Задача T–1

Нехай a, b і c – додатні дійсні числа, які задовольняють умову $abc = 1$. Доведіть, що

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Задача T–2

Многочлен $P(x)$ степеня $n \geq 2$ з раціональними коефіцієнтами має n попарно різних дійсних коренів, які утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що серед коренів $P(x)$ можна обрати два, які також є коренями деякого квадратного тричлена з раціональними коефіцієнтами.

Задача T–3

Декілька піратів мали суперечку і тепер кожен з них націлив пістолети на деяких двох інших. Усіх піратів викликають по черзі в деякому порядку. Якщо викликаний пірат ще живий, то він одразу стріляє в двох піратів, яких він тримав під націлом (деякі з них можуть бути вже мертвими). Усі постріли миттєво вбивають. Після того, як викликали усіх піратів, виявилося, що рівно 28 піратів було вбито.

Доведіть, що якби піратів викликали в довільному іншому порядку, то принаймні 10 піратів все одно було б вбито.

Задача T–4

Дано натуральне число n і натуральні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$, що не перевищують 2^k, для деякого натурального $k \geq 3$. Назвемо *представленням* числа t таку послідовність невід'ємних цілих чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, що

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n.$$

Доведіть, що коли ціле невід'ємне число t має представлення, то воно також має представлення, у якому серед чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ менше, ніж $2k$ ненульових.

Час виконання: 5 годин
Час для запитань: 60 хвилин
Кожна задача оцінюється в 8 балів.
Порядок задач не залежить від їх складності.

Задача T–5

Нехай D – основа висоти, проведеної з вершини A в гострокутному трикутнику ABC, у якому $AB < AC$. Точки B' і C' лежать на променях AB і AC відповідно так, що точки B', C' і D колінеарні, а точки B, C, B' та C' лежать на одному колі з центром O. Доведіть, що якщо M – середина BC, а H – ортоцентр ABC, то $DHMO$ – паралелограм.

Задача T–6

Дано трикутник ABC. Бісектриса внутрішнього кута $\angle ABC$ перетинає сторону AC в точці L, а описане коло трикутника ABC в точці $W \neq B$. Нехай K – основа перпендикуляра з L на AW. Описане коло трикутника BLC вдруге перетинає пряму CK в точці $P \neq C$. Прямі BP і AW перетинаються в точці T. Доведіть, що $AW = WT$.

Задача T–7

Послідовність натуральних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ така, що

$$a_1 = 1 \qquad \text{і} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ для всіх натуральних } k.$$

Доведіть, що для будь-якого простого числа p вигляду $3\ell + 2$, де ℓ – ціле невід'ємне число, існує таке натуральне число n, що a_n ділиться націло на p.

Задача T–8

Натуральне число n назвемо *Сілезьким*, якщо існують такі натуральні числа a, b і c, що

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(а) Доведіть, що існує нескінченно багато Сілезьких натуральних чисел .

(б) Доведіть, що не всі натуральні числа є Сілезькими.

Час виконання: 5 годин
Час для запитань: 60 хвилин
Кожна задача оцінюється в 8 балів.
Порядок задач не залежить від їх складності.