21 B	22 A	23 B	24 C
25 A	26 C	27 A	28 B	

Рис. 14

Відповідь: 29.

Розв'язання. Припустимо, що числа $1, 2, \ldots, 29$ можна пофарбувати у три кольори належним чином. Тоді числа 1, 10 та 26 мають попарно різні кольори, бо різниця двох таких є квадратом цілого числа. Аналогічно для чисел 1, 17 та 26, тому числа 10 та 17 однакового кольору. Далі маємо, що однакові кольори мають такі числа: $11 \leftrightarrow 18$, $12 \leftrightarrow 19$, $13 \leftrightarrow 20$. Для останнього достатньо розглянути четвірку чисел: 4, 13, 20 та 29.

Якщо покласти $10 \leftrightarrow 17 = A$, то $11 \neq A$. Нехай $11 \leftrightarrow 18 = B$, тоді з рівності $19 = 18 + 1^2 = 10 + 3^2 \Rightarrow 12 \leftrightarrow 19 = C$. Аналогічно з умови $20 = 19 + 1^2 = 11 + 3^2$ маємо, що $13 \leftrightarrow 20 \leftrightarrow 17 = A$ – суперечність, бо $17 - 13 = 4$.

Залишається навести приклад, для якого існує шукане фарбування 28 чисел (рис. 14).

6. Задача № 6.1 **()** середньої ліги.

7.1. Задача № 7.1 **()** середньої ліги.

7.2. Задача № 7 **()** молодшої ліги.

8.1. Для яких натуральних n число $(n^3 + 39n - 2)n! + 17 \cdot 21^n + 5$ є квадратом цілого числа?

Відповідь: $n = 1$.

Розв'язання. Позначимо через $a_n = (n^3 + 39n - 2)n! + 17 \cdot 21^n + 5$.

Тоді при $n \geq 4$ $a_n \equiv 5^n + 5 \pmod 8$.

Для парного n $5^n \equiv 1 \pmod 8$ і $a_n \equiv 6 \pmod 8$. Квадрати цілих чисел можуть мати остачі $0, 1, 4$ за модулем 8. Тому у цьому випадку число не може бути квадратом цілого числа.

Квадрати цілих чисел можуть мати остачі $0, 1, 2, 4$ за модулем 7. При $n \geq 7$ $a_n \equiv 5 \pmod 7$ – також не може бути квадратом. Тому залишається перебрати декілька варіантів.

$n = 5 \Rightarrow a_5 \equiv 2 \pmod 5$ – не може бути квадратом.

$n = 3 \Rightarrow a_3 \equiv 3 \pmod 7$ – не може бути квадратом.

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 7670$ – не є квадратом.

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 400$ –є квадратом.

8.2. Задача № 8.1 **()** середньої ліги.