Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

IV етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LVII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

2 тур

22 березня 2017 року

«IQ хорош, но мог бы быть трехзначным…»
Наталья Резник

м. Чернігів

8 клас

8–5. Яку найбільшу кількість цифр може мати число, що задовольняє такі умови: воно є n-м степенем натурального числа (n-- повинно бути натуральним числом, більшим за 1) і для деякого натурального k його цифри зліва направо від першої до k-ї строго зростають, а з k-ї до останньої – строго спадають.

***Відповідь*:** 17 цифр.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що більшу кількість цифр число не може мати. Цифру 0 шукане число мати не може, оскільки на початку числа 0 знаходитись не може, а наприкінці числа, яке є точним степенем, нулів має бути не менше двох, що порушує умову. Крім того, число не може мати дві цифри 9, бо так само порушується монотонність цифр. Таким чином, цифр не може бути більше 17. Наведемо приклад:

$$111111111 \cdot 111111111 = 12345678987654321.$$

8–6. Дано гострокутний трикутник ABC. Нехай D – точка, що симетрична точці A відносно прямої BC. Прямі DB та DC вдруге перетинають описане коло w трикутника ABC в точках X і Y відповідно. Припустимо, що точки X та Y лежать всередині відрізків DB та DC відповідно. Доведіть, що центр описаного кола трикутника XYD лежить на колі w.

(Данило Хілько)

Розв'язання. Нехай P – друга точка перетину прямої AD з колом w (рис. 1). Доведемо, що P – центр описаного кола ΔXYD. Справді, з симетрії отримуємо, що ΔDBA і ΔDCA рівнобедрені. Тому $\angle BAD = \angle BDA$ і $\angle CAD = \angle CDA$. З вписаних кутів, враховуючи попереднє, отримуємо:

$$\angle DXP = 180° - \angle BXP = \angle BAD,$$
$$\angle PYD = 180° - \angle PYC = \angle DAC.$$

Звідси ΔXPD і ΔDPY рівнобедрені, а тому $XP = PD$, $PY = PD$. Інакше кажучи, $XP = PY = PD$, тобто P дійсно центр описаного кола ΔDXY.

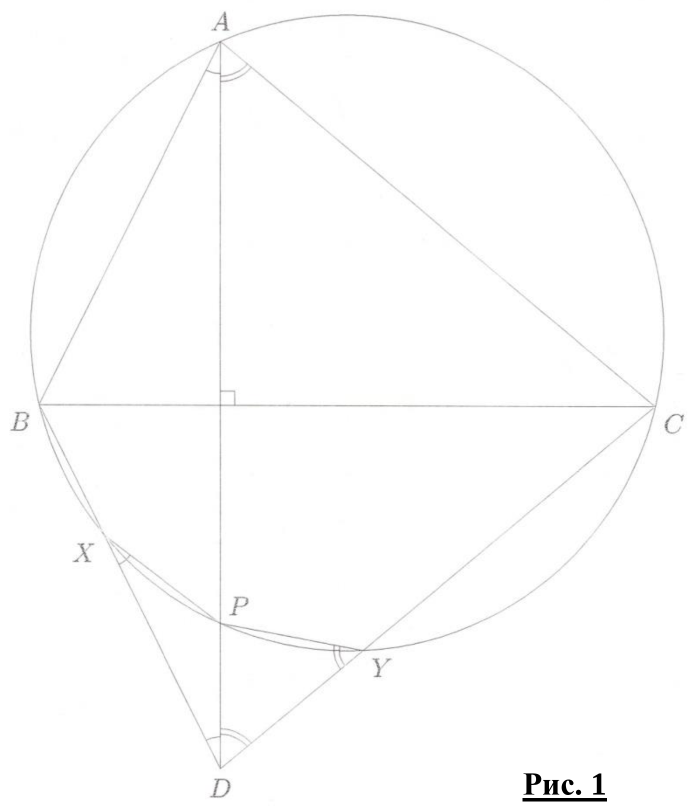


Рис. 1

8–7. Задано натуральне число $n \geq 3$. Олеся грає у наступну гру: на початку гри фішка розташована на Декартовій площині XOY у початку координат. Олеся пересуває фішку за такими правилами: фішку можна рухати по площині тільки паралельно координатним осям. На першому кроці фішка повинна переміститися на відстань 1, на другому кроці – на відстань 2, на третьому – на відстань 3, і так далі (пересування фішки на кожному новому кроці є на 1 довшим, у порівнянні з попереднім кроком). Усього Олеся робить n кроків. Її програш у цій грі дорівнює максимальній відстані від фішки до початку координат протягом усієї гри (не обов'язково після n-го кроку). Якого найменшого програшу може домогтися Олеся?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $[\frac{n+1}{2}]$.

Розв'язання. Спочатку наведемо таку послідовність ходів Олесі, при якій вона отримує програш $[\frac{n+1}{2}]$. Усі ходи будемо робити вздовж осі абсцис, причому кожний наступний хід у напрямі, протилежному до попереднього (рис. 2). Тоді неважко побачити, що максимальна відстань для такої стратегії досягається після останнього ходу. Неважко порахувати, що після n-го ходу відстань складатиме $[\frac{n+1}{2}]$.

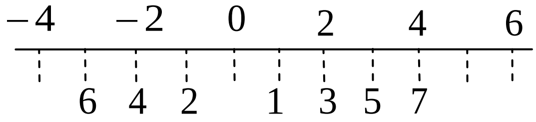


Рис. 2

Покажемо, що це найменше можливе значення. Розглянемо останній хід гравця. Фішка на цьому ході пересувається на n одиниць. Нехай, наприклад, цей хід зроблений у горизонтальному напрямі. Тоді або початкове положення фішки, або кінцеве знаходяться по горизонталі на відстані не менше ніж $[\frac{n+1}{2}]$ від початку координат. Якщо фішка при цьому знаходиться не на осі абсцис, то ця відстань буде ще більшою.

8–8. Для додатних чисел x, y, z справджується рівність:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Які значення може приймати сума $xy+yz+zx$?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $xy+yz+zx=1$.

Розв'язання. Позначимо суму $xy+yz+zx=A>0$. Тоді праву частину рівності можна переписати таким чином:

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}=\frac{2A}{(x+y)(y+z)(z+x)A}=\frac{(xy+xz)+(yx+yz)+(zx+zy)}{(x+y)(y+z)(z+x)A}=$$

$$=\frac{x(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)A}+\frac{y(x+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)A}+\frac{z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)A}=$$

$$=\frac{x}{(x+y)(z+x)A}+\frac{y}{(x+y)(y+z)A}+\frac{z}{(y+z)(z+x)A}=\frac{x}{(x^2+A)A}+\frac{y}{(y^2+A)A}+\frac{z}{(z^2+A)A}.$$

Якщо $A>1$, то $(x^2+A)A>x^2+A>x^2+1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}>\frac{x}{(x^2+A)A}$ і рівність не можлива, оскільки кожний доданок у лівій частині більший за відповідний доданок у правій частині.

Аналогічно, якщо $A<1$, то $(x^2+A)A<x^2+A<x^2+1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}<\frac{x}{(x^2+A)A}$ і кожний доданок у лівій частині менший за відповідний доданок у правій частині, і знову рівність неможлива.

Тому залишається єдина можливість $A=1$. Умові, наприклад, задовольняють числа $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9 клас

9–5. Натуральні числа k та N задовольняють умову:

$$N\cdot(N+1)\cdot\ldots\cdot(N+k)=6\,952\,862\,280.$$

Знайдіть усі можливі значення k та N, якщо відомо, що остання цифра числа N дорівнює 1.

(Богдан Рубльов)

Відповідь: $k=4,\ N=91$.

Розв'язання. Оскільки сума цифр добутку дорівнює 48, то це число не кратне 9, тому серед множників в лівій частині може бути не більше одного, що кратний 3. Тому чисел щонайбільше 5, бо за принципом Діріхле з 6 чисел, що йдуть поспіль, принаймні два кратні 3, тому їх добуток кратний 9. Оскільки N закінчується на цифру 1, то числа N, $N+1$, $N+2$ та $N+3$ не діляться на 5. Оскільки добуток кратний 5, то й чисел повинно бути щонайменше 5. Таким чином, $k=4$.

З умови $100^5 > 6952862280$ зрозуміло, що число N – двоцифрове число, що закінчується на цифру 1. При цьому, воно має давати остачу 1 при діленні на 3 (інакше серед п'яти чисел буде два, що кратні 3). Таким чином, це або 31, або 61, або 91. Оскільки

$$90^5 = 5904900000 < 6952862280,$$

то шукане число 91. Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що воно задовольняє потрібні умови.

9–6. Нехай w_1, w_2 – два кола на площині, що не перетинаються. Пряма AB – їх спільна зовнішня дотична, O – точка перетину спільних внутрішніх дотичних, H – основа перпендикуляру, що опущений з O на AB. З точки H провели дотичні HC, HD до кіл w_1, w_2 відповідно, відмінні від AB. Доведіть, що HO – бісектриса $\angle CHD$.

(Назар Сердюк)

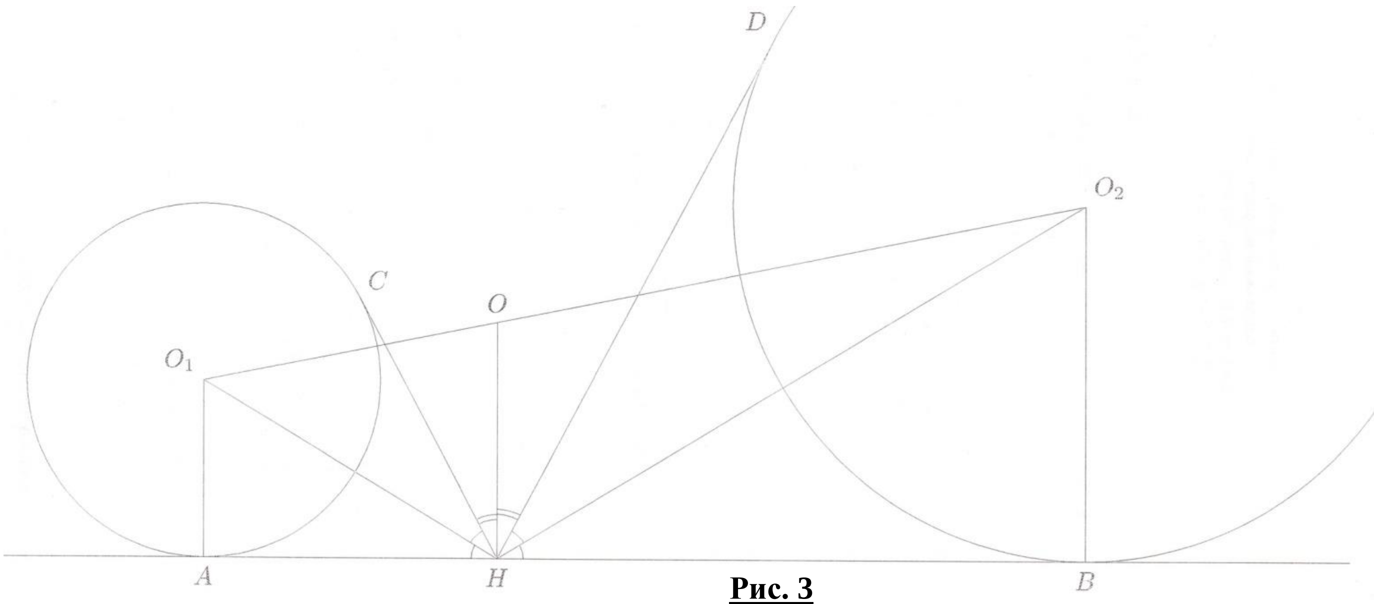


Рис. 3

Розв'язання. Відмітимо точки O_1, O_2 – центри кіл w_1, w_2 відповідно, а через r_1, r_2 позначимо їх радіуси. Тоді, як добре відомо, точки O, O_1, O_2 колінеарні, причому $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{r_1}{r_2}$ (рис. 3). Зрозуміло, що $O_1A \perp AB$ і $O_2B \perp AB$, тому $O_1A \parallel OH \parallel O_2B$. Тоді за теоремою Фалеса $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{AH}{HB}$. Оскільки $r_1 = O_1A,\ r_2 = O_2B$, то $\frac{AO_1}{BO_2} = \frac{AH}{HB}$, тобто трикутники $\Delta O_1AH \sim \Delta O_2BH$, бо вони прямокутні і мають пропорційні сторони. Тому $\angle O_1HA = \angle O_2HB$. З симетрії

$$\angle CHA = 2\angle O_1HA = 2\angle O_2HB = \angle DHB.$$

Отже,

$$\angle CHO = 90° - \angle CHA = 90° - \angle DHB = \angle OHD,$$

що й треба було довести.

9–7. На дошці записано число 2017. На кожному кроці ми дописуємо на дошку ще одне натуральне число так, щоб виконувались умови: середнє арифметичне усіх чисел, що на даний момент записані на дошці, повинно бути натуральним і меншим, від середнього арифметичного, що було обчислене на попередньому кроці. Яку максимальну кількість чисел ми зможемо написати на дошці, враховуючи початкове?

(Богдан Рубльов)

Відповідь: 1009.

***Розв'язання*.** Спочатку спробуємо з'ясувати – за яких умов ми зможемо на дошці написати число так, щоб середнє арифметичне стало рівно на 1 менше ніж попереднє.

Нехай на дошці вже записано n чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, які мають середнє арифметичне A_n. Допишемо число a_{n+1}. Тоді нове середнє арифметичне буде дорівнювати

$$A_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} = \frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

Щоб воно стало на 1 меншим треба, щоб виконувалась умова:

$$\frac{nA_n + a_{n+1}}{n+1} = A_n - 1, \text{ звідси } nA_n + a_{n+1} = nA_n + A_n - (n+1) \text{ або } a_{n+1} = A_n - (n+1) > 0.$$

Таким чином, ми зможемо записати $(n+1)$-ше число і зменшити середнє арифметичне на 1 за умови, що середнє арифметичне на даний момент більше, ніж $n+1$. За нашим алгоритмом, на n-му кроці середнє арифметичне дорівнює $A_n = 2018 - n$, тому ми не зможемо дописати ще одне число потрібним чином, якщо $A_n = 2018 - n \le n+1$, звідси при $n \ge \frac{2017}{2} > 1008$ ми не зможемо записати наступне число. Таким чином, максимальна кількість чисел, що може бути записана на дошці, при нашій додатковій умові, дорівнює 1008 чисел.

Покажемо, що для інших послідовностей, більше чисел на дошці бути не може. Після n-го кроку середнє арифметичне B_n не може бути більше за $A_n = 2018 - n$. Якщо наступне середнє B_{n+1} буде менше B_n принаймні на $l \ge 1$, то отримаємо

$$\frac{nB_n + a_{n+1}}{n+1} = B_n - l \Rightarrow nB_n + a_{n+1} = nB_n + B_n - l(n+1), \text{ звідки } a_{n+1} = B_n - l(n+1) > 0.$$

Тобто і у цьому випадку шукане n, для якого вже не можна записати наступне число, не перевищує 1008.

9–8. Задано натуральне число $n \ge 3$. Олеся грає у таку гру: на початку гри фішка розташована на Декартовій площині XOY у початку координат. Олеся пересуває фішку за такими правилами: фішку можна рухати по площині тільки паралельно координатним осям. На першому кроці фішка повинна переміститися на відстань $1 = 2^0$, на другому кроці – на відстань $2 = 2^1$, на третьому – на відстань $4 = 2^2$, і так далі (пересування фішки на кожному новому кроці є удвічі довшим, у порівнянні з попереднім кроком). Усього Олеся робить n кроків. Її програш у цій грі дорівнює максимальній відстані від фішки до початку координат протягом усієї гри (не обов'язково після n-го кроку). Якого найменшого програшу може домогтися Олеся?

(Богдан Рубльов)

***Відповідь*:** $\sqrt{2^{2n-4}+1}$.

***Розв'язання*.** Спочатку наведемо таку стратегію ходів Олесі, при якій вона отримує програш $\sqrt{2^{2n-4}+1}$. Нехай для зручності обчислень фішка зробила $(n+1)$ хід, нульовий хід довжиною 2^0, першій – довжиною 2^1, …, n-й хід довжиною 2^n, де $n > 1$. Нехай ходи від 0-го до $(n-3)$-го робляться вздовж вертикальної прямої (вісь ординат) вниз, далі $(n-2)$-й хід – вгору. Передостанній хід робиться наліво, а останній – направо. Обчислимо послідовність координат точок, в які попадає фішка при такій послідовності стрибків. Положення після k-го ходу, $k=\overline{1,n}$, позначимо через A_k. Тоді маємо, що:

$$A_0(0;-2^0) \text{ або } A_0(0;-(2^1-1)),\ A_1(0;-(2^2-1)),\ \ldots,\ A_{n-3}(0;-(2^{n-2}-1)),$$
$$A_{n-2}(0;1),\ A_{n-1}(-2^{n-1};1),\ A_n(2^{n-1};1).$$

Тепер неважко порахувати, що найбільші відстані від початку координат будуть саме для точок A_{n-1} та A_n і вони дорівнюють $R=\sqrt{2^{2n-2}+1}$. Тоді, для n ходів отримаємо, що максимальна відстань, при такому алгоритмі, дорівнює $\sqrt{2^{2n-4}+1}$.

Покажемо, що це найкращий результат. Знову вважаємо, що всього Олеся робить $n+1$ хід. Побудуємо круг з центром в початку координат та радіусом R (рис. 4). Якщо існує краща стратегія руху фішки, то весь її шлях повинен бути всередині цього круга. Останній хід фішки складає 2^n. Таким чином, повинен існувати (без обмеження загальності) горизонтальний відрізок довжини 2^n. Але такий відрізок існує лише на осі абсцис. Він повинен з'єднувати точки $B(-2^{n-1};0)$ та $C(2^{n-1};0)$. Бо на прямій $y=1$ точки A_{n-1} та A_n знаходяться саме на такій відстані, але вони на межі круга, а тому не можуть стати джерелом контрприкладу.

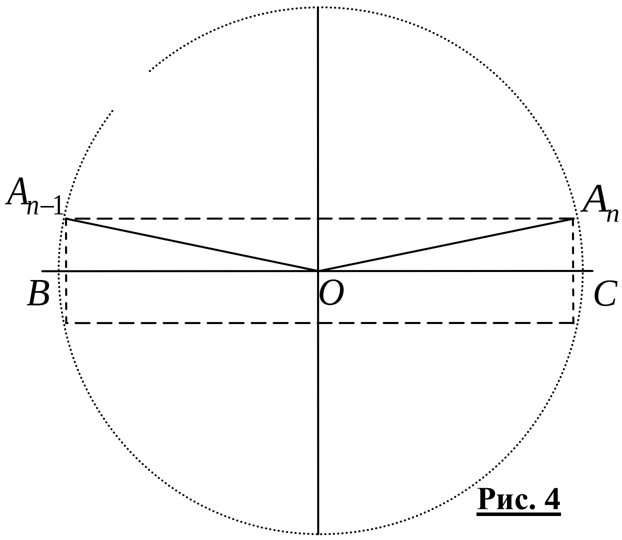


Рис. 4

Будемо вважати, що шуканий останній хід фішки утворював відрізок BC, з точки B у точку C. Тоді попередній хід був довжиною 2^{n-1}, тобто він міг бути зроблений тільки з точки O. Але це неможливо, бо за правилами кожен наступний хід за довжиною довший, за суму усіх попередніх ходів, тобто утворити послідовність ходів, щоб повернутися в початок координат, неможливо. Одержана суперечність завершує доведення.

10 клас

10–5. На вечірці було 12 сімейних пар. Організатори вечірки пронумерували пари числами 1, 2, 3, …, 12. По завершенню вечірки виявилось, що кожна з 12 дружин випила або 1 пляшку кока-коли або жодної. Кожен чоловік випив $2^k a_k$ пляшок кока-коли, де a_k – кількість пляшок, випитих його дружиною, а k – номер цієї пари. Відомо, що усього чоловіками було випито 2018 пляшок. Скільки сімейних пар не випили жодної пляшки кока-коли?

Відповідь: 5 сімейних пар не пили кока-колу.

Розв'язання. Оскільки $a_k=0$ або $a_k=1$, то з рівності

$$2a_1+2^2a_2+\ldots+2^{12}a_{12}=2018$$

можемо записати таку рівність у двійковій системі числення:

$$\overline{a_{12}a_{11}\ldots a_1 0}_{(2)}=2018$$

Залишається знайти подання числа 2018 у двійковій системі числення, яке є єдиним можливим:

$$2018 = 1024 + 994 = 1024 + 512 + 482 = 1024 + 512 + 256 + 226 =$$
$$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 98 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 34 =$$
$$= 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 2 = 1111110001\ 0_{(2)}.$$

Таким чином $a_2 = a_3 = a_4 = a_{11} = a_{12} = 0$, тобто рівно 5 сімейних пар не пили кока-колу.

10–6. Задано опуклий багатокутник $A_1A_2...A_{2017}$. Розглянемо такі 2017 кутів: $\angle A_{1009}A_1A_{1010}$, $\angle A_{1010}A_2A_{1011}$, …, $\angle A_{1008}A_{2017}A_{1009}$. Серед цих кутів виберемо найбільший. Яке найменше значення він може приймати?

Відповідь: $\frac{180^\circ}{2017}$.

Розв'язання. Розглянемо коло w достатньо великого радіуса, яке містить весь заданий опуклий багатокутник всередині. Продовжимо усі діагоналі $A_{i+1008}A_i$ та A_iA_{i+1009} до перетину із колом w. Тоді коло w розбивається точками на 4034 дуги, які ми позначимо як на рис. 6 через φ_1, φ_2, …, φ_{2017} та ψ_1, ψ_2, …, ψ_{2017}. Далі неважко зрозуміти з властивостей кутів між двома хордами, що $\alpha_i = \frac{1}{2}(\varphi_i + \psi_i)$. З рівностей $\sum(\varphi_i + \psi_i) = 2\pi$ та $\sum \alpha_i = \frac{1}{2}\sum(\varphi_i + \psi_i)$ випливає, що $\sum \alpha_i = \pi$. Оскільки кутів усього 2017, то найбільший кут, за принципом Діріхле, не може бути меншим від $\frac{180^\circ}{2017}$. Якщо він менше, то сума усіх 2017 цих кутів буде менше 180° і отримаємо суперечність. Таким чином, найменше можливе значення для цього кута дорівнює $\frac{180^\circ}{2017}$. Очевидно, що для правильного 2017-кутника досягається рівність.

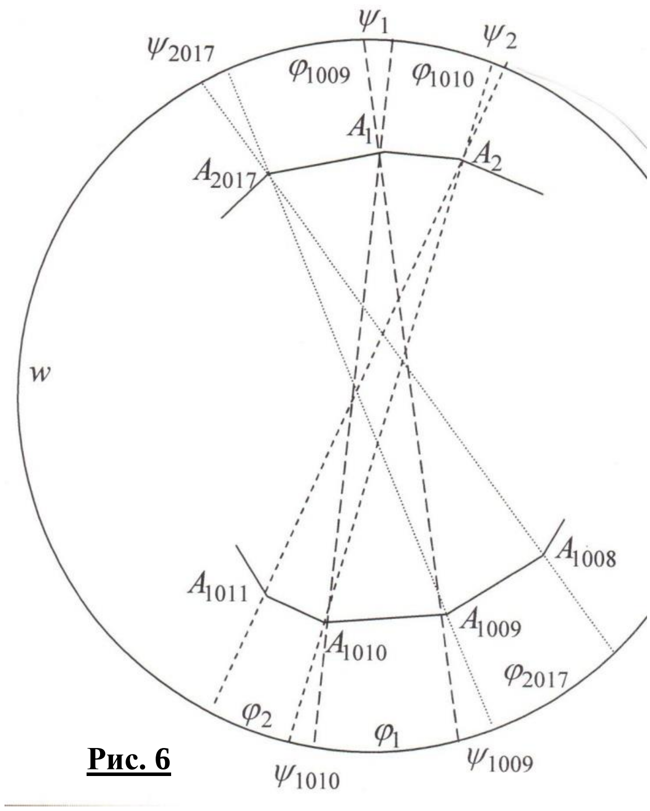


Рис. 6

Альтернативне розв'язання. Позначимо таким чином кути (рис. 7):

$$\alpha_i = \angle A_{i+1008}A_iA_{i+1009},\ \beta_i = \angle A_iA_{i+1009}A_{i+1008},$$
$$\gamma_i = \angle A_iA_{i+1008}A_{i+1009},\ i = \overline{1,\ 2017}\ (A_j \equiv A_{j+2017}).$$

Тоді з $\Delta A_{i+1008}A_iA_{i+1009}$ маємо, що $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180^\circ$.

Позначимо через $\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{2017}\alpha_i$, $\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{2017}\beta_i$ та $\Gamma = \sum_{i=1}^{2017}\gamma_i$. Тоді

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^\circ \cdot 2017. \qquad \textbf{(1)}$$

Якщо додати кути при вершині A_i, то матимемо, що

$$\angle A_{i+1008}A_{i+1009}A_i + \angle A_{i+1010}A_{i+1009}A_{i+1} -$$
$$- \angle A_iA_{i+1009}A_{i+1} = \angle A_{i+1008}A_{i+1009}A_{i+1010} \text{ або}$$
$$\gamma_i + \beta_{i+1} - \alpha_{i+1009} = \angle A_{i+1008}A_{i+1009}A_{i+1010}.$$

Якщо останні рівності додати для $i = \overline{1,\ 2017}$, то отримаємо

$$\Gamma + \mathrm{B} - \mathrm{A} = 180^\circ \cdot 2015 \qquad \textbf{(2)}$$

(у правій частині стоїть сума кутів опуклого 2017-кутника). Звідси $\mathrm{A} = 180^\circ$. Таким чином, сума кутів, що розглядають,

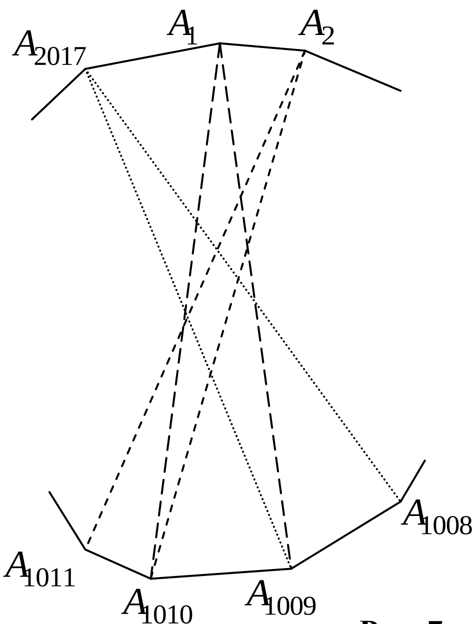


Рис. 7

дорівнює 180°. Завершення доведення співпадає з основним розв'язанням.

10–7. Задача 9–8.

10–8. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ac}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge\frac{3bc+ac-ab}{2ab+ac}+\frac{3ac+ab-bc}{2bc+ab}+\frac{3ab+bc-ac}{2ac+bc}.$$

(Данило Хілько)

<u>Розв'язання</u>. Спочатку перетворимо таким чином ліву частину:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{2b}{c}+\frac{c}{b}-6.$$

Додамо до обох частин нерівності 6. Тоді права частина набуває такого вигляду:

$$\frac{3bc+ac-ab}{2ab+ac}+2+\frac{3ac+ba-bc}{2bc+ab}+2+\frac{3ab+bc-ac}{2ac+bc}+2=$$
$$=\frac{3(ab+bc+ca)}{2ab+ac}+\frac{3(ab+bc+ca)}{2bc+ab}+\frac{3(ab+bc+ca)}{2ac+bc}.$$

Таким чином, залишається довести таку нерівність:

$$\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{2c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{2b}{c}+\frac{c}{b}\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2ab+ac}+\frac{3(ab+bc+ca)}{2bc+ab}+\frac{3(ab+bc+ca)}{2ac+bc}.$$

З нерівності Коші-Шварца маємо, що

$$(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{a})(2ab+ac)=(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a}+\tfrac{c}{a})(ab+ab+ac)\ge(a+b+c)^2,$$
$$(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{a}{b})(2bc+ab)\ge(a+b+c)^2,\ (\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a}+\tfrac{b}{c})(2ac+bc)\ge(a+b+c)^2.$$

З нерівності трьох квадратів маємо, що $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$.

Якщо поєднати останні нерівності, то матимемо, що:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2ab+ac},\ \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2bc+ab},\ \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}\right)\ge\frac{3(ab+bc+ca)}{2ac+bc}.$$

Якщо тепер додати одержані нерівності, то матимемо шукану.

11 клас

11–5. Для яких натуральних n число $n^{2017}+n^2+1$ є простим?

(Леонід Бедратюк)

***<u>Відповідь</u>*:** $n=1$.

<u>Розв'язання</u> Позначимо $k=672$, тоді

$$n^{3k+1}+n^2+1=n(n^{3k}-1)+(n^2+n+1).$$

Оскільки $n^{3k}-1=(n^3)^k-1 \,\vdots\, (n^3-1) \,\vdots\, n^2+n+1$, тому заданий вираз при кожному натуральному значенні n ділиться на n^2+n+1. Тому число $n^{2017}+n^2+1$ може бути простим лише якщо воно дорівнює n^2+n+1 та це число є простим. Оскільки це можливо лише при $n=1$, то це єдине значення, що задовольняє умові.

11–6. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло w з центром у точці O. Його діагоналі перетинаються в точці H. Позначимо центри описаних кіл трикутників AHD і BHC як O_1 і O_2 відповідно. Пряма, що проходить через точку H, перетинає w в точках M_1 і M_2. Ця пряма перетинає вдруге описане коло ΔO_1HO у точці N_1, а описане коло ΔO_2HO у точці N_2. Відомо, що точки N_1 і N_2 лежать всередині кола w. Доведіть, що $M_1N_1 = M_2N_2$.

(Вадим Митрофанов)

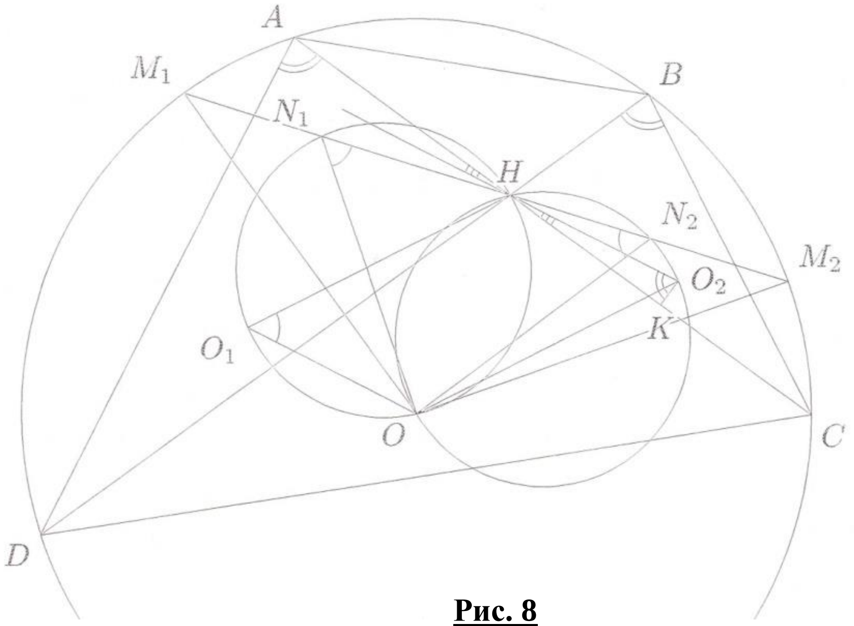


Рис. 8

Розв'язання. Без обмеження загальності можна вважати, що точки M_1, N_1, N_2 та M_2 розташовані на прямій саме в такому порядку. Дійсно, якщо $M_1N_1 = M_2N_2$, то $M_2N_1 = M_1N_2$, тобто достатньо довести лише для одного порядку точок M_1, M_2 (рис. 8).

Очевидно, що $M_1O = OM_2$, $\angle N_1M_1O = \angle N_2M_2O$. Будемо доводити, що $\angle HN_1O = \angle HN_2O$. Цього достатньо, бо в такому разі $\angle M_1ON_1 = \angle M_2ON_2$, звідки $\Delta M_1ON_1 = \Delta M_2ON_2$ і $N_1M_1 = N_2M_2$.

Маємо $\angle(HN_1, N_1O) = \angle(HO_1, O_1O)$ та $\angle(ON_2, N_2H) = \angle(OO_2, O_2H)$. Тоді, щоб довести, що $\angle HN_1O = \angle HN_2O$, достатньо показати, що $\angle(HO_1, O_1O) = \angle(OO_2, O_2H)$. Покажемо для цього, що чотирикутник O_1HO_2O є паралелограмом. Справді, маємо $OO_1 \perp AD$, бо і O_1, і O належать серединному перпендикуляру відрізка AD. Позначимо основу перпендикуляра, що опущений з O_2 на AC, через K. Тоді

$$\angle(O_2H, DA) = \angle(O_2H, HA) + \angle(AH, AD) = \angle(O_2H, HC) + \angle(CA, AD) =$$
$$= \angle(O_2H, HC) + \angle(CB, BD) = \angle(O_2H, HC) + \angle(KO_2, O_2H) = \angle(KO_2, HC) = 90^\circ,$$

бо KO_2 і HC перпендикулярні. Отже, $HO_2 \perp AD$, звідки $HO_2 \parallel OO_1$. Аналогічно $HO_1 \parallel OO_2$, тобто справді O_1HO_2O є паралелограмом, що й треба було довести.

11–7. Чи існують дві функції $f, g: R \to R$ такі, що для всіх $x, y \in \mathrm{R}$ справджується рівність:

$$f(x + f(y)) = \{y\} + g(x)?$$

Тут через $\{y\}$ *позначена дробова частина числа* y*, яка визначається як* $\{y\} = y - [y]$*, де* $[y]$ *-- ціла частина числа* y*, тобто найбільше ціле число, що не перевищує* y.

(Ігор Воронович)

Відповідь: не існують.

Розв'язання. При $y = 0$ маємо, що $f\left(x + f(0)\right) = g(x)$, тому початкову рівність можемо переписати у вигляді: $f\left(x + f(y)\right) = \{y\} + f\left(x + f(0)\right)$. При $x = 0$ отримуємо, що $f\left(f(y)\right) = \{y\} + f\left(f(0)\right)$.

Нехай $f\left(f\left(0\right)\right)=a$. Тоді $\left[a,a+1\right)\subset E_f$, де E_f -- множина значень функції f. Неважко довести, що коли $\left[t,t+s\right]\subset E_f$, де $0<s<1$, тоді $\left[t+sn,t+s\left(n+1\right)\right]\subset E_f$ і $\left[t-sn,t-s\left(n-1\right)\right]\subset E_f$ для довільного цілого $n\geq 0$. Для прикладу, покажемо перше твердження. База індукції при $n=0$ є. Далі припустимо, що ми довели твердження для деякого $n\geq 0$ і доведемо його для $n+1$. Оскільки $\left[t+sn,t+s\left(n+1\right)\right]\subset E_f$, то існує x_0 таке, що $f\left(x_0+f\left(0\right)\right)=t+s\left(n+1\right)$, а отже при $x=x_0$ маємо рівність $f\left(x_0+f\left(y\right)\right)=\{y\}+t+s\left(n+1\right)$. З останньої рівності випливає, що $\left[t+s\left(n+1\right),t+s\left(n+2\right)\right]\subset\left[t+s\left(n+1\right),t+s\left(n+1\right)+1\right)\subset E_f$. Таким чином, ми довели, що f — сюр'єктивна функція, тому $f\circ f$ також сюр'єкція, але це неможливо, оскільки $E_{f\circ f}=\left[a,a+1\right)$.

<u>Альтернативне розв'язання</u>. Із заданого рівняння при різних $y_1\neq y_2$ маємо, що

$$f(x+f(y_1))-\{y_1\}=g(x)=f(x+f(y_2))-\{y_2\}.$$

Тоді

$$f(-\{y_1\}+f(x+f(y_1)))=f(-\{y_2\}+f(x+f(y_2))).$$

Звідси із заданого функціонального співвідношення матимемо, що

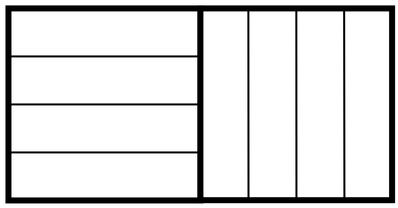
$$g(-\{y_1\})+\{x+f(y_1)\}=g(-\{y_2\})+\{x+f(y_2)\} \text{ або}$$

$$\{x+f(y_1)\}-\{x+f(y_2)\}=g(-\{y_2\})-g(-\{y_1\}).$$

Ліва частина не залежить від змінної x. Очевидно з умови, що множина значень функції f містить числа з різними дробовими частинами, точніше з довільними дробовими частинами. Якщо $y_1\neq y_2$ такі, що при цьому $\{f(y_1)\}\neq f\{(y_2)\}$. Тоді при фіксованих y_1, y_2 при переході $(-x)$ через $\{f(y_1)\}$ ліва частина останньої рівності має стрибок значень на 1 і не є сталою.

11–8. Для яких натуральних N існує деякий квадрат $k\times k$ та прямокутник $a\times b$ (числа $a>b>0$ – раціональні) такі, що цей квадрат можна розрізати на N прямокутників $a\times b$, таким чином, щоб принаймні два з цих прямокутників були по різному орієнтовані (тобто їх не можна було б сумістити паралельним переносом).

(В. Лішунов, Б. Рубльов)



<u>Рис. 9</u>

<u>Відповідь:</u> для усіх N, які можна подати у вигляді $N=M\cdot m^2$, де $M,\ m>1$ – натуральні числа.

<u>Розв'язання</u>. Спочатку покажемо, що для кожного N, яке наведено у відповіді, таке розбиття можливе. Виберемо квадрат зі стороною 1. Спочатку квадрат розіб'ємо на m^2 маленьких квадратів, розділивши кожну з його сторін на m рівних частин. Далі усі m^2 маленьких квадратів розбиваємо на M однакових прямокутників, більша сторона яких дорівнює стороні квадрата, а менша сторона складає $\frac{1}{M}$ від цієї сторони (рис. 9). При цьому, принаймні два з цих квадратів розіб'ємо на прямокутники різної орієнтації.

Тепер будемо доводити, що для усіх інших значень N такого розбиття не існує. Це доведення проведемо методом від супротивного, тобто припустимо, що для деякого N існує вказане розбиття. Без обмеження загальності будемо розбивати одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною 1. Будемо вважати, що цей квадрат розташований таким чином, що у нього одна сторона горизонтальна, інша – вертикальна. Будемо називати прямокутник $a\times b$ прямокутником *першого типу*, якщо у нього більша сторона, тобто довжиною a, розташована горизонтально. Прямокутники іншого розташування назвемо прямокутниками *другого типу*. Спочатку доведемо лему.

Лема. Квадрат зі стороною xyz, де x, y, z попарно взаємно прості натуральні числа, не можна розрізати на прямокутники розміром $x^2 \times y^2$.

Доведення. Розріжемо квадрат зі стороною xyz на менші квадратики, кожен з яких має сторону довжиною x, і пофарбуємо їх у x кольорів по діагоналях (рис. 10). Тоді при будь-якому розташуванні прямокутника $x^2 \times y^2$ у цьому квадраті він покриває однакову кількість квадратиків усіх кольорів. Але у великому квадраті квадратиків різних кольорів не однакова кількість. Їх усього $(yz)^2$, а це число не ділиться на кількість кольорів x.
Лема доведена.

1	**2**	**3**		**x-1**	**x**	**1**		**u**
x	**1**	**2**	**…**	**x-2**	**x-1**	**x**	**…**	**u-1**
x-1	**x**	**1**		**x-3**	**x-2**	**x-1**		**u-2**

Рис. 10

Нехай сторони прямокутника, на який можна розбити одиничний квадрат, це раціональні числа $a = \frac{x}{z_1}$, $b = \frac{y}{z_2}$, де x, y, z_1, z_2 – натуральні числа та $(x, z_1) = (y, z_2) = 1$. Нехай $(z_1, z_2) = z$. Тоді $z_1 = zt_1$, $z_2 = zt_2$ і $(t_1, t_2) = 1$. Площа одного прямокутника дорівнює $S = ab = \frac{xy}{z^2 t_1 t_2}$, звідки $N \frac{xy}{z^2 t_1 t_2} = 1$ або $N = z^2 \frac{t_1 t_2}{xy}$. Враховуючи, що $(xy, z) = 1$, отримуємо, що число $\frac{t_1 t_2}{xy}$ – натуральне.

Розглянемо випадки, коли N не може бути представлене у вигляді $M \cdot p^2$, для деякого простого p і натурального $M > 1$. Для випадку, коли це можливо зробити, вище побудовано приклад. Число N не представляється у потрібному нам вигляді лише тоді, коли z – просте і $\frac{t_1 t_2}{xy} = 1$ або у випадку $z = 1$. Доведемо, що обидва випадки неможливі.
Розглянемо випадок $z = 1$. Оскільки за нашим припущенням одиничний квадрат розрізаний на прямокутники $a \times b$, то його сторона розділена на відрізки довжинами a та b. З цього випливає, що існують цілі невід'ємні числа k і m, для яких має місце рівність $ka + mb = 1$, звідки $\frac{kxt_2}{t_1} + my = t_2$. Оскільки $(xt_2, t_1) = 1$, то $\frac{k}{t_1}$ – ціле. Аналогічно, $\frac{m}{t_2}$ – ціле.
Таким чином, якщо існують натуральні k і m, для яких виконується рівність $ka + mb = 1$, то $\frac{kx}{t_1} + \frac{my}{t_2} = 1$ і у лівій частині рівності знаходиться два натуральні доданки, тому їх сума не може дорівнювати 1. Якщо ж таких натуральних чисел не існує, це означає, що відрізок довжини 1 можна розбити на відрізки довжинами a та b, використовуючи відрізки лише одного вигляду, але не обох одночасно. Тоді до вертикальних сторін квадрату можуть примикати лише прямокутники, наприклад, першого вигляду, а до горизонтальних – лише другого. Видалимо всі прямокутники, що примикають до границі квадрату. Неважко зрозуміти, що для прямокутника, який після цього залишився виконується така ж сама умова: до його вертикальних сторін можуть примикати лише прямокутники першого вигляду, а до горизонтальних – лише другого. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо, що всі прямокутники розбиття орієнтовані однаково, що суперечить нашому припущенню .

Нехай тепер z – просте і $\frac{t_1 t_2}{xy} = 1$. Оскільки $(x, t_1) = (y, t_2) = 1$, то $t_1 \vdots y$, а отже $xy = t_1 t_2 \geq xy \Rightarrow t_1 = y$, $t_2 = x$. Тоді довжини сторін прямокутника можемо переписати у вигляді $a = \frac{x^2}{zxy}$, $b = \frac{y^2}{zxy}$, де числа x, y, z попарно взаємно прості. Далі використовуємо лему 1.

Розв’язання задачі завершене. Ми довели, що при такому розбитті кількість прямокутників має дільник, що є квадратом деякого простого числа. Якщо це квадрат простого числа, то розбиття неможливе, що доведено у лемі 1. Якщо там є ще множник, то розбиття можливе, що показано на початку розв'язання.