Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 8 класс. 1 тур

1. В таблице 1009×1009 отмечено 2018 клеток. Докажите, что какая-то из отмеченных клеток расположена ниже и левее другой отмеченной клетки.

Указание: Назовем диагональ, проведенную из левого нижнего угла в правый верхний – главной. Всего диагоналей, параллельных главной, ровно 2017. Следовательно, по принципу Дирихле, на одной из них находится две отмеченные клетки. Очевидно, что одна из них находится строго правее и выше другой.

2. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC отмечена точка P, а на стороне BC – точка Q так, что $AB = CP$ и $AP = BP = PQ$. Докажите, что AQ – биссектриса угла BAC.

Решение: Обозначим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Тогда, т. к. $BP = PA$, получаем, что $\angle ABP = \alpha$, отсюда, $\angle BPC = 2\alpha$, как внешний. Далее, по условию $BC = PC$, следовательно, $\angle CBP = \angle BPC = 2\alpha$. Откуда, $180^\circ = \angle CBP + \angle BPC + BCP = 2\alpha + 2\alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 36^\circ$. Треугольник PBQ – равнобедренный, с углом при основании $2\alpha = 72^\circ \Rightarrow \angle BPQ = 36^\circ \Rightarrow \angle QPC = 36^\circ$. Следовательно, PQ – биссектриса внешнего угла в треугольнике ABP. Также, поскольку $\angle ABP = 36^\circ$ и $\angle PBQ = 72^\circ$, несложно заметить, что BQ – биссектриса внешнего угла $\angle ABP$. Отсюда получаем, что AQ – биссектриса $\angle BAC$.

3. Во дворе Машиного дома есть карусель. Она каждый день катается на ней, но каждый вечер оставляет ее в одном и том же положении. Каждую ночь к Маше во двор приходят три медведя и крутят карусель. Папа-медведь за один раз поворачивает карусель на $\frac{1}{7}$ от полного оборота, мама-медведица – на $\frac{1}{9}$, а сын-медвежонок – на $\frac{1}{32}$. Каждый из медведей может повернуть карусель столько раз, сколько хочет. В каком количестве различных положений может обнаружить Маша карусель поутру?

Ответ: 2016.

Указание: Поскольку $7 \cdot 9 \cdot 32 = 2016$, то все положения карусели – это обороты на $\frac{n}{2016}$ от полного оборота. Понятно тогда, что карусель может оказаться не более чем в 2016 разных положениях. Достаточно показать, что медведи смогут повернуть карусель на $\frac{1}{2016}$ полного оборота, поскольку тогда, повторяя свои действия n по раз каждый, они смогут повернуть карусель и на $\frac{n}{2016}$. Пусть папа-медведь повернет карусель один раз по часовой стрелке, а мама-медведь и сын-медвежонок по одному разу против часовой стрелки. Тогда карусель повернется на $\frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} = \frac{1}{2016}$.

4. Натуральные числа n и k удовлетворяют неравенству: $1 \leqslant n \leqslant k$. Известно, что для любого натурального делителя d числа n число $d^k + k$ является простым. Докажите, что число $n + k$ простое.

Решение: Сперва возьмем $d = 1$, получаем, что $1 + k = p$, где p – некоторое простое число. По условию, для любого натурального делителя d числа n число $d^k + k$ является простым, с другой стороны $d^k + k = d^{p-1} + p - 1 \equiv 1 + p - 1 \equiv 0 \,(\bmod\, p)$. Следовательно, $d^k + k = p$, откуда делаем вывод, что у n нет других делителей, помимо 1. Отсюда, $n = 1$ и, очевидно, $n + k$ – простое.

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 9 класс. 1 тур

1. Решите уравнение:

$$8\sqrt{xy} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right).$$

Ответ: $(0,0)$, $(1,1)$.

Указание: Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right) \geqslant 2\sqrt[4]{xy}\cdot 2\sqrt[4]{x}\cdot 2\sqrt[4]{y} = 8\sqrt{xy}.$$

Таким образом, равенство возможно только если во всех неравенствах $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geqslant 2\sqrt[4]{xy}$, $\sqrt{x}+1 \geqslant 2\sqrt[4]{x}$ и $\sqrt{y}+1 \geqslant 2\sqrt[4]{y}$ достигается равенство. Это возможно только при $x = y = 1$ или когда какое-то из чисел x и y равно 0. Но числа x и y могут быть равны нулю только одновременно. Сделав проверку, мы убеждаемся, что $x = y = 1$ и $x = y = 0$ являются решениями данного уравнения.

2. Комические куплеты собралось послушать 2018 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время прослушивания новых друзей не заводят и не ссорятся). Раз в минуту исполнитель куплетов мистер Харрис отправляет из зала в сад либо всех тех, у кого в зале осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого в зале осталось нечетное число друзей. Правда ли, что мистер Харрис наверняка сможет отправить всех в сад не более чем за 10 минут?

Ответ: Да, правда.

Указание: *Лемма: Пусть в данный момент в зале в данный момент $4n+2$ человека. Тогда мистер Харрис может отправить в сад не менее $2n+2$ человек.*

Действительно, так как людей с нечетным количеством знакомых не может быть нечетное число, то людей одного из типов будет не менее $2n+2$.

Теперь вернемся к исходной задаче. Пусть мистер Харрис каждый раз выгоняет максимально возможное число людей. Тогда можно свести результаты в таблицу, где в первой строке указаны минуты, а в нижней строке – максимальное возможное количество оставшихся людей к концу минуты.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2018	1008	504	252	126	62	30	14	6	2	0

Таким образом, мистер Харрис действительно сможет выгнать всех в сад за 10 минут.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с прямыми углами при вершинах B и D на продолжении стороны AB за точку A выбрана такая точка P, что $\angle BCP = \angle BAD$. Точка Q симметрична точке D относительно точки B. Докажите, что $\angle BAC = \angle BQP$.

Указание: Так как в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах B и D прямые, то этот четырехугольник вписанный. Пусть E – точка пересечения отрезка PC и описанной окружности четырехугольника $ABCD$. Пусть Q_1 – такая точка на прямой BD, что $\angle BAC = \angle BQ_1P$. Докажем, что $BD = BQ_1$. Так как $\angle BCE = \angle BCP = \angle BAD$, то $BD = BE$. С другой стороны, $\angle BQ_1P = \angle BAC = \angle BEC$. Следовательно, четырехугольник BQ_1PE – вписанный. Поэтому нам достаточно проверить, чтоPB – биссектриса угла EPQ_1 (тогда $Q_1B = BE = BD$). Рассмотрим разность $\angle BPQ_1 - \angle BPE$:

$$\begin{aligned}\angle BPQ_1 - \angle BPE &= [\text{угол между секущими}] = \angle DBA - \angle BQ_1P - \frac{1}{2}\smile BC + \frac{1}{2}\smile AE\\ &= \frac{1}{2}\smile DE + \frac{1}{2}\smile AE - \frac{1}{2}\smile BC - \frac{1}{2}\smile BC + \frac{1}{2}\smile AE = \frac{1}{2}\smile DE + \smile AE - \smile BC\\ &= [\text{так как } \smile AB + \smile BC = 180^\circ] = \frac{1}{2}\smile DE + \smile AE + \smile AB - 180^\circ = \frac{1}{2}(\smile DE + 2\smile EB) - 180^\circ\\ &= [\text{так как } \smile BE = \smile BD] = \frac{1}{2}(\smile DE + \smile EB + \smile BD) - 180^\circ = 0.\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали, что $BD = BQ_1$. Следовательно, $BQ = BQ_1$ и точки Q и Q_1 совпадают и требуемое равенство доказано.

4. Найдите все такие натуральные числа n, для которых $2^n + n^2 + 25$ – куб простого числа.

Ответ: $n = 6$.

Указание: Пусть $2^n + n^2 + 25 = p^3$. Очевидно, что $p \geqslant 3$. Но тогда n четное число. Следовательно, $2^n + 25$ дает остаток -1 при делении на 3. А так как $p = 3$ не является решением, то $2^n + n^2 + 25$ не делится на 3. Поэтому n^2 при делении на 3 не может давать остаток 1. Следовательно, n делится на 3. Таким образом мы доказали, что n делится на 6. Пусть $n = 6m$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид $(4^m)^3 + 36m^2 + 25 = p^3$. Так как $p > 4^m$, то $(4^m)^3 + 36m^2 + 25 \geqslant (4^m+1)^3$, что равносильно $12m^2 + 8 \geqslant 16^m + 4^m$. Очевидно, что при $m \geqslant 2$ это неравенство не верно. Если $m = 1$, то $n = 6$ и $p = 5$.

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 10 класс. 1 тур

1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) для которых число $a^{2018} + b$ делится на ab.
Ответ: $(1, 1)$ и $(2, 2^{2018})$.

Указание: Из того, что $a^{2018} + b \,\vdots\, ab$, следует, что $b \,\vdots\, a$. Значит, $b = ab_1$, $b_1 \in \mathbb{N}$. Подставляя в условие, получаем, что $a^{2018} + ab_1 \,\vdots\, a^2 b_1$. Отсюда $a^{2017} + b_1 \,\vdots\, ab_1$. Повторяя это рассуждение еще 2017 раз, имеем, что $1 + b_{2018} \,\vdots\, ab_{2018}$. Следовательно, $1 \,\vdots\, b_{2018}$, т. е. $b_{2018} = 1$. Тогда $2 \,\vdots\, a$, а, значит, $a = 1$ или $a = 2$. Осталось написать ответ.

2. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$(a+1)\sqrt{2a(1-a)} + (b+1)\sqrt{2b(1-b)} + (c+1)\sqrt{2c(1-c)} \geqslant 8(ab + bc + ac).$$

Указание: Докажем, что $(a+1)\sqrt{2a(1-a)} \geqslant 4(ab + ac)$. Действительно,

$$(a+1)\sqrt{2a(1-a)} \geqslant 4(ab+ac) \Leftrightarrow (a+1)\sqrt{2a(b+c)} \geqslant 4(ab+ac) \Leftrightarrow a+1 \geqslant 2\sqrt{2a(b+c)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2a+b+c)^2 \geqslant 8(ab+ac) \Leftrightarrow (2a-b-c)^2 \geqslant 0.$$

Аналогично,

$$(b+1)\sqrt{2b(1-b)} \geqslant 4(ab+bc),$$
$$(c+1)\sqrt{2c(1-c)} \geqslant 4(bc+ac).$$

Складывая все три неравенства, получаем то неравенство, что требовалось доказать.

3. В некоторой стране 2017 городов. Между некоторыми из них осуществляются двусторонние авиаперелеты. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого. Министерство обороны хочет выбрать несколько городов и назвать их стратегически важными таким образом, чтобы от любого из городов страны существовал прямой авиаперелет до некоторого стратегически важного. Какого минимального количества стратегически важных городов гарантировано хватит министерству обороны?

Ответ: 1344 города.

Указание: Переформулируем условие задачи на языке теории графов. Требуется найти такое наименьшее число s, что в любом связном графе, у которого 2017 вершин, можно отметить не более чем s его вершин таким образом, что у любой вершины найдется отмеченная соседняя вершина (будем называть соседнюю вершину соседкой).

Докажем, что $s \geqslant 1344$. Рассмотрим граф с вершинами $v^{(0)}$, $v_j^{(1)}$, $v_j^{(2)}$, $v_j^{(3)}$, $j = 1, \ldots, 672$ и ребрами $(v^{(0)}, v_j^{(1)})$, $(v_j^{(1)}, v_j^{(2)})$, $(v_j^{(2)}, v_j^{(3)})$, $j = 1, \ldots, 672$. Пусть k – произвольное число от 1 до 672. У вершин $v_k^{(2)}$ и $v_k^{(3)}$ должна быть отмеченная соседка, а значит, обязательно будет отмечена $v_k^{(2)}$, как единственная соседка $v_k^{(3)}$, и одна из вершин $v_k^{(1)}$ и $v_k^{(3)}$ должна быть отмена, поскольку других соседей у $v_k^{(2)}$ нет. Следовательно, всего должно быть отмечено хотя бы $2 \cdot 672 = 1344$ вершины.

Докажем что $s \leqslant 1344$. Можно считать, что заданный граф является деревом, так как иначе можно выделить остовное дерево и доказать утверждение для него. Выберем в качестве корня висячую вершину и назовем ее $v^{(0)}$, а остальные расположим по уровням стандартным образом. Раскрасим вершины в три цвета так, что вершины на уровнях вида $3k+1$ покрашены в первый цвет, на уровнях вида $3k+2$ покрашены во второй цвет, а остальные в третий цвет. По принципу Дирихле, найдется такой цвет, в который покрашено хотя бы 673 вершины. Отметим все вершины двух других цветов. Тогда мы отметили не более 1344 вершины, и у любой невисячей вершины есть отмеченная соседняя вершина. Пусть v – висячая вершина ($v \neq v^{(0)}$), v_1 – родитель v, v_2 – родитель v_1. Заметим, что v_2 существует, так как уровней не меньше трёх. Если у v нет отмеченной соседки, то v_1 не отмечена, а значит, отмечены v и v_2. Уберем отметку с v и отметим v_1. Тогда количество отмеченных вершин не изменится, у всех вершин, у которых была отмеченная соседка, она останется, а также и у v теперь будет отмеченная соседка. Аналогично для корневой вершины. Проделав, при необходимости, описанную операцию конечное число раз, мы добьемся того, чтобы у всех вершин была отмеченная соседка. Ч. т. д.

4. В треугольнике ABC выполнено неравенство $AB < AC$. Биссектриса угла BAC треугольника пересекает его описанную окружность в точке D. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает биссектрису внешнего угла при вершине A треугольника ABC в точке Z. Докажите, что середина отрезка AB лежит на описанной окружности треугольника ADZ.

Указание: Пусть M, N и K – середины AB, AC и BC соответственно, и пусть $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}\angle ZCA &= \angle ZAC = 90^\circ - \alpha,\\ \angle BCD &= \angle BAD = \alpha,\\ \angle NZC &= 90^\circ - \angle ZCA = \alpha.\end{aligned}$$

Докажем, что $\triangle ZCD \sim \triangle ZNM$. Действительно,

$$\angle ZCD = \angle ZCA + \angle ACB + \angle BCD = 90^\circ - \alpha + \angle ANM + \alpha = \angle ANM + \angle ANZ = \angle ZNM,$$

и $\dfrac{MN}{DC} = \dfrac{KC}{DC} = \cos\alpha = \dfrac{ZN}{ZC}$, а значит, эти треугольники подобны. Из подобия легко следует, что $\angle MZD = \angle NZC = \alpha = \angle MAD$. Следовательно, четырехугольник $AZDM$ вписанный, т. е. точка M лежит на описанной окружности треугольника ADZ, ч. т. д.

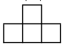
Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 11 класс. 1 тур

1. Известно, что наибольший общий делитель чисел a и b в 9 раз меньше, чем наибольший общий делитель чисел $a+6$ и b. Какие значения может принимать НОД(a, b)?

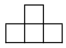
Ответ: 3 или 6.

Указание: Пусть НОД$(m, n) = d$, тогда $m = dm_1$, $n = dn_1$, где m_1 и n_1 – натуральные взаимно простые числа. Так как НОД$(m+6, n) = 9d$, то $dm_1 + 6$ делится на $9d$, то есть d – делитель числа 6. Кроме того, каждое из чисел $m+6$ и n делится на 9, поэтому m делится 3. Следовательно, d делится на 3. Таким образом, достаточно проверить $d = 3$ и $d = 6$. Покажем, что оба случая возможны:

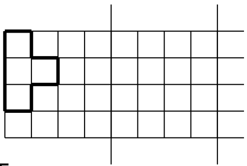
1) Пусть $m = 21$, $n = 27$, тогда НОД$(21, 27) = 3$, НОД$(27, 27) = 27$.
2) Пусть $m = 48$, $n = 54$, тогда НОД$(48, 54) = 6$, НОД$(54, 54) = 54$.

2. Задано натуральное число n. Сколькими способами можно разбить доску $4 \times 4n$ на фигурки вида:  ? *Фигурки можно поворачивать и переворачивать.*

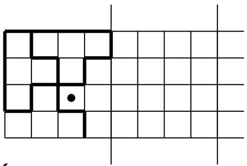
Ответ: $2 \cdot 3^{n-1}$.

Указание: Обозначим $T(n)$ количество разбиений доски $4 \times 4n$ на фигурки вида: . Легко заметить, что квадратик 4×4 можно разбить требуемым образом двумя способами:

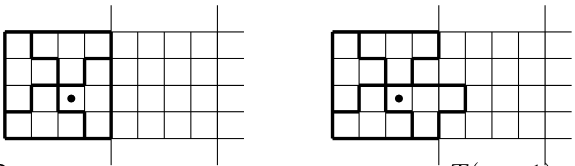
Рассмотрим теперь доску $4 \times 4n$. Разделим ее на квадраты 4×4. Выберем один из двух способов, которым заполнена правая верхняя клетка таблицы, например, такой:



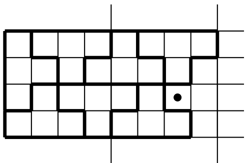
Тогда следующие две фигурки можно расположить на доске единственным способом:



Клетку, отмеченную кружочком можно накрыть фигуркой двумя способами:



В первом из этих случаев существует $T(n-1)$ способов заполнить оставшуюся часть доски (у нас отделился квадратик 4×4 слева). Во втором случае одна из фигур вылезла за границы левого квадратика 4×4 и у нас днозначно заполняется следующий кусок:



Дальше снова возникает два случая: клетка с точкой либо накрыта фигуркой полностью лежащей во втором квадрате 4×4, либо вылазит за его границу. И т. д. Тогда, количество способов заполнить доску в рассматриваемом случае: $T(n-1) + T(n-2) + \ldots + T(1) + 1$ (слагаемое 1 соответствует случаю, когда фигурки пересекают все линии, разделяющие квадраты 4×4).

Во втором случае заполнения правой верхней клетки рассуждение аналогично и количество способов такое же.

Т. о., количества способов заполнить доску удовлетворяют рекуррентному соотношению: $T(n) = 2\,(1 + T(1) + T(2) + \ldots + T(n-1))$. Теперь по индукции несложно доказать явную формулу $2 \cdot 3^{n-1}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H, а биссектрисы – в точке I. Окружность, описанная около треугольника IBC, пересекает отрезок AB в точке T. Точка Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки H на прямую IA. Точка P такова, что Q – середина отрезка PT. Докажите, что точки B, H и P лежат на одной прямой.

Указание: Заметим, что поскольку четырехугольник $CBTI$ – вписанный, то $\angle ITA = \angle ICB = \angle ICA$. Следовательно, $\triangle AIC = \triangle AIT$, по общей стороне и углам. Отсюда, треугольник ACT – равнобедренный, где AI – биссектриса, а значит и высота. Т. е. мы получили, что AI перпендикулярна HQ и CT, откуда $HQ \parallel CT$. Обозначим K – точку пересечения HQ и высоты треугольника ACT, проведенной из точки T. И пусть CT и BH пересекаются в точке L. По доказанному, $HK \parallel LT$ и, очевидно, $LH \parallel KT$, следовательно, $HLTK$ – параллелограмм, отсюда, $HK = LT$. Теперь докажем, что Q – середина HK. Действительно, пусть H_1 – ортоцентр треугольника ATC. Тогда, в треугольнике H_1TC отрезок HK параллелен CT и H_1Q является высотой, медианой и биссектрисой, следовательно, H_1Q делит HK пополам. Обозначим точку пересечения TQ и BH через P'. В треугольнике $P'LT$ отрезок HQ параллелен основанию и равен его половине. Следовательно, HQ – средняя линия, откуда получаем, что $P'K = KT \Rightarrow P' = P$.

4. Дана последовательность $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел, причем $c_{2018} > 0$. Последовательность многочленов определяется следующим образом:

$$P_{-1}(x) = 0\ ,\ P_0(x) = 1\ ,\ P_{n+1}(x) = xP_n(x) + c_nP_{n-1}(x) \text{ при } n \geqslant 0.$$

Докажите, что не существует натурального $n > 2018$ и действительного a таких, что

$$P_{2n}(x) = P_n(x^2 + a).$$

Указание: Обозначим $v_n(i)$ – коэффициент при x^i многочлена $P_n(x)$. Заметим, что из рекуррентного соотношения следует, что $P_n(x)$ – унитарный многочлен степени n. Поскольку все его коэффициенты неотрицательны, то многочлен $P_n(x)$ монотонно возрастает на промежутке $[0, +\infty)$. Докажем следующие утверждения:

Утверждение 1: Если $v_n(i) > 0$, то $i \leqslant n$ и $i \equiv n \pmod 2$.

Действительно, неравенство $i \leqslant n$ сразу следует из того, что степень $P_n(x)$ равна n. Чтобы доказать соотношение $i \equiv n \pmod 2$, достаточно заметить, что $P_n(x)$ четная функция, если n четно и $P_n(x)$ нечетная функция, если n нечетно (это легко доказать по индукции).

Утверждение 2: Выполнено соотношение $v_n(n-2) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i$.

Докажем это по индукции. База индукции очевидна. Предположим соотношение верно при $\forall k \leqslant n$. Из рекуррентного соотношения следует, что $v_{n+1}(n-1) = v_n(n-2) + c_nv_{n-1}(n-1) = v_n(n-2) + c_n$. По предположению индукции $v_n(n-2) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i \Rightarrow v_{n+1}(n-1) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$.

Утверждение 3: Выполнено соотношение $v_n(n-4) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} c_ic_j - \sum\limits_{i=1}^{n-2} c_ic_{i+1}$.

Снова для доказательства будем использовать метод математической индукции. База, очевидно, верна. Пусть утверждение верно при $\forall k \leqslant n$. Тогда, $v_{n+1}(n-3) = v_n(n-4) + c_nv_{n-1}(n-3) = v_n(n-4) + c_n\left(\sum\limits_{i=1}^{n-2} c_i\right)$, с учетом утверждения 2. Пользуясь предположением индукции, $v_{n+1}(n-3) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} c_ic_j - \sum\limits_{i=1}^{n-2} c_ic_{i+1} + c_n\left(\sum\limits_{i=1}^{n-2} c_i\right) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} c_ic_j - \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_ic_{i+1}$.

Докажем утверждение задачи. Предположим, существуют $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ для которых $P_{2n}(x) = P_n(x^2 + a)$. Сравним коэффициенты при x^{2n-2} в левой и правой частях и, используя утверждение 2, получим $v_{2n}(2n-2) = \sum\limits_{i=1}^{2n-1} c_i$. С другой стороны, в силу утверждения 1 коэффициент при x^{2n-2} в $P_n(x^2 + a)$ равен $\binom{n}{1}a = na$ откуда $a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2n-1} c_i}{n}$. Сравним теперь коэффициенты при x^{2n-4} в обеих частях равенства. Используя утверждение 3, получаем $v_{2n}(2n-4) = \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n-1} c_ic_j - \sum\limits_{i=1}^{2n-2} c_ic_{i+1}$. В силу утверждения 2, коэффициент при x^{2n-4} многочлена

$P_n(x^2+c)$ равен $\binom{n}{2}a^2 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i \geqslant \binom{n}{2}a^2 = \left(\dfrac{n-1}{2n}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} c_i\right)^2$, при $a = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{2n-1} c_i}{n}$, причем равенство достигается при $c_i = 0\ \forall 1 \leqslant i < n$. С другой стороны $\left(\dfrac{n-1}{2n}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{2n-1} c_i\right)^2 \geqslant \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2n-1} c_i c_j - \sum\limits_{i=1}^{2n-2} c_i c_{i+1} = v_{2n}(2n-4)$. Поскольку равенство должно достигаться, то $c_i = 0\ \forall 1 \leqslant i < n$. Но $c_{2018} > 0 \Rightarrow n \leqslant 2018$. Ч. т. д.