Серия 0, повторяем стандартные вещи + двойные отношения

1. n — натуральное число, $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — простые числа. Докажите, что существует натуральное число k, взаимно простое с $p_1p_2\ldots p_n$, такое, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ выполнено

$$\text{НОД}(k + p_1p_2\ldots p_i, p_1p_2\ldots p_n) = 1.$$

2. Докажите, что существует бесконечно много составных n таких, что $7^{n-1} - 3^{n-1}$ делится на n.

3. По кругу в некотором порядке расставлены 2013 чисел

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \ldots, \frac{1}{2013\cdot 2014}.$$

Докажите, что найдётся 10 подряд идущих чисел, сумма которых меньше чем $\frac{1}{10000}$.

4. Анна и Борис играют в следующую игру. Анна выбирает 2018 попарно различных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$, а Борис пытается их угадать. Для этого Борис может задавать Анне вопросы вида: «Назови мне пару чисел a_i и a_j». Анна честно отвечает на эти вопросы (и, естественно, не говорит Борису, какое из чисел a_i, а какое a_j). За какое наименьшее количество вопросов Борис сможет наверняка назвать чему равняется каждое из a_i?

5. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots a_n > 0$ — действительные числа. Докажите, что

$$a_1a_2(a_1 - a_2) + a_2a_3(a_2 - a_3) + \ldots + a_{n-1}a_n(a_{n-1} - a_n) > a_1a_n(a_1 - a_n).$$

6. Решите в натуральных числах уравнение $14^n - 3^m = 2015$.

7. Пусть $S = \text{НОК}(2, 3, \ldots, 2015)$, натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, не превосходящие 2015 таковы, что $2S \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Докажите, что сумма нескольких из a_i равняется S.

8. В множестве X как минимум два элемента и для любых дву элементов $a \neq b$ из X найдётся такой элемент $c \in X$, что либо $\left|\frac{a-c}{b-c}\right| = 2$, либо $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 2$. Докажите, что X бесконечно.

9. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — инъективная функция такая, что $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ и

$$f\big(f(m) + f(n)\big) = f\big(f(n)\big) + f(m).$$

Докажите, что $f(n) = n + 2$ для всех $n \geqslant 2$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина $(a, b; c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

0_1. Докажите корректность определения.

0_2. Как связаны между собой двойные отношения точек и прямых?

10. Двойные отношения четырех точек сохраняются при центральных проекциях.

Определение. Если двойное отношение четверки (точек на прямой, прямых) равно -1, то четверка называется *гармонической*.

0_3. a) Пусть M и N — основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC. Тогда $(B, C; M, N) = -1$.

b) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X и Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, общие внутренние касательные пересекаются в точке B. Тогда $(A, B; X, Y) = -1$.

c) Пусть P лежит на диаметре AB окружности ω и P' — точка, инверсная P относительно ω. Тогда $(A, B; P, P') = -1$.

d) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B; O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b. (Отсюда и взялось название гармоническая четверка).

0_4. Обычно для определения двойного отношения четвёрки точек очень важен порядок, в котором их указывают. Докажите, что

a) $(A, B; C, D) \cdot (B, A; C, D) = 1$;

b) $(A, B; C, D) + (A, C; B, D) = 1$;

c) Пусть $(A, B; C, D) = \alpha$. Чему равно $(A, D; C, B)$?